

УДК 539.3

О. Л. ШВЕД

## КРИТЕРИЙ РАЗРУШЕНИЯ В МОДЕЛИ МОНОКЛИННОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

*Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, Минск, Беларусь,  
e-mail: swed@newman.bas-net.by*

Конкретизированы полученные ранее определяющие соотношения упругопластичности для моноклинного материала. Рассмотрен критерий разрушения и предложена процедура его проверки. Выполнено численное моделирование процесса простого сдвига, проведенного до момента разрушения.

*Ключевые слова:* упругопластичность, моноклинный материал, критерий разрушения, численное моделирование, простой сдвиг.

O. L. SHVED

## FAILURE CRITERION IN THE MODEL OF MONOCLINIC ELASTIC-PLASTIC MATERIAL

*United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,  
e-mail: swed@newman.bas-net.by*

The previously obtained defining relations for monoclinic elastic-plastic material are specified. The criterion of destruction is considered and procedure of its verification is offered. The numerical simulation of simple shear, conducted before the destruction is made.

*Keywords:* elastic-plastic, monoclinic material, failure criterion, numeral design, simple change.

В [1–3] представлена модель нелинейно-упругопластического материала. В силу кусочно-вогнутых поверхностей девиаторного сечения поверхности текучести и увеличения подвижности материала за счет чередования пластических и упругих состояний элементов деформируемого твердого тела могут моделироваться необычное с точки зрения механики материалов явление «запирания» области высокого давления [4] и опыты Треска по экструзии свинца [5], которые не описываются существующими моделями [6, 7].

Численное моделирование указанных проблемных течений необходимо выполнять в рамках решения двумерных краевых задач обработки металлов давлением для моноклинного материала. Будем рассматривать моноклинный материал, для которого удельная потенциальная энергия упругой деформации является скаляром, инвариантным относительно преобразования поворота на угол  $\pi$  вокруг третьей фиксированной оси [8, 9]. В модели упругопластической среды должна быть предусмотрена возможность макроразрушения [6, 7], поэтому следует рассмотреть и соответствующий критерий [10, 11]. Ранее он был исследован только для ортотропного материала [3]. Проверку критерия разрушения проведем на задаче простого сдвига (см. [12], с. 111) при упрощающем предположении идеальной упругопластичности материала.

Обозначим  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$  – ортонормированный неподвижный триэдр и  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  – ортонормированные собственные векторы тензора напряжений Коши  $\mathbf{T}$ . При векторной интерпретации симметричного тензора второго ранга девиатора  $\mathbf{W}_1 = (\sqrt{6})^{-1}(\mathbf{E} - 3\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3)$ ,  $\mathbf{W}_2 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1\mathbf{c}_1)$ ,  $\mathbf{W}_3 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1)$ ,  $\mathbf{W}_4 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_1)$ ,  $\mathbf{W}_5 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_2)$  образуют ортонормированный базис пространства девиаторов напряжений. Добавлением к нему «вектора»  $\mathbf{W}_0 = (\sqrt{3})^{-1}\mathbf{E}$  получается соответствующий базис в пространстве напряжений. Скалярное произведение таких векторов понимается как двойное скалярное произведение тензоров ( $\mathbf{W}_i \cdot \cdot \mathbf{W}_i = 1$ ,  $\mathbf{W}_i \cdot \cdot \mathbf{W}_j = 0$ ,  $i, j = 0, 5$ ,  $i \neq j$ ).

© Швед О. Л., 2015

Рассмотрим определяющие уравнения в конечном виде. Пренебрегая малыми величинами более высокого порядка (13 параметров исключаются), получаем для моноклинного материала 32 параметра анизотропии  $\delta_j$  из 77 возможных [13]. Ненулевыми могут быть только параметры при  $j \in \{1-11, 15, 22-31, 42, 45, 48, 51-54, 60, 63, 66\}$ , и удельная потенциальная энергия упругой деформации (потенциал напряжений) имеет вид

$$\begin{aligned} \vartheta = & \vartheta_0 + 4^{-1}(\delta_1 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 2) + \delta_2 \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 2) + \delta_3 \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 2) + \\ & + \delta_4 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) + \delta_5 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) + \delta_6 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) + \\ & + \delta_8 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2) + \delta_9 (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3) + \\ & + \delta_{10} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3) + \delta_7 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2)^2 + \delta_{11} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2 + \delta_{15} (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2 + \\ & + 8^{-1}(\delta_{22} ((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)^3 + 1) + \delta_{23} ((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)^3 + 1) + \delta_{24} ((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)^3 + 1) + \delta_{25} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)^2 (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - \\ & - 1) + 1) + \delta_{26} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)^2 (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) + 1) + \delta_{27} (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)^2 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) + 1) + \\ & + \delta_{28} (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)^2 (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) + 1) + \delta_{29} (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)^2 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) + 1) + \\ & \delta_{30} (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)^2 (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) + 1) + \delta_{31} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) + 1) + \\ & + \delta_{42} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)^2 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 + \delta_{45} (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)^2 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 + \delta_{48} (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)^2 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 + \\ & + \delta_{51} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2)^2 + \delta_{52} (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2)^2 + \delta_{53} (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2)^2 + \\ & + \delta_{54} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2)^3 + \delta_{60} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 + \delta_{63} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 + \\ & + \delta_{66} (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2) + c, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_0 = & 4^{-1} (4^{-1} (-12\lambda - 8\mu + 9\nu_1 + 18\nu_2 + 8\nu_3) I_1 + 4^{-1} (2\lambda + 4\mu - 3\nu_1 - 10\nu_2 - 8\nu_3) I_1^2 + \\ & + (-2\mu + 3\nu_2 + 4\nu_3) I_2 - (\nu_2 + 2\nu_3) I_1 I_2 + 12^{-1} (\nu_1 + 6\nu_2 + 8\nu_3) I_1^3 + 2\nu_3 I_3), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\mathbf{G}$  – мера упругой деформации Коши–Грина,  $c$  – минимальная постоянная, обеспечивающая условие  $\vartheta \geq 0$ ,  $\vartheta_0$  – изотропный потенциал,  $I_1, I_2, I_3$  – первый, второй и третий главные инварианты меры  $\mathbf{G} = \mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{F}_e$  и меры упругой деформации Фингера  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_e^T$ , постоянные Ляме  $\lambda, \mu$  – второго и  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  – третьего порядков. Неособенный тензор  $\mathbf{F}_e$  заменяет в упругопластичности деформационный градиент. Для изотропного материала все параметры анизотропии являются нулевыми.

Уравнение для тензора напряжений Коши имеет вид

$$\mathbf{T} = 2(\sqrt{I_3})^{-1} \mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^T = \mathbf{T}_0 + \sum_j \delta_j \mathbf{T}_j, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_0 = & 2(\sqrt{I_3})^{-1} (\varphi_0 \mathbf{E} + \varphi_1 \mathbf{F} + \varphi_2 \mathbf{F}^2) (\varphi_0 = a_0 I_3, \varphi_1 = b_0 + b_1 I_1 + b_2 I_1^2 + b_3 I_2, \varphi_2 = c_0 + c_1 I_1), \\ a_0 = & 2^{-1} \nu_3, \quad b_0 = 16^{-1} (-12\lambda - 8\mu + 9\nu_1 + 18\nu_2 + 8\nu_3), \quad b_1 = 8^{-1} (2\lambda - 3\nu_1 - 4\nu_2), \\ b_2 = & 16^{-1} (\nu_1 + 2\nu_2), \quad b_3 = -4^{-1} (\nu_2 + 2\nu_3), \quad c_0 = 4^{-1} (2\mu - 3\nu_2 - 4\nu_3), \quad c_1 = -b_3, \\ \mathbf{T}_i = & L_3^{-1} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1) \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V}, \\ \mathbf{T}_{3+i} = & 4^{-1} L_3^{-1} ((\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1) \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V} + 2\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V}), \\ \mathbf{T}_8 = & L_3^{-1} 2^{-1} \mathbf{V} \cdot ((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2) \cdot \mathbf{V}, \\ \mathbf{T}_9 = & L_3^{-1} 2^{-1} \mathbf{V} \cdot ((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2) \cdot \mathbf{V}, \\ \mathbf{T}_{10} = & L_3^{-1} 2^{-1} \mathbf{V} \cdot ((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3) \cdot \mathbf{V}, \\ \mathbf{T}_7 = & L_3^{-1} 2^{-1} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V}, \quad \mathbf{T}_{11} = L_3^{-1} 2^{-1} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V}, \\ \mathbf{T}_{15} = & L_3^{-1} 2^{-1} \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_2 \mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_3) \cdot \mathbf{V}, \quad \mathbf{T}_{21+i} = 4^{-1} 3 L_3^{-1} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V}, \\ \mathbf{T}_{25} = & 4^{-1} L_3^{-1} (2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V}), \\ \mathbf{T}_{26} = & 4^{-1} L_3^{-1} (2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V}), \\ \mathbf{T}_{27} = & 4^{-1} L_3^{-1} (2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V}), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{28} &= 4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)^2\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V}), \\
\mathbf{T}_{29} &= 4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)^2\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V}), \\
\mathbf{T}_{30} &= 4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)^2\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V}), \\
\mathbf{T}_{31} &= 4^{-1}L_3^{-1}((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} + \\
&+ (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V}), \\
\mathbf{T}_{39+3i} &= 8^{-1}L_3^{-1}((\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)^2\mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2\mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V} + 4\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i\mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V}), \\
\mathbf{T}_{50+i} &= 4^{-1}L_3^{-1}((\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2\mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2)^2\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i\mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V}), \\
\mathbf{T}_{54} &= 8^{-1}3L_3^{-1}((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2)^2\mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2\mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V}), \\
\mathbf{T}_{60} &= 4^{-1}L_3^{-1}(2^{-1}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2\mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V} + \\
&+ \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V}), \\
\mathbf{T}_{63} &= 4^{-1}L_3^{-1}(2^{-1}(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2\mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V} + \\
&+ \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V}), \\
\mathbf{T}_{66} &= 4^{-1}L_3^{-1}(2^{-1}(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2\mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V} + \\
&+ \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V}) \\
&(\mathbf{C}_i = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{c}_i = \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{O}, \quad L_3 = \sqrt{I_3}, \quad i = 1, 2, 3).
\end{aligned} \tag{5}$$

Уравнения в конечном виде для потенциала напряжений (1)–(2) и тензора напряжений (3)–(5) справедливы для упругого и пластического состояний моноклинного материала.

Введем критериальный девиатор-оператор, через который будет записываться критерий текучести. Обозначим  $\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{T} - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{\Omega}$  ( $\mathbf{\Omega} = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O}$  – тензор упругого спина [14], точка над символом означает материальную производную) – О-производная тензора  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{D}$  – тензор скорости деформаций,  $\nabla \mathbf{v}^T$  – градиент скорости,  $\mathbf{W}$  – тензор вихря. Определим девиатор-оператор  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{D})$  как О-производную девиатора  $\text{dev } \mathbf{T}$ , вычисленную при условии несжимаемости  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  по соотношению  $\dot{\mathbf{F}}_e = \nabla \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{F}_e$ . Последнее уравнение задает тензор  $\mathbf{F}_e$  в упругом состоянии. Из (3)–(5) имеем:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{D}) = (\mathbf{W} - \mathbf{\Omega}) \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot (\mathbf{W} - \mathbf{\Omega}) + \mathbf{Q}_0(\mathbf{D}) + \mathbf{Q}_2(\mathbf{D}) + \mathbf{Q}_3(\mathbf{D}), \tag{6}$$

$$\mathbf{Q}_0 = \text{dev}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{T} + 4L_3^{-1}((b_1 + (2b_2 - c_1)I_1)\mathbf{F} \cdot \mathbf{D} + c_1\mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{D}))\mathbf{F} + c_1\mathbf{F} \cdot \mathbf{D}\mathbf{F}^2 - \varphi_0\mathbf{D} + \varphi_2\mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}), \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_2 &= L_3^{-1} \text{dev}(\mathbf{V} \cdot ((2\delta_1\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + \delta_4\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \delta_8\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \delta_{10}\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3)\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1 + \\
&+ (2\delta_2\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \delta_5\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \delta_8\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + \delta_9\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3)\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2 + \\
&+ (2\delta_3\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + \delta_6\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \delta_9\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \delta_{10}\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1)\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3 + \\
&+ (\delta_7\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + 2^{-1}(\delta_4\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + \delta_5\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \delta_6\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3))(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2\mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V}),
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_3 &= L_3^{-1} \text{dev}(\mathbf{V} \cdot ((3\delta_{22}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + \delta_{27}(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \\
&+ \delta_{29}((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + \delta_{25}((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - \\
&- 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2) + \delta_{26}((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3) + \\
&+ \delta_{31}2^{-1}((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2)) + \\
&+ \delta_{42}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2) + \\
&+ \delta_{51}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \delta_{60}2^{-1}((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \\
&+ \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2) + \delta_{63}2^{-1}((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \\
&+ \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3))\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(3\delta_{23}(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \delta_{25}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + \\
& + \delta_{30}(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + \delta_{27}((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - \\
& - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2) + \delta_{28}((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3) + \\
& + \delta_{31}2^{-1}((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1)) + \\
& + \delta_{45}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2) + \\
& + \delta_{52}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \delta_{60}2^{-1}((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \\
& + \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1) + \delta_{66}2^{-1}((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \\
& + \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3))\mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 + \\
& + (3\delta_{24}(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + \delta_{26}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + \\
& + \delta_{28}(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \delta_{29}((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - \\
& - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3) + \delta_{30}((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3) + \\
& + \delta_{31}2^{-1}((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2)) + \\
& + \delta_{48}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2) + \\
& + \delta_{53}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \delta_{63}2^{-1}((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \\
& + \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1) + \delta_{66}2^{-1}((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \\
& + \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2))\mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 + \\
& + (\delta_{42}2^{-1}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + \delta_{45}2^{-1}(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \\
& + \delta_{48}2^{-1}(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + \delta_{51}2^{-1}((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \\
& + \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1) + \delta_{52}2^{-1}((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \\
& + \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2) + \delta_{53}2^{-1}((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \\
& + \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3) + \delta_{54}2^{-1}3\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \\
& + \delta_{60}4^{-1}((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2) + \\
& + \delta_{63}4^{-1}((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3) + \\
& + \delta_{66}4^{-1}(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2))(\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_1)) \cdot \mathbf{V}).
\end{aligned} \tag{9}$$

Критерий текучести при формулировке определяющих уравнений в дифференциальном виде в первом случае [1, 2] задается неравенством  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} \geq 0$ . Критериальный девиатор-оператор  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{D})$  (6) – (9) с учетом векторного представления  $\mathbf{Q} = \sum q_i \mathbf{W}_i$ ,  $\mathbf{D} = \sum d_i \mathbf{W}_i$  ( $p_i$  – вычисляемые скаляры) записывается для рассматриваемого моноклинного материала как

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + 2p_2 & \sqrt{3}p_2 & p_3 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}p_2 & -p_1 + 2p_2 & p_4 & 0 & 0 \\ p_3 & p_4 & p_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Применительно к задаче простого сдвига соответствующие уравнения для напряжений, потенциала напряжений и параметров анизотропии при течении имеют вид [1, 2]

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{T}} &= K(\mathbf{Q} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} \mathbf{N}), \quad (L_3^{-1} \dot{\varepsilon}) = (1 - \alpha) \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}, \quad \dot{\delta}_j = k_j \beta \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}_j (\sqrt{\mathbf{T}_j \cdot \mathbf{T}_j})^{-1} \\ (\mathbf{T}_j &\neq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \beta \rightarrow \min, k_j = \pm 1), \end{aligned} \quad (11)$$

где малый скаляр  $K > 0$ , определяемый в эксперименте по двухосному сжатию, не зависит от девиатора  $\mathbf{D}$ ,  $\alpha$  – относительная часть рассеиваемой работы деформации,  $\mathbf{N}$  – вектор внешней нормали к поверхности девиаторного сечения ( $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1$ ). Параметры анизотропии  $\delta_j$ , где  $j \in \{1-10, 22-31, 42, 45, 48, 51-54, 60, 63, 66\}$ , определяются по указанному основному уравнению (11). Скаляр  $\beta$  характеризует рост анизотропии. Его минимизация по всем наборам  $k_j = \pm 1$  обеспечивает необходимую устойчивость расчета в квазистатическом режиме приращений параметров  $\delta_j$  и решает вопрос описания роста анизотропии. Эта вычисленная процедура несложно реализуется с использованием системы определяющих уравнений. Разрабатываемая модель материала связана с позволяющей описывать ряд важных эффектов (например, [15]) конкретной зависимостью: сложным законом упругости Мурнагана, и этот факт приходится учитывать, в частности, при определении величины  $\alpha$  [1].

При значениях  $\mathbf{T}_j = 0$  параметры  $\delta_j$  ( $j = 7, 11, 15$ ) определены в [2] дополнительными уравнениями для ортотропного материала с учетом справедливости всех установленных соотношений в условиях трансверсальной изотропии. Для моноклинного материала эти уравнения обобщаются дальше заменой в них векторов  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ , задающих главные оси анизотропии, на векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ :

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_7 &= (\sqrt{\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}})^{-1} (|\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}| (2\dot{\delta}_3 - \dot{\delta}_8) + \gamma (|\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T}| (2\dot{\delta}_1 - \dot{\delta}_{10}) + |\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T}| (2\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_9))), \\ \dot{\delta}_{11} &= (\sqrt{\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}})^{-1} (|\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T}| (2\dot{\delta}_1 - \dot{\delta}_{10}) + \gamma (|\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T}| (2\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_9) + |\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}| (2\dot{\delta}_3 - \dot{\delta}_8))), \\ \dot{\delta}_{15} &= (\sqrt{\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}})^{-1} (|\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T}| (2\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_9) + \gamma (|\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}| (2\dot{\delta}_3 - \dot{\delta}_8) + |\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T}| (2\dot{\delta}_1 - \dot{\delta}_{10}))). \end{aligned} \quad (12)$$

В задаче простого сдвига один из этих параметров  $\delta_7$  будет определяться по основному уравнению (11), поскольку выполняется условие  $\mathbf{T}_7 \neq 0$ . Два других находятся по (12).

Рассмотрим вопрос об условиях возникновения макротрещины при обобщении материала Мурнагана феноменологической модели моноклинной упругопластической среды. Полученный критерий разрушения естественным образом вытекает из математической модели и существенно отличается от известных критериев.

Предполагаем, что при указанной векторной интерпретации тензора поверхность текучести в пространстве напряжений является конической поверхностью в шестимерном векторном пространстве. Она создается замкнутыми поверхностями своих девиаторных сечений с учетом экспериментальных данных. Особый случай, связанный с вершиной конической поверхности, рассмотрен в [10, 11]. Естественное ограничение на девиаторное сечение состоит в том, что на всей замкнутой поверхности имеет смысл критерий текучести.

Из дифференциального вида определяющего уравнения и требования потенциальности в скоростях напряжений вытекает, что вектор нормали к поверхности девиаторного сечения является собственным вектором данного девиатора-оператора. Для изотропного материала в [16, 17] получены в тензорно-инвариантном виде представления двух возможных векторов нормалей. Эти соотношения используются для определения двух собственных векторов оператора (10), из которых образуются векторы нормалей при анизотропии.

Таким образом, поверхность девиаторного сечения получается соединением в сингулярных точках частей двух регулярных вогнутых поверхностей. Векторы нормалей к ним выбираются из двух собственных векторов критериального девиатора-оператора. В условиях роста анизотропии выбор не всегда возможен, что позволяет связать его с началом разрушения, возникающего согласно опытным данным.

Предполагаем, что разрушение может начаться, когда точка процесса в пространстве напряжений находится на поверхности текучести. Содержащее ее девиаторное сечение назовем текущим. Точку на текущем девиаторном сечении назовем критической, если в ней становится крат-

ным собственное значение оператора, по которому должен определяться собственный вектор, являющийся вектором нормали в регулярной точке сечения, или один из векторов нормалей в сингулярной точке. В этой точке однозначный и обоснованный выбор вектора нормали из бесконечного числа собственных векторов становится невозможным. В силу неопределенности дивергатора  $\mathbf{N}$  критерий текучести теряет смысл. Согласно указанному ограничению, появление критической точки трактуется как возникновение макротрещины. Разрушение происходит в двух случаях: критическая точка на текущем дивергентном сечении отсутствует, но затем в процессе течения она появляется либо там уже существует критическая точка, и точка процесса может совпадать с любой точкой поверхности сечения.

Проверка критерия разрушения значительно усложняется по сравнению с ортотропным материалом [3]. Поиск критической точки должен производиться на всей замкнутой поверхности дивергентного сечения, расположенной в основном трехмерном векторном подпространстве  $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3\}$ , натянутом на векторы  $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3$ . Плоскость  $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2\}$  будем также называть основной. Поиск удобно проводить по кривым пластичности, расположенным в плоскостях, полученных поворотом основной плоскости вокруг вектора  $\mathbf{W}_1$  на угол от 0 до  $\pi$ . Для ортотропного материала использовалась только кривая, лежащая в основной плоскости, поскольку триэдр  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$  задавал главные оси анизотропии. Аналогичным образом задаем знакопеременную функцию  $f(\varphi) = \prod_{k=3,4,5} (3((\lambda_1 - \lambda_k)^2 + (\lambda_2 - \lambda_k)^2))^{-1} (\lambda_1 - \lambda_k)(\lambda_2 - \lambda_k)$ , где  $\lambda_k$  – собственные значения матричного дивергатора-оператора ( $\lambda_4 = p_{10}, \lambda_5 = p_{11}$ ),  $\lambda_1, \lambda_2$  соответствуют двум собственным векторам, из которых выбираются векторы нормалей к поверхности дивергентного сечения, первый множитель в выражении под знаком произведения выбран для нормировки.

Угол  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ) отвечает положению точки на кривой пластичности с учетом ее замкнутости. Функция  $f$  вычисляется в точках кривой пластичности. Появление нуля функции на каком-то регулярном участке кривой еще не означает, что рассматриваемая точка является критической. Для изотропного материала критическая точка всегда отсутствует. Собственный вектор, который является вектором нормали, определяется в этом случае по простому собственному значению. Нули функции  $f$  на этом участке кривой являются допустимыми для любого материала, поскольку вектор нормали при анизотропии выбирается из условия близости к вектору нормали для изотропного материала на соответствующем участке кривой. Проверка критерия сводится к сравнению функций на регулярных участках соответствующих кривых для изотропного и анизотропного материалов. Проверяется возможный переход нуля функции на соседний участок, означающий появление критической точки. При построении кривых используются подпространства  $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_i\}$  ( $i = 3, 4, 5$ ) и плоскость  $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2\}$ , являющаяся их пересечением. Учитывается величина эффекта Баушингера.

Рассмотрена задача простого сдвига в предположении, что материал является идеально пластическим. Использованы данные по вольфраму [8]. Нагружение выполнено до момента разрушения. Начальное при течении и конечное при разрушении значения параметра сдвига составили соответственно 0,0024 и 0,003645. Величина эффекта Баушингера выбрана равной единице. При численном моделировании одноосного и двухосного сжатия выбраны коэффициенты  $\gamma = 2,8$  и  $K = 0,00003$ . Величина скаляра  $\alpha$  составляет 0,999996. Точка процесса расположена в плоскости, повернутой на угол  $\pi/2 + \varepsilon$  ( $\varepsilon = 0,0008$ ) вблизи сингулярной точки, величина параметра Лоде равна 0,17. На рис. 1, 2 показаны дивергентные сечения поверхности текучести в трех важных подпро-

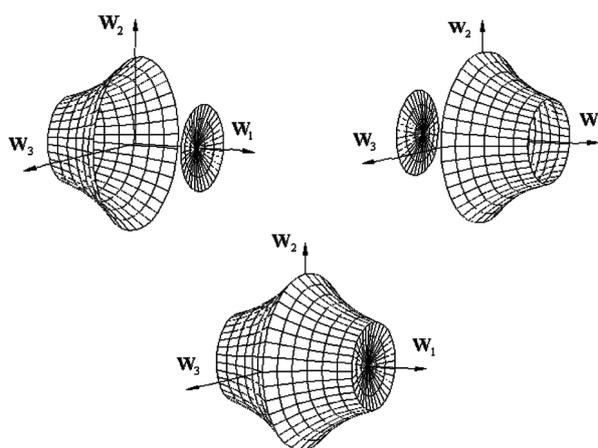


Рис. 1. Образование основной поверхности дивергентного сечения поверхности текучести в трехмерном подпространстве  $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3\}$

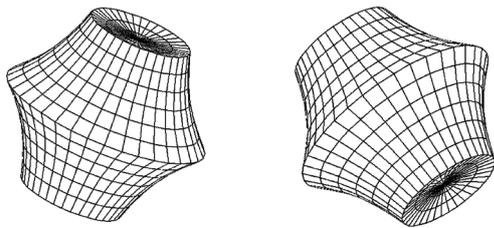


Рис. 2. Поверхности девиаторного сечения поверхности текучести в трехмерных подпространствах  $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_4\}$ ,  $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_5\}$  получаются поворотом основной поверхности соответственно на углы  $2\pi/3$ ,  $4\pi/3$  по часовой стрелке вокруг вектора, являющегося векторным произведением первых двух базисных векторов

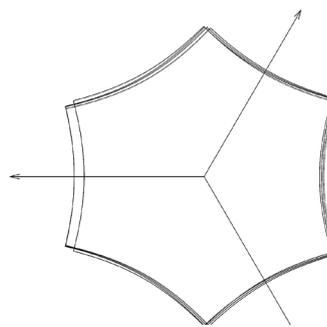


Рис. 3. Кривые пластичности для изотропного материала и для анизотропного материала в плоскостях, полученных поворотом основной плоскости вокруг первого базисного вектора подпространства девиаторов напряжений

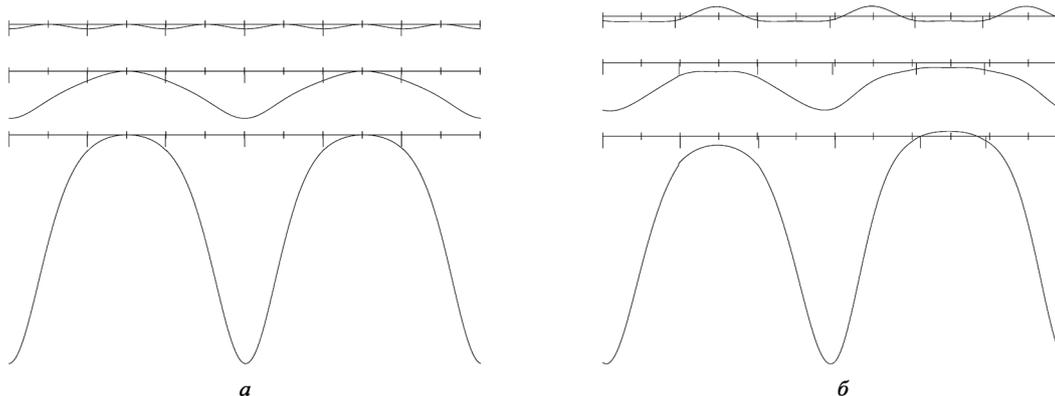


Рис. 4. Графики функции  $f$  при повороте вокруг вектора  $\mathbf{W}_1$  плоскости  $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2\}$  на углы  $0$ ,  $\pi/4$ ,  $\pi/2$ :  $a$  – изотропный материал,  $b$  – анизотропный материал

странствах девиаторов. На рис. 3 изображены кривые пластичности в повернутых плоскостях, полученные совмещением в плоскости  $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2\}$ , где стрелками указаны проекции базисных диад  $\mathbf{c}_i \mathbf{c}_i$  (проекция  $\mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2$  направлена вверх, проекция  $\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1$  направлена вниз). Кривая для изотропного материала близка к границе правильного шестиугольника, выражающей условие пластичности А. Ю. Ишлинского. Изменения кривых незначительны, поскольку материал является малопластичным. Графики функции  $f(\varphi)$  для кривых пластичности в повернутых плоскостях при обходе по часовой стрелке из верхней сингулярной точки приведены на рис. 4. На оси абсцисс отмечены малые и большие вертикальные штрихи, соответствующие приращениям угла  $\pi/6$  и сингулярным точкам кривых. При поворотах на угол более  $\pi/2$  наблюдается приближительная симметрия графиков относительно значения прямого угла. Для анизотропного материала в малой окрестности угла поворота  $\pi/4$  нули функции отсутствуют. Слева от этой окрестности имеются нули на втором участке, а справа – нули на пятом участке кривой пластичности. При угле поворота  $\pi/2$  на пятом участке наблюдается выход нуля функции на соседний четвертый участок, т. е., согласно изложенному критерию, происходит разрушение материала вследствие роста анизотропии при пластической деформации.

### Список использованной литературы

1. Швед, О. Л. Модель нелинейно упругопластического материала / О. Л. Швед // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2014. – № 1. С. 63–68.
2. Швед, О. Л. О возможных определяющих соотношениях нелинейной упругопластичности / О. Л. Швед // Тр. VII Всерос. (с международным участием) конф. по механике деформируемого твердого тела. г. Ростов-на-Дону, 2013. – Ростов-на-Дону, 2013. – Т. II. – С. 219–223.
3. Швед, О. Л. Определяющие соотношения ортотропного упругопластического материала / О. Л. Швед // Тр. VII Всерос. (с международным участием) конф. по механике деформируемого твердого тела. г. Ростов-на-Дону, 2013. – Ростов-на-Дону, 2013. – Т. II. – С. 224–228.

4. Левитас, В. И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении / В. И. Левитас. – Киев: Наукова думка, 1987.
5. Белл, Дж. Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. II. Конечные деформации / Дж. Ф. Белл. – М., 1984.
6. Жилин, П. А. Основные уравнения неупругих сред / П. А. Жилин // Актуальные проблемы механики: Тр. XXVIII летней школы. – СПб., 2001. – С. 14–58.
7. Жилин, П. А. Математическая теория неупругих и сыпучих сред / П. А. Жилин // Успехи механики. – 2003. – Т. 2, № 4. – С. 3–36.
8. Лурье, А. И. Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М., 1980.
9. Murnaghan, F. D. Finite deformation of an elastic solid / F. D. Murnaghan. – N. Y., 1951.
10. Швед, О. Л. Критерий разрушения в модели упругопластической среды / О. Л. Швед // Тр. XVII международной конф. «Современные проблемы механики деформируемого твердого тела». г. Ростов-на-Дону, 2014. – Ростов-на-Дону, 2014. – Т. II. – С. 220–223.
11. Швед, О. Л. Критерий разрушения в модели нелинейно упругопластической среды / О. Л. Швед // Наука и техника. – БНТУ, 2014. № 6. – С. 59–63.
12. Поздеев, А. А. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения / А. А. Поздеев, П. В. Трусов, Ю. И. Няшин. – М., 1986.
13. Швед, О. Л. Представление закона Мурнагана для использования в определяющих соотношениях упругопластичности / О. Л. Швед // Информатика. – 2011. – № 3 (31). – С. 57–67.
14. Швед, О. Л. Определение тензора упругого спина в нелинейной теории пластичности / О. Л. Швед // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2009. – № 1. – С. 52–58.
15. Швед, О. Л. Численное моделирование эффекта увеличения пластичности металла при растяжении под действием высокого гидростатического давления / О. Л. Швед // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2014. – № 4. – С. 18–23.
16. Швед, О. Л. Вопросы обобщения нелинейной модели упругости на упругопластичность / О. Л. Швед // Матер. VIII Всерос. конф. по механике деформируемого твердого тела. г. Чебоксары, 2014. – Чебоксары, 2014. – Ч. II. – С. 225–227.
17. Швед, О. Л. Определение девиаторного сечения поверхности текучести при математическом моделировании упругопластического поведения материалов / О. Л. Швед // Информатика. – 2014. – № 2 (41). – С. 49–57.

Поступило в редакцию 15. 01. 2015