

УДК 534

А. С. КРАВЧУК<sup>1</sup>, А. И. КРАВЧУК<sup>1</sup>, Е. В. ТОМИЛО<sup>2</sup>, И. А. ТАРАСЮК<sup>1</sup>

**КОЛЕБАНИЯ ЧИСТОГО ИЗГИБА КОМПОЗИЦИОННОЙ  
СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНОЙ ПРИЗМАТИЧЕСКОЙ БАЛКИ  
ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ**

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет,<sup>2</sup>Белорусский национальный технический университет

(Поступила в редакцию 09.04.2015)

**Введение.** При изучении колебательных процессов отчетливо проявляется взаимодействие между физикой и математикой – влияние потребностей физики на развитие математических методов и обратное влияние математики на физические знания.

Однако многие колебательные процессы до настоящего времени в математическом смысле изучены недостаточно (например, влияние вязких свойств материала на процесс колебаний) либо имели ошибочное математическое описание [1].

В данной статье впервые получено дифференциальное уравнение поперечных изгибных колебаний призматической балки конечной длины из однородного линейно-упругого и вязкоупругого однородно стареющего материала, решением которого является функция Вебера. Данное решение обобщено на случай изгибных колебаний структурно-неоднородных композиционных тел.

Получены собственные частоты изгибных колебаний призматической балки в зависимости от модуля упругости для однородного линейно-упругого материала, а также мгновенного модуля упругости и ядра ползучести для наследственного уравнения вязкоупругости однородно стареющего материала.

Обобщены уравнения свободных изгибных колебаний балки и определения ее собственных частот для структурно-однородного материала на случай структурно-неоднородных композиционных упругого и вязкоупругого однородно стареющего материалов балки.

**Анализ уравнений изгибных колебаний, полученных ранее.** Истинность вывода уравнения изгибных колебаний балки, изложенного в известной монографии В. Л. Бидермана [1], вызывает сомнения, так как дифференциальное уравнение изгибных колебаний получено из уравнения изогнутой оси балки, выведенного С. П. Тимошенко [2], в случае статического изгиба распределенной нагрузкой  $q$  постоянной интенсивности, приложенной на всей длине балки:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{q}{EI} \left[ \frac{\ell^2 - x^2}{2} + c^2 \left( \frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) \right], \quad (1)$$

где  $u$  – перемещение вдоль оси  $Oy$  нейтрального слоя прямоугольной балки,  $E$  – модуль упругости материала,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $I$  – момент инерции прямоугольного сечения балки шириной единица,  $\ell$  – половина длины балки,  $c = \sqrt[3]{\frac{3}{2}I}$  [2].

В монографии С. П. Тимошенко после уравнения (1) дается комментарий, что оно верно и в случае, когда  $q$  является функцией от  $x$ , т. е. верна следующая формула:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{q(x)}{EI} \left[ \frac{\ell^2 - x^2}{2} + c^2 \left( \frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) \right]. \quad (2)$$

Однако в монографии В. Л. Бидермана [1] дифференцирование уравнения (2) приводит, очевидно, к ошибочному выражению

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 u}{dx^2} \right) = q(x).$$

Далее  $q(x)$  заменяется инерционной переменной по  $x$  нагрузкой  $-m_0 \frac{d^2 u}{dx^2}$ , что неверно, так как при получении этого уравнения автор предполагает пренебречь силами инерции, действующими вдоль оси  $Oy$ , более того, в случае изгибных колебаний у балки рассматривается масса единицы длины стержня, а не плотность.

Отметим также, что получение уравнения (1) у С. П. Тимошенко не достаточно теоретически обосновано. Для его получения он использовал уравнения статики плоского упругого тела, а затем применил к ним уравнения перемещений, полученные из технической теории чистого изгиба балок, которые выведены на основании гипотез, противоречащих двумерным уравнениям механики твердого тела хотя бы предположением об отсутствии взаимодействия между изгибаемыми в плоскости  $xOy$  волокнами. Произвольная замена константы  $q$  на функцию  $q(x)$  неверна, так как в случае функции  $q(x)$  в описании перемещений  $u$  должны участвовать комбинации коэффициентов ряда Фурье разложения  $q(x)$ , как это получается при решении задачи для прямоугольника, нагруженного произвольной нагрузкой [3].

Таким образом, адекватных уравнений, определяющих свободные изгибные колебания балки, до настоящего времени не было получено. Кроме того, без внимания остались вопросы влияния структуры композиционного тела на собственные частоты.

Аналогичный В. Л. Бидерману [1] результат получен в учебнике С. П. Стрелкова [4] с использованием перерезывающей силы, что также противоречит гипотезе отсутствия взаимодействия волокон в балке при выводе уравнений технической теории изгиба.

**Уравнение свободных изгибных колебаний балки.** При построении обобщенной технической теории чистого изгиба призматическую балку постоянной толщины можно разделить на элементарные призматические волокна. Под чистым изгибом будем понимать изгиб, при котором продольные призматические волокна в балке не взаимодействуют друг с другом в поперечном направлении [5].

Предполагается, что призматическая балка имеет прямоугольное сечение с постоянной высотой  $h$  и толщиной, равной  $\Delta$ . Будем полагать, что у призматической балки постоянной толщины при чистом изгибе существует нейтральный слой, т. е. слой, длина которого не изменяется при изгибе. Рассматривается балка длины  $l$ . Воспользуемся способом, известным из уравнений математической физики (например, крутильных колебаний стержня). Будем использовать приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки [5] с учетом выбора осей координат (рис. 1):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{M_x}{EJ_x}. \quad (3)$$

Здесь  $J_x$  – момент инерции прямоугольного сечения балки.

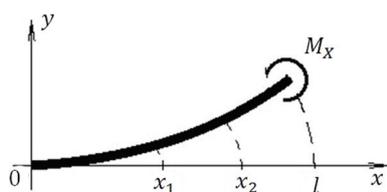


Рис. 1. Схема нагружения призматической балки положительным моментом

Рассмотрим фрагмент изогнутой балки между точками  $(x_1, x_2)$  (рис. 1). Пусть момент  $M_x(x_1)$  действует на левом конце балки, а  $M_x(x_2)$  – на правом ее конце. Исходя из уравнения (3), можно записать, что приращение момента  $\Delta M_x$  при переходе от точки  $x_1$  к точке  $x_2$  определяется таким образом:

$$\Delta M_x = EJ_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=x_2} - EJ_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=x_1} = EJ_x \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} dx. \quad (4)$$

Приращение момента инерционных сил

$$\rho S_x x_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=x_1} - \rho S_x x_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \rho S_x \frac{\partial}{\partial x} \left( x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dx \quad (5)$$

( $S_x$  – площадь поперечного сечения).

Приравнивая формулы (4) и (5), получаем уравнение изгибных колебаний однородной балки прямоугольного сечения:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{EJ_x}{\rho S_x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx = 0. \quad (6)$$

Поменяем порядок интегрирования и дифференцирования в (6). Получаем, что

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{EJ_x}{\rho S_x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx = C, \quad (7)$$

где  $C$  – некоторая константа. Далее находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{EJ_x}{\rho S_x} \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{C}{x_2 - x_1} \frac{1}{x^2}. \quad (8)$$

Учитывая произвольность выбора  $(x_1, x_2)$ , получаем, что константа  $C$  должна равняться нулю при  $x_2 \rightarrow x_1$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (9)$$

где  $a = \sqrt{\frac{EJ_x}{\rho S_x}}$ . Отметим, что для постоянного прямоугольного сечения балки  $J_x / S_x = h^2 / 12$ , где  $h$  – высота прямоугольного сечения.

**Оценка собственных частот однородной балки прямоугольного сечения.** Используем метод Фурье, который заключается в предположении, что решение (9) с принятыми начальными и краевыми условиями имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x, t), \quad (10)$$

где  $u_i(x, t) = X_i(x) \Theta_i(t)$  – функции для каждого  $i = \overline{1, \infty}$ , удовлетворяющие уравнению (9). Подставляя  $u_i(x, t)$  в (9), находим

$$\frac{1}{a^2} \frac{d^2 \Theta_i(t)}{\Theta_i(t) dt^2} = \frac{1}{x^2} \frac{d^2 X_i(x)}{X_i(x) dx^2}. \quad (11)$$

Очевидно, что равенство уравнения (11) возможно только тогда, когда  $\forall i$  обе части уравнения равны некоторой константе  $-\lambda_i^2$  [6]. Таким образом, из (11) получаем два независимых уравнения для определения  $X_i(x)$  и  $\Theta_i(t)$  [7]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X_i(x)}{dx^2} + \lambda_i^2 x^2 X_i(x) &= 0, \\ \frac{d^2 \Theta_i(t)}{dt^2} + \lambda_i^2 a^2 \Theta_i(t) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Решениями уравнений (12), исходя из краевого условия неподвижности левого края изгибаемой балки ( $u|_{x=0} = 0$ ) и начального условия  $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0$ , являются следующие функции [8]:

$$X_i(x) = C_{1,i}^x \left( D_{\frac{1}{2}} \left( (-1)^{1/4} \sqrt{2\lambda_i x} \right) - D_{\frac{1}{2}} \left( (-1)^{3/4} \sqrt{2\lambda_i x} \right) \right), \quad (13)$$

$$\Theta_i(t) = C_{1,i}^t \cos(\lambda_i a t),$$

где  $D_{\frac{1}{2}}(z)$  – комплекснозначная функция параболического цилиндра (функция Вебера) [8],  $C_{1,i}^x$ ,  $C_{2,i}^t$  – произвольные вещественные константы.

Учитывая, что хотя функция  $D_{\frac{1}{2}}(z)$  является комплекснозначной, но величина мощности  $\text{Im} \left[ D_{\frac{1}{2}} \left( (-1)^{1/4} \sqrt{2\lambda_i x} \right) - D_{\frac{1}{2}} \left( (-1)^{3/4} \sqrt{2\lambda_i x} \right) \right]$  меньше значения мощности  $\text{Re} \left[ D_{\frac{1}{2}} \left( (-1)^{1/4} \sqrt{2\lambda_i x} \right) - D_{\frac{1}{2}} \left( (-1)^{3/4} \sqrt{2\lambda_i x} \right) \right]$ , то функция

$$X_i(x) = C_{1,i}^x \left( D_{\frac{1}{2}} \left( (-1)^{1/4} \sqrt{2\lambda_i x} \right) - D_{\frac{1}{2}} \left( (-1)^{3/4} \sqrt{2\lambda_i x} \right) \right) \approx$$

$$C_{1,i}^x \text{Re} \left[ D_{\frac{1}{2}} \left( (-1)^{1/4} \sqrt{2\lambda_i x} \right) - D_{\frac{1}{2}} \left( (-1)^{3/4} \sqrt{2\lambda_i x} \right) \right]$$

представляет собой приближенное аналитическое решение первого уравнения системы (12) с учетом краевого условия на левом конце балки. Для удовлетворения второго краевого условия  $u|_{x=\ell} = 0$  достаточно, чтобы было выполнено уравнение

$$\text{Re} \left[ D_{\frac{1}{2}} \left( (-1)^{1/4} \sqrt{2\lambda_i \ell} \right) - D_{\frac{1}{2}} \left( (-1)^{3/4} \sqrt{2\lambda_i \ell} \right) \right] = 0. \quad (14)$$

Отметим, что уравнение (14) имеет бесконечное число корней  $\mu_i$  [8]. Отсюда следует, что для удовлетворения условия неподвижности правого края изгибаемой балки ( $u|_{x=\ell} = 0$ ) достаточно положить  $\lambda_i = \frac{\mu_i^2}{2\ell^2}$ . Отметим, что с помощью непосредственных вычислений можно определить серию значений  $\mu_i \approx \text{Re}[\mu_i]$ :  $\mu_1 \approx 3,3352\dots$ ,  $\mu_2 \approx 4,86051\dots$ ,  $\mu_3 \approx 6,01411\dots$

Таким образом, исходя из (13), собственные частоты свободных изгибных колебаний балок прямоугольного сечения определяются выражением

$$\omega_i = \lambda_i a = \frac{\mu_i^2}{2\ell^2} \sqrt{\frac{EJ_x}{\rho S_x}}. \quad (15)$$

**Вязкоупругие изгибные колебания балки из однородного материала по наследственной теории.** При ползучести предполагается, что деформации происходят так медленно, что задача рассматривается как квазистатическая, т. е. массоинерционные характеристики призматической балки не влияют на характер ее деформирования. Рассматривается установившаяся ползучесть бруса. В соответствии с наследственной теорией ползучести для призматического бруса из одного однородно стареющего материала, подверженного чистому изгибу, будем рассматривать уравнение состояния [9, 10]:

$$\varepsilon_z(y,t) = \frac{1}{E(t)} \left[ \sigma_z(y,t) + \int_0^t \sigma_z(y,\tau) \Gamma(t,\tau) d\tau \right] \quad (16)$$

( $E(t)$  – мгновенный модуль упругости,  $\Gamma(t,\tau)$  – ядро ползучести).

В случае квазистатической ползучести приближенное дифференциальное уравнение перемещений балки будет иметь вид при постоянном изгибающем моменте [5, 10]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho(t)}, \quad (17)$$

где  $\frac{1}{\rho(t)} = \frac{M_x}{J_x E(t)} \left[ 1 + \int_0^t \Gamma(t,\tau) d\tau \right]$ .

Не повторяя дословно вывод уравнения (9), получаем уравнение, учитывающее ползучесть балки при изгибных колебаниях:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a(t)^2 \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (18)$$

где  $a(t) = \sqrt{E(t) J_x / \left( \rho S_x \left[ 1 + \int_0^t \Gamma(t,\tau) d\tau \right] \right)}$ .

Аналогично (15) собственные частоты изгибных колебаний определяются выражением (рис. 2)

$$\omega_i(t) = \lambda_i a(t) = \frac{\mu_i^2}{2\ell^2} \sqrt{E(t) J_x / \left( \rho S_x \left[ 1 + \int_0^t \Gamma(t,\tau) d\tau \right] \right)}. \quad (19)$$

Отметим, что гипотеза о постоянных изгибающих моментах, действующих в сечениях, соответствующих точкам  $x_1$  и  $x_2$ , значительно упрощает результирующее уравнение (18) и позволяет получить аналитические выражения для собственных частот (19), в теоретическом смысле наследственную теорию ползучести приравнивает технической теории старения.

**Методика решения задачи изгиба композиционной призматической балки.** Собственно методика решения задач чистого изгиба композиционных призматических балок изложена в [10, 11]. Все допущения относительно линейных размеров  $\ell'$  макроточек композиционных материалов ( $\ell' < x_2 - x_1$ ), а также применения гипотез Фойгта и Рейсса в данном случае также верны. Необходимо отметить, что из условия наличия неоднородностей в материале стержня

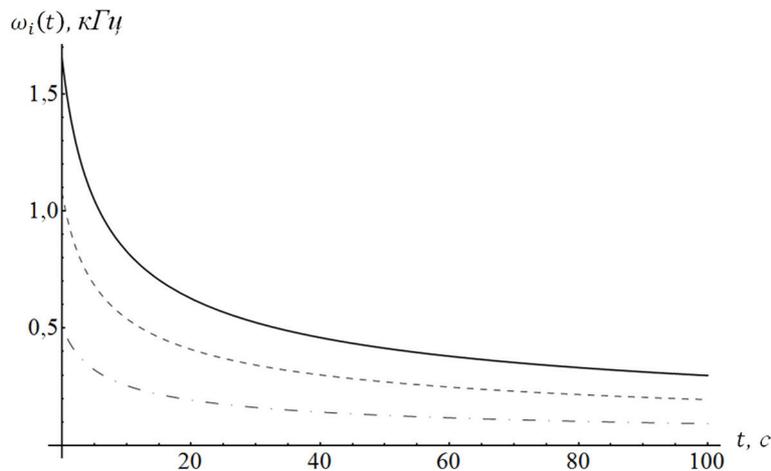


Рис. 2. Зависимость низших собственных частот  $\omega_1(t)$  (штрихпунктирная линия),  $\omega_2(t)$  (штриховая линия),  $\omega_3(t)$  (сплошная линия) (19) призматической балки из однородного вязкоупругого материала длины  $\ell = 1$  м от времени  $t$  ( $J_x/S_x = 0,001$ ,  $E(t) = E = 0,7 \cdot 10^{11}$  Па,  $\rho = 8330$  кг/м<sup>3</sup> и  $\Gamma(t,\tau) = 0,3e^{-10^{-11}(t-\tau)}$ )

в соответствии с характером вывода уравнений (3)–(9) можно утверждать, что количеством  $N$  достоверно вычисленных частот для композиционной призматической балки является значение, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{\ell}{N} \gg \ell',$$

т. е. длина волны  $\ell / N$  должна быть больше размера неоднородности композиционной балки как минимум в 10 раз.

**Изгибные колебания композиционной балки без учета временных эффектов.** Фактически в уравнении (9) в соответствии с результатами [11, 12] при вычислении коэффициента  $a$  модуль упругости однородного материала необходимо заменить эффективным значением Хилла для структурно-неоднородного композиционного материала, состоящего из  $n$  компонент, а плотность однородного материала – ее средним значением в соответствии с объемными долями  $\gamma_k$  (концентрациями) указанных компонент:

$$a = \sqrt{\frac{\langle E \rangle_X J_x}{\langle \rho \rangle S_x}}, \quad (20)$$

где  $\langle E \rangle_X = \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_k} \right)^{-1} + \sum_{k=1}^n \gamma_k E_k \right)$ ,  $\langle \rho \rangle = \sum_{k=1}^n \gamma_k \rho_k$ ,  $E_k$  – модуль упругости  $k$ -й компоненты композиционного материала,  $\rho_k$  – плотность  $k$ -й компоненты композиционного материала. Соответственно собственные частоты структурно-неоднородного материала будут определяться уравнением, аналогичным (15) (рис. 3):

$$\omega_i = \frac{\mu_i^2}{2\ell^2} \sqrt{\frac{\langle E \rangle_X J_x}{\langle \rho \rangle S_x}}. \quad (21)$$

**Изгибные колебания композиционной балки с учетом эффективных вязкоупругих свойств материала.** Аналогично в (18) и (19) вносим изменения в соответствии с работами [10, 12]:

$$a(t) = \sqrt{\frac{\langle E(t) \rangle_X J_x}{\langle \rho \rangle S_x \left[ 1 + \int_0^t \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_X d\tau \right]}},$$

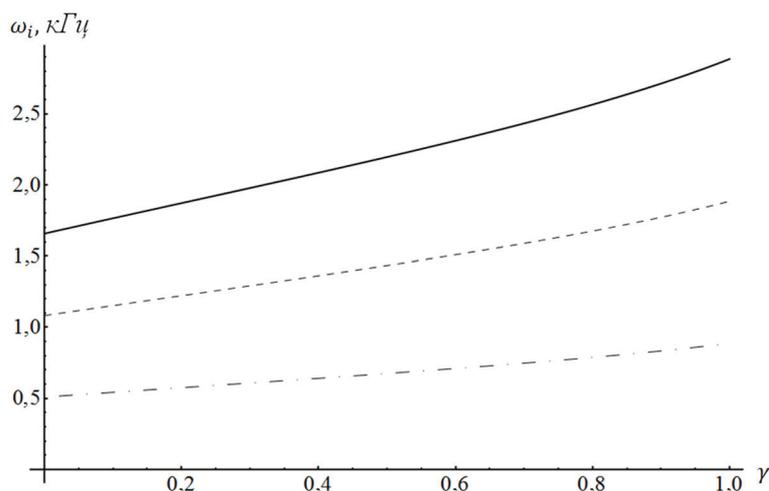


Рис. 3. Зависимость низших собственных частот  $\omega_1$  (штрихпунктирная линия),  $\omega_2$  (штриховая линия),  $\omega_3$  (сплошная линия) (21) композиционной структурно-неоднородной призматической балки длиной  $\ell = 1$  м от концентрации  $\gamma$  первого материала в двухкомпонентной смеси ( $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $E_2 = 0,7 \cdot 10^{11}$  Па,  $\rho_1 = 7850$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_2 = 8330$  кг/м<sup>3</sup> при  $J_x/S_x = 0,001$ )

где

$$\langle E(t) \rangle_X = \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_k(t)} \right)^{-1} + \sum_{k=1}^n \gamma_k E_k(t) \right),$$
$$\langle \Gamma(t) \rangle_X = \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_k(t)} \right)^{-1} \left( \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k \Gamma_k(t, \tau)}{E_k(t)} \right) + \sum_{k=1}^N \gamma_k^2 \Gamma_k(t, \tau) \right).$$

Аналогично (19) собственные частоты изгибных колебаний определяются таким образом:

$$\omega_i(t) = \frac{\mu_i^2}{2\ell^2} \sqrt{\langle E(t) \rangle_X J_x / \left( \langle \rho \rangle S_x \left[ 1 + \int_0^t \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_X d\tau \right] \right)}.$$

**Заключение.** Впервые получено дифференциальное уравнение поперечных изгибных колебаний призматической балки конечной длины из однородного линейно-упругого и вязкоупругого однородно стареющего материалов, решением которого является функция Вебера. Данное решение обобщено на случай изгибных колебаний структурно-неоднородных композиционных тел.

Получены собственные частоты изгибных колебаний призматической балки в зависимости от модуля упругости для однородного линейно-упругого материала, а также мгновенного модуля упругости и ядра ползучести для наследственного уравнения вязкоупругости однородно стареющего материала.

Обобщены уравнения свободных изгибных колебаний балки и определения ее собственных частот для структурно-однородного материала на случай структурно-неоднородных композиционных упругого и вязкоупругого однородно стареющего материалов балки.

### Литература

1. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М., 1980.
2. Тимошенко С. П. Теория упругости. М.; Л., 1937.
3. Жемочкин Б. Н. Теория упругости. М., 1957.
4. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. М., 1964.
5. Филлин А. П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Т2: Сопротивление материалов с элементами сплошных сред и строительной механики. М., 1978.
6. Арамонович И. Г., Левин В. И. Уравнения математической физики. М., 1969.
7. Weisstein E.W. Parabolic Cylinder Differential Equation. MathWorld [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://mathworld.wolfram.com/>
8. Weisstein E.W. Parabolic Cylinder Function. MathWorld [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://mathworld.wolfram.com/>
9. Ржаницын А. Р. Теория ползучести. М., 1968.
10. Кравчук А. С., Томило Е. В. // Механика машин, механизмов и материалов. 2014. № 3 (28). С. 47–51.
11. Кравчук А. С., Томило Е. В. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. 2014. № 3. С. 15–20.
12. Кравчук А. С., Кравчук А. И., Тарасюк И. А. APRIORI. Серия: Естественные и технические науки [Электронный ресурс]. 2015. № 1. Режим доступа: <http://apriori-journal.ru/seria2/1-2015/Kravchuk-Kravchuk-Tarasyuk.pdf>

A. S. KRAVCHUK, A.I. KRAVCHUK, Y. V. TAMILA, I. A. TARASYUK

### VIBRATION OF PURE BENDING OF COMPOSITE PRISMATIC BEAMS WITH CONSTANT CROSS SECTION AND STRUCTURAL NON-UNIFORMITY

### Summary

Differential equation for transverse bending vibrations of prismatic beam of finite length for homogeneous linear elastic and viscoelastic uniformly aging materials was obtained. The solution of this equation is a function of Weber. The solution is generalized to the case of flexural vibrations of structurally inhomogeneous composite bodies. The natural frequencies of bending vibrations of prismatic beam depending on the modulus of elasticity for a homogeneous linear elastic material, as well as the instantaneous elastic modulus and creep kernel for hereditary viscoelasticity equations uniformly aging material also were obtained.