

ЭНЕРГЕТИКА, ТЕПЛО- И МАССООБМЕН

УДК 536.2(075)46

В. А. КОТ

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК В ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛА ТЕПЛООВОГО БАЛАНСА

*Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: valery.kot@hmti.ac.by*

На основе систем из тождественных равенств, образованных $2n$ -кратными интегралами от искомой температурной функции и интегральными граничными характеристиками, получены аналитические решения краевой задачи нестационарной теплопроводности для протяженной пластины с граничным условием первого рода. По точности и сходимости решений предложенный метод превосходит на несколько порядков известные интегральные методы.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, приближенный метод, интегральные тождества, фронт возмущения.

V. A. KOT

A METHOD OF BOUNDARY CHARACTERISTICS BASED ON THE HEAT-BALANCE INTEGRAL IN HEAT-CONDUCTION PROBLEMS

*A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: valery.kot@hmti.ac.by*

On the basis of systems of identical equalities formed by $2n$ -multiple integrals of the desired temperature function and integral boundary characteristics, analytical solutions of the boundary problem on the nonstationary heat conduction of an extended plate with the first-kind boundary conditions have been obtained. The method proposed surpasses the known integral methods in accuracy and convergence of solutions by several orders of magnitude.

Keywords: heat conduction equation, approximate method, integral identities, front of a disturbance.

Введение. Интегральный метод теплового баланса (Heat Balance Integral Method – HBIM) [1] является одним из наиболее мощных и эффективных методов приближенного решения задач тепломассопереноса. Среди других приближенных методов, например, таких как численные методы [2, 3], метод возмущений [4], метод луча [5] и др., HBIM занимает достойное место. Концепция метода заключается в следующем: в результате теплового воздействия на тело в нем образуется область с фронтом возмущения $R(t)$, за пределами которой температура тела $T(x, t)$ (либо иная полевая функция) остается неизменной. Первая стадия процесса заканчивается при достижении движущейся границей фронта возмущения центра симметрии тела либо противоположной поверхности, либо встречного фронта в некоторый определенный момент времени $t = t_1$. На второй стадии изменение температуры происходит уже по всему объему. Разделение процесса на две взаимосвязанные стадии позволяет существенно упростить решение с расширением спектра аналитически решаемых задач. В HBIM с помощью простых полиномов возможно приближенное аналитическое описание многих достаточно сложных задач. Это относится и к тем задачам, которые либо не поддаются точным решениям, либо решения приобретают настолько сложный вид, что становятся практически непригодны. В то же время полиномиальное описание температурного поля гарантирует простоту анализа решений и предоставляет отличные возможности для решения обратных задач либо в случае, когда тепловая задача является лишь промежуточной стадией в описании какого-либо иного процесса.

В аналитической теории теплопроводности методы, в которых используется понятие *фронта температурного возмущения*, имеют широкий спектр разных подходов: НВИМ, метод эквивалентных источников [6], методы М. Био [7], Г. И. Баренблатта [8], А. А. Дородницына [9] и др. Применение данных методов чрезвычайно широко: от линейных и нелинейных задач нагрева тел с нелинейными (а также с зависящими от времени) граничными условиями до задач с фазовыми переходами (так называемые стефановские задачи); от задач ламинарного обтекания пластины до задач течения жидкостей в каналах и гидродинамики неньютоновских жидкостей и т. д. [10].

Главным недостатком интегральных методов, использующих понятие фронта возмущения, является их относительно низкая точность. В первую очередь, это связано с тем, что в основу этих методов положено построение интеграла теплового баланса, что равнозначно осреднению исходного дифференциального уравнения в пределах фронта возмущения. Имеется несколько разных подходов для решения проблемы точности НВИМ. Это, в частности, RIM (Refined Integral Method) [11, 12], CIM (Combined Integral Method) [13], *схема Майера – Лангфорда* [14, 15], оптимизация формы аппроксимирующего полинома [16–18], метод дополнительных граничных условий [19–23]. Однако получаемые данными методами решения, как правило, затрагивают лишь самые простые случаи: медленно и монотонно изменяющееся во времени тепловое воздействие, отсутствие существенных нелинейностей и т. д. Когда же внешнее возмущение характеризуется большими скоростями или носит сложновременный характер, то данные решения, как правило, характеризуются весьма существенными ошибками. Представляется важной задача перевода интегрального метода, основанного на фронте возмущения, на качественно иной уровень, когда приближенные аналитические решения близко примыкают к численным и даже точным решениям, причем независимо от характера и скорости изменения возмущающего воздействия.

Постановка задачи. В качестве примера найдем решение задачи нестационарной теплопроводности для бесконечной пластины в следующей математической постановке:

$$\frac{\partial T(\rho, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(\rho, t)}{\partial \rho^2}, \quad t > 0, \quad 0 \leq \rho < 1, \quad (1)$$

$$T(\rho, 0) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \rho}(0, t) = 0, \quad T(1, t) = h(t), \quad (3)$$

где $T = (\bar{T} - \bar{T}_0) / \Delta T$ – относительная избыточная температура, \bar{T} – температура, \bar{T}_0 – начальная температура, $T(1, t) = (\bar{T}_1 - \bar{T}_0) / \Delta T$, \bar{T}_1 – температура поверхности пластины, ΔT – температурный масштаб, $t = \bar{t} / \tau$, $\tau = L^2 / \kappa$, $\rho = y / L$ – безразмерная координата, \bar{t} – время, κ – коэффициент теплопроводности, L – половина толщины пластины, y – пространственная координата.

В соответствии с общей концепцией рассматриваемых интегральных методов разделим весь тепловой процесс на две стадии. Будем предполагать, что на первой стадии происходит постепенное продвижение фронта прогрева $\delta(t) = 1 - R(t) / L$ в глубь пластины вплоть до момента достижения ее центра симметрии. Тогда область, которая находится за пределами фронта возмущения ($0 \leq \rho < 1 - \delta(t)$), сохраняет исходную температуру. На второй стадии процесса пластина постепенно прогревается по всему сечению.

Первая стадия процесса в первом приближении. Переходя к новой координате $x = 1 - \rho$, отсчитываемой от поверхности пластины, краевую задачу для первой стадии процесса записываем в следующем виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad 0 < x < \delta(t), \quad (4)$$

$$T(x, 0) = 0, \quad (5)$$

$$T(0, t) = h(t). \quad (6)$$

Условия на фронте возмущения принимают вид

$$T(\delta(t), t) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x}(\delta(t), t) = 0. \quad (7)$$

Представим искомый температурный профиль в виде полинома N -й степени

$$T = h(t) + \sum_{j=1}^N a_j(t) \left(\frac{x}{\delta(t)} \right)^j. \quad (8)$$

Запишем известное решение, которое использует краевые условия (5)–(7) и интеграл теплового баланса Т. Гудмена [1]:

$$\int_0^{\delta(t)} \frac{\partial T}{\partial t} = \int_0^{\delta(t)} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = - \frac{\partial T(0, t)}{\partial x}. \quad (9)$$

В случае представления решения в виде полинома второй степени при $h(t) = 1$ имеем [1]

$$T(x, t) = \left(1 - \frac{x}{\delta(t)} \right)^2. \quad (10)$$

Подставив выражение (10) в формулу (9) и введя переменную $\sigma(t) = \delta(t)^2$, получим $\sigma'(t) = 12$. Отсюда при начальном условии $\sigma(0) = 0$ находим $\sigma(t) = 12t$. В итоге приходим к искомому решению для первой стадии процесса в первом приближении [1]

$$T(x, t) = \left(1 - x/\sqrt{12t} \right)^2. \quad (11)$$

Положив $\sigma(t_1) = \delta(t_1) = 1$, найдем время окончания первой стадии: $t_1 = 1/12 \approx 0,08333$. Результаты расчета, согласно (13), в сравнении с точным решением [24] приведены на рис. 1, а. Отклонения безразмерных температур, найденных по приближенной формуле (11), от точных значений достигают существенных величин. Для повышения точности аппроксимационного решения необходимо увеличить степень полинома. Тогда для определения новых полиномиальных коэффициентов требуется соответствующие дополнительные уравнения. Ниже приведена схема, обеспечивающая получение сколь угодно числа таких дополнительных уравнений. В ее основе заложена идея применения *интегральных граничных характеристик*.

Интегральные граничные характеристики. Последовательность тождественных равенств для первой стадии процесса. Прежде дадим следующее определение.

Определение. Интегральные граничные характеристики краевой задачи для дифференциального уравнения (4) с граничным условием $\alpha_1 T(0, t) + \alpha_2 \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = h(t)$ ($\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$) есть эле-

менты последовательности $\Gamma_n(t) = \int_0^t \dots \int_0^t h(t) dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$.

Введем в рассмотрение интегральные операторы, определяемые последовательностью

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_1^x \equiv \int_{\delta(t)\delta(t)}^x \int_{\delta(t)\delta(t)}^x (\dots) dx^2, \quad \mathcal{L}_2^x \equiv \int_{\delta(t)\delta(t)}^x \int_{\delta(t)\delta(t)}^x dx^2 \int_{\delta(t)\delta(t)}^x \int_{\delta(t)\delta(t)}^x (\dots) dx^2, \dots \\ \dots \mathcal{L}_n^x \equiv \int_{\delta(t)\delta(t)}^x \int_{\delta(t)\delta(t)}^x dx^2 \dots \int_{\delta(t)\delta(t)}^x \int_{\delta(t)\delta(t)}^x (\dots) dx^2 \end{array} \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (12)$$

В дополнение к граничным характеристикам (12) введем последовательность из интегральных операторов с конечным интервалом интегрирования $x \in [0, \delta(t)]$:

$$\left\{ \mathcal{L}_1 \equiv \int_{\delta(t)\delta(t)}^0 \int_{\delta(t)\delta(t)}^x (\dots) dx^2, \quad \mathcal{L}_2 \equiv \int_{\delta(t)\delta(t)}^0 \int_{\delta(t)\delta(t)}^x dx^2 \int_{\delta(t)\delta(t)}^x \int_{\delta(t)\delta(t)}^x (\dots) dx^2, \dots \mathcal{L}_n \equiv \int_{\delta(t)\delta(t)}^0 \int_{\delta(t)\delta(t)}^x dx^2 \dots \int_{\delta(t)\delta(t)}^x \int_{\delta(t)\delta(t)}^x (\dots) dx^2 \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (13)$$

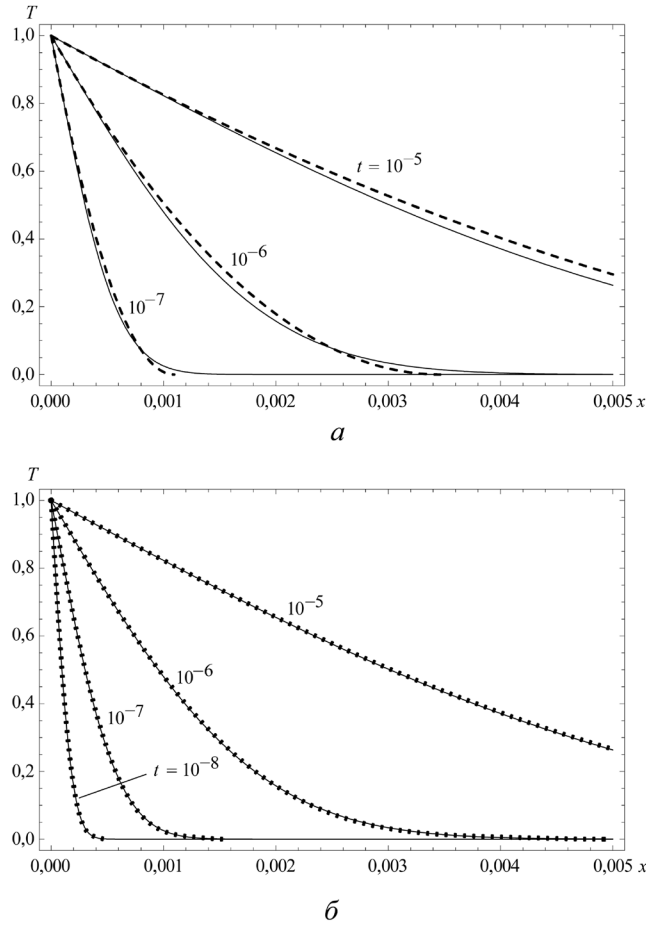


Рис. 1. Приближенные температурные профили в различные моменты времени в сравнении с точным решением (сплошные линии): а – расчет по формуле (11) (штриховые линии); б – расчет по формуле (28) (пунктир) ($N = 5$)

Применим оператор \mathcal{L}_1^x к уравнению (4). Так как $T(x,t)$ – непрерывная аналитическая функция, то в силу теоремы Лейбница и условий (7) для левой части уравнения (4) имеем

$$\mathcal{L}_1^x \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{d}{dt} \mathcal{L}_1^x T + \frac{d\delta(t)}{dt} T(\delta(t), t) \int_{\delta(t)}^x dx = \frac{d}{dt} \int_{\delta(t)}^x dx \int_{\delta(t)}^x T dx = \frac{d}{dt} \mathcal{L}_1^x T. \quad (14)$$

Для области интегрирования $x \in [\delta(t), 0]$, основываясь на уравнениях (13) и (14), получаем

$$\mathcal{L}_1^x \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{x=0} = \frac{d}{dt} \mathcal{L}_1^x T \Big|_{x=0}. \quad (15)$$

Используя интегральный оператор \mathcal{L}_1^x к правой части уравнения (4), в силу условий на фронте возмущения (7) имеем

$$\mathcal{L}_1^x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \int_{\delta(t)}^x dx \int_{\delta(t)}^x \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) dx = \int_{\delta(t)}^x \left(\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial T(\delta(t), t)}{\partial x} \right) dx = T - T(\delta(t), t) = T. \quad (16)$$

Отсюда из соотношений (4), (15) и (16) следует уравнение

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_1^x T = T. \quad (17)$$

Применив уравнение (17) в точке $x = 0$, с учетом граничного условия (6) получим уравнение

$$\left. \frac{d}{dt} \mathcal{L}_1^x T \right|_{x=0} = \frac{d}{dt} \mathcal{L}_1 T = h(t). \quad (18)$$

Проинтегрировав уравнение (18) при начальном условии (5), приходим к интегральному тождеству

$$\mathcal{L}_1 T \equiv \Gamma_1(t). \quad (19)$$

Далее применим интегральный оператор \mathcal{L}_1^x к уравнению (17). С учетом граничных характеристик (12), теоремы Лейбница и условий (7) получим

$$\mathcal{L}_1^x \frac{d}{dt} \mathcal{L}_x T = \frac{d}{dt} \mathcal{L}_1^x \mathcal{L}_1^x T = \frac{d}{dt} \underbrace{\mathcal{L}_1^x \mathcal{L}_1^x}_2 T = \mathcal{L}_2^x T, \quad (20)$$

где $\underbrace{\mathcal{L}_1^x \mathcal{L}_1^x}_2 T = \int_{\delta(t)}^x dx \int_{\delta(t)}^x dx \int_{\delta(t)}^x dx \int_{\delta(t)}^x T dx$. Для $x=0$ при использовании условия (6) из (19) и (20) следует уравнение

$$\left. \frac{d}{dt} \underbrace{\mathcal{L}_1^x \mathcal{L}_1^x}_2 T \right|_{x=0} = \frac{d}{dt} \mathcal{L}_2 T = \mathcal{L}_1^x T \Big|_{x=0} = \mathcal{L}_1 T \equiv \Gamma_1(t). \quad (21)$$

Его интегрирование при начальном условии (5) приводит к тождественному равенству

$$\mathcal{L}_2 T \equiv \Gamma_2(t). \quad (22)$$

Аналогичным образом может быть получено третье интегральное тождество вида

$$\mathcal{L}_3 T \equiv \Gamma_3(t). \quad (23)$$

Основываясь на вышеизложенном, приходим к следующей последовательности, которую образуют $2n$ -кратные интегралы от искомой температурной функции и интегральные граничные характеристики:

$$\{\mathcal{L}_n T \equiv \Gamma_n(t)\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (24)$$

где $\mathcal{L}_n T = \underbrace{\int_{\delta(t)}^0 dx \int_{\delta(t)}^x dx \dots \int_{\delta(t)}^x dx \int_{\delta(t)}^x dx \int_{\delta(t)}^x dx \int_{\delta(t)}^x T dx}_{n}$ $= \int_{\underbrace{0}_{2n}}^0 \dots \int_{\underbrace{0}_{2n}}^x \int_{\underbrace{0}_{2n}}^x T dx^n$, $\Gamma_n(t) = \int_{\underbrace{0}_{n}}^t \dots \int_{\underbrace{0}_{n}}^t h(t) dt^n$.

Первая стадия процесса в последующих приближениях. Используя соотношения (21)–(24), можно получить недостающие три уравнения для определения коэффициентов полинома пятой степени. В частности, при $h(t) = 1$ получим следующее выражение:

$$T(x, t) = \left(1 - \frac{x}{\delta(t)} \right)^2 \left(1 + \sum_{j=1}^3 a_j(t) \left(\frac{x}{\delta(t)} \right)^j \right), \quad (25)$$

где

$$a_1(t) = \frac{3675}{8} \frac{t}{\delta(t)^2} - \frac{19845}{2} \frac{t^2}{\delta(t)^4} + 86625 \frac{t^3}{\delta(t)^6} - \frac{143}{16},$$

$$a_2(t) = -\frac{6405}{4} \frac{t}{\delta(t)^2} + 40635 \frac{t^2}{\delta(t)^4} - 381150 \frac{t^3}{\delta(t)^6} + \frac{169}{8},$$

$$a_3(t) = \frac{10395}{8} \frac{t}{\delta(t)^2} - \frac{72765}{2} \frac{t^2}{\delta(t)^4} + 363825 \frac{t^3}{\delta(t)^6} - \frac{231}{16}.$$

Подставляя (25) в интеграл теплового баланса (9), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно $\sigma(t) = \delta(t)^2$:

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = 168 \frac{19800t^3 - 1872t^2 \sigma(t) + 69t \sigma(t)^2 - \sigma(t)^3}{55440t^3 - 4536t^2 \sigma(t) + 126t \sigma(t)^2 - \sigma(t)^3}. \quad (26)$$

Для $h(t)=1$ температурный фронт, как известно, подчиняется закону «квадратного корня» [например, 1, 4, 6, 16, 18], что дает основание записать $\sigma(t) = \alpha t$. Отсюда уравнение (26) преобразуется в обыкновенное алгебраическое уравнение

$$\alpha^4 - 294\alpha^3 + 16128\alpha^2 - 369936\alpha + 3326400 = 0. \quad (27)$$

Уравнение (27) имеет два действительных корня: $\alpha = 24,10645$ и $\alpha = 230,7940$. Исходя из принципа наибольшей близости к величине 12, стоящей в выражении (11) с функцией $\sigma(t) = 12t$, выбираем первый корень $\alpha = 24,10645$, что дает $\delta(t) = \sqrt{24,10645t}$. Положив $\sigma(t_1) = \delta(t_1) = 1$, найдем время окончания первой стадии $t_1 = 0,04148$. Подстановка функции $\delta(t)$ в (25) даст решение

$$T(x,t) = \left(1 - 0,203673 \frac{x}{\sqrt{t}}\right)^2 \left(1 - 0,157343 \frac{x}{\sqrt{t}} - 0,107104 \frac{x^2}{t} + 0,02389216 \frac{x^3}{t^{3/2}}\right). \quad (28)$$

Для полинома восьмой степени следующие два уравнения будут

$$\mathcal{L}_4^0\{T\} \equiv \Gamma_4(t), \quad \mathcal{L}_5^0\{T\} \equiv \Gamma_5(t). \quad (29)$$

В качестве третьего уравнения воспользуемся условием, введенным в расчетную практику Т. Гудменом [1] и отражающим выполнение дифференциального уравнения теплопроводности в точке $x = 0$, откуда получим

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{x=0} = \frac{dh(t)}{dt} = 0. \quad (30)$$

Тождественные равенства (21)–(23), (29) совместно с уравнением (30) позволяют определить восемь коэффициентов $a_j(t)$, $j = 1, 8$, температурного профиля (8). В данном случае решение будет следующим:

$$T(x,t) = 1 - 0,56422 \frac{x}{\sqrt{t}} + 0,0467173 \frac{x^3}{t^{3/2}} + 0,00231282 \frac{x^4}{t^2} - 0,0066571 \frac{x^5}{t^{5/2}} + \\ + 0,0017066 \frac{x^6}{t^3} - 0,000181 \frac{x^7}{t^{7/2}} + 7,224365 \cdot 10^{-6} \frac{x^8}{t^4}. \quad (31)$$

При этом $\delta(t) = \sqrt{36,20416t}$. Время окончания первой стадии процесса $t_1 = 0,0276$.

Результаты расчетов температуры, согласно формуле (31), для $N = 5$ в сравнении с точным решением [24] приведены на рис. 1, б. Отличие приближенного решения от точного при $t < 0,04148$ не превышает 0,3%. Для температурного профиля (31) с полиномом $N = 8$ максимальное отклонение приближенного решения от точного уменьшается (по сравнению с предыдущим значением) почти на порядок, составляя около 0,03%. Отметим, что в известном методе дополнительных граничных условий [21] получаем при той же степени полинома $N = 8$ максимальное отклонение примерно 0,75%. Проведенный анализ показал, что для достижения точности аппроксимационного решения, достигаемой предлагаемым методом при полиноме пятой степени, в известном методе дополнительных граничных условий требуется полином 29-й степени, а для достижения примерной точности, которая отвечает предложенному методу при $N = 8$, в методе дополнительных граничных условий необходимы полиномы с $N > 100$. Как показывают расчеты, при описании температуры полиномом 14-й степени точность интегрального метода граничных характеристик превосходит точность интегрального метода дополнительных граничных условий более чем на три порядка. Таким образом, введение тождественных равенств (24)

с системой граничных характеристик $\Gamma_n(t)$ позволяет самым кардинальным образом повысить точность аппроксимационного решения краевой задачи (4)–(7).

Вторая стадия процессов в первом приближении. Как отмечалось, интегральный метод граничных характеристик применим и для второй стадии процесса, чему отвечает $t > t_1$. В этом случае фронт температурного возмущения теряет смысл, тогда его заменяет температура в центре сечения пластины $T(1, t) = q(t)$. В данном случае математическая постановка задачи выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad t_1 > t, \quad 0 < x \leq 1, \quad (32)$$

$$T(0, t) = 1, \quad T(1, t) = q(t), \quad \frac{\partial T(1, t)}{\partial x} = 0. \quad (33)$$

Задания начального условия не требуется, поскольку распределения температур для первой и второй стадий для момента времени $t = t_1$ полностью совпадают.

Решение задачи (32)–(33) определим полиномом

$$T(x, t) = 1 + \sum_{j=1}^N b_j(t) x^j. \quad (34)$$

При $N = 2$ коэффициенты $b_{1,2}(t)$ определим из условий (33): $b_1(t) = 2(q(t) - 1)$, $b_2(t) = 1 - q(t)$. Применив к уравнению (32) интеграл теплового баланса

$$\int_0^1 \frac{\partial T}{\partial t} dx = \frac{d}{dt} \int_0^1 T dx = -\frac{\partial T(1, t)}{\partial x}, \quad (35)$$

получим обыкновенное дифференциальное уравнение $q' + 3q = 3$, решение которого при начальном условии $q(t_1) = 0$ имеет вид $q(t) = 1 - \exp[-3(t - t_1)]$. Отклонение приближенного решения от точного в данном случае достигает 8–9% [21]. Для повышения точности аппроксимационного решения увеличим степень полинома с привлечением дополнительных уравнений. Таковыми являются уравнения, образующие ниже доказанную последовательности из тождественных равенств.

Последовательность тождественных равенств для второй стадии процесса. Введем в рассмотрение интегральные операторы

$$\left\{ \mathcal{M}_1^x \equiv \int_1^{xx} \int_1^{xx} (\dots) dx^2, \mathcal{M}_2^x \equiv \int_1^{xx} \int_1^{xx} dx^2 \int_1^{xx} \int_1^{xx} (\dots) dx^2, \dots, \mathcal{M}_n^x \equiv \int_1^{xx} \int_1^{xx} dx^2 \dots \int_1^{xx} \int_1^{xx} (\dots) dx^2 \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (36)$$

В дополнение к этому введем также две последовательности, составленные из интегральных операторов:

$$\left\{ \mathcal{M}_1 \equiv \int_1^{\overbrace{0x}^1} \int_1^{xx} (\dots) dx^2, \mathcal{M}_2 \equiv \int_1^{\overbrace{0x}^2} \int_1^{xx} dx^2 \int_1^{xx} \int_1^{xx} (\dots) dx^2, \dots, \mathcal{M}_n \equiv \int_1^{\overbrace{0x}^n} \int_1^{xx} dx^2 \dots \int_1^{xx} \int_1^{xx} (\dots) dx^2 \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (37)$$

$$\left\{ G_n(t) \equiv \int_{t_1}^{\overbrace{t}^n} dt \dots \int_{t_1}^t q(t) dt = \int_{t_1}^{\overbrace{t}^n} \int_{t_1}^{\overbrace{t}^n} q(t) dt^n \right\}, \quad n = -1, 0, 1, 2, \dots, \quad (38)$$

где $G_{-1}(t) = \frac{dq(t)}{dt}$, $G_0(t) = q(t)$.

Левая часть уравнения (4) с учетом оператора \mathcal{M}_1^x имеет вид

$$\mathcal{M}_1^x \frac{\partial T}{\partial t} = \int_1^{xx} \int_1^{xx} \frac{\partial T}{\partial t} dx^2 = \frac{\partial}{\partial t} \int_1^{xx} T dx^2 = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}_1^x T. \quad (39)$$

Применив оператор \mathcal{M}_1^x к правой части уравнения (4), с учетом условий (33) имеем

$$\mathcal{M}_1^x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \int_1^x \int_1^x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx^2 = \int_1^x \left(\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} \right) dx = T - q(t). \quad (40)$$

Отсюда приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}_1^x T = T - q(t). \quad (41)$$

Тогда на основе уравнений (40) и (41) запишем

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M}_1^x T \Big|_{x=0} = \frac{d}{dt} \mathcal{M}_1 T = T(0,t) - q(t) = h(t) - q(t). \quad (42)$$

Интегрируя (42) с учетом начального условия (5), получаем

$$\mathcal{M}_1 T = \int_0^t h(t) dt - \int_0^t q(t) dt + C. \quad (43)$$

Исходя из концепции фронта возмущения, предполагающей сохранение начального условия при $x \in [\delta(x), 1]$, для граничной функции $q(t)$ имеем $q(t) = T(1,t) = 0$, $0 < t \leq t_1$, тогда уравнение (43) следующее:

$$\mathcal{M}_1 T = \int_0^t h(t) dt - \int_{t_1}^t q(t) dt + C. \quad (44)$$

Постоянную интегрирования C найдем из условия, вытекающего из первой стадии процесса для момента $t = t_1$. Принимая во внимание идентичность условий задач для первой и второй стадий при $t = t_1$, а также выполнение очевидного тождественного равенства

$$\mathcal{M}_n \equiv \mathcal{L}_n^{\delta(t)} \Big|_{x=1} = \mathcal{L}_n^{\delta(t_1)} = \mathcal{L}_n^1, \quad (45)$$

из уравнения (44) для $t = t_1$ следует

$$\mathcal{M}_1 T \Big|_{t=t_1} = \mathcal{L}_1 T \Big|_{t=t_1} = \int_0^{t_1} h(t) dt = \Gamma_1(t_1). \quad (46)$$

Отсюда запишем

$$\mathcal{M}_1 T \Big|_{t=t_1} = \Gamma_1(t_1) - \int_{t_1}^{t_1} q(t) dt + C = \Gamma_1(t_1) + C, \quad (47)$$

что дает $C = 0$. Тогда на основании уравнений (45)–(47) окончательно получим тождественное равенство

$$\mathcal{M}_1 T \equiv \Gamma_1(t) - G_1(t). \quad (48)$$

Применим к дифференциальному уравнению (4) оператор \mathcal{M}_2^x . Используя уравнение (19), имеем для левой части (4)

$$\mathcal{M}_2^x \frac{\partial T}{\partial t} = \mathcal{M}_1^x \mathcal{M}_1^x \frac{\partial T}{\partial t} = \mathcal{M}_1^x \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}_1^x T = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}_2^x T. \quad (49)$$

Для правой части уравнения (4) с учетом условий (33) находим

$$\mathcal{M}_2^x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \mathcal{M}_1^x \left\{ \mathcal{M}_1^x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right\} = \mathcal{M}_1^x \{T - q(t)\} = \mathcal{M}_1^x T - \mathcal{M}_1^x q(t) = \mathcal{M}_1^x T - q(t) \mathcal{M}_1^x \{1\}. \quad (50)$$

Из (4), (49) и (50) получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}_2^x T = \mathcal{M}_1^x T - \mathcal{M}_1^x \{1\} q(t), \quad (51)$$

$$\left\{ \mathcal{M}_n T \equiv \Gamma_n(t) - \sum_{i=1}^n k_i G_i(t) \right\}_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+, \quad (62)$$

где $k_i = \mathcal{M}_{n-i} \{1\} = \int_1^{0x} \int_1^{0x} \dots \int_1^{0x} dx^2 \dots \int_1^{0x} dx^2$. Проведя для $\mathcal{M}_{n-i} \{1\}$ $2n$ -кратное интегрирование, вместо (64) получаем

$$\left\{ \mathcal{M}_n T \equiv \Gamma_n(t) - \sum_{i=1}^n \frac{G_i(t)}{(2n-2i)!} \right\}_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+. \quad (63)$$

Интегральные тождества, образующие последовательность (63), объединяют интегральные граничные характеристики $\Gamma_n(t)$, $2n$ -кратные интегралы от искомой температурной функции по всей области определения $x \in [0,1]$ и спектр характеристик $\{G_n(t)\}_n$ для граничной функции $q(t)$.

Вторая стадия процесса в последующих приближениях. Вернемся к рассмотрению задачи (32)–(33) с представлением температурного профиля в виде полинома пятой степени. В этом случае из (63) сразу запишем три дополнительных уравнения:

$$\begin{aligned} \int_1^{0x} \int_1^{0x} T(x,t) dx^2 &= \Gamma_1(t) - G_1(t), & \int_1^{0x} \int_1^{0x} \int_1^{0x} T(x,t) dx^4 &= \Gamma_2(t) - G_2(t) - \frac{1}{2} G_1(t), \\ \int_1^{0x} \int_1^{0x} \int_1^{0x} \int_1^{0x} T(x,t) dx^6 &= \Gamma_3(t) - G_3(t) - \frac{1}{2} G_2(t) - \frac{1}{24} G_1(t). \end{aligned} \quad (64)$$

Найдем из граничных условий (33) и уравнений (64) коэффициенты $b_j(t)$, $j = \overline{1,5}$, полинома (34):

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{35}{16} \left(-5 + 210t - 4536t^2 + 39600t^3 - 52G_0(t) - 5574G_1(t) - 109728G_2(t) - 237600G_3(t) \right), \\ b_2 &= 40 \left(1 - 63t + 1512t^2 - 13860t^3 + 20G_0(t) + 2016G_1(t) + 38556G_2(t) + 83160G_3(t) \right), \\ b_3 &= \frac{105}{8} \left(-5 + 378t - 9720t^2 + 92400t^3 - 144G_0(t) - 13758G_1(t) - 257760G_2(t) - 554400G_3(t) \right), \\ b_4 &= 50 \left(1 - 84t + 2268t^2 - 22176t^3 + \frac{184}{5} G_0(t) + 3360G_1(t) + 61992G_2(t) + 133056G_3(t) \right), \\ b_5 &= \frac{231}{16} \left(-1 + 90t - 2520t^2 + 25200t^3 - 44G_0(t) - 3870G_1(t) - 70560G_2(t) - 151200G_3(t) \right). \end{aligned}$$

Для определения функции $q(t)$ применим интеграл теплового баланса (35), что приводит к интегродифференциальному уравнению

$$4q'(t) + 1275q(t) + 94410G_1(t) + 1669680G_2(t) + 3564000G_3(t) = 2070t - 56160t^2 + 594000t^3 - 30, \quad (65)$$

в котором функция $q(t)$ присутствует в виде производной $q'(t)$, а также под знаками интегралов в функциях $G_1(t)$, $G_2(t)$ и $G_3(t)$. Уравнение (65) может быть переведено в обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно новой функции $p(t) = G_3(t)$. Отсюда имеем очевидные равенства:

$$G_3(t) = p(t), \quad G_2(t) = p'(t), \quad G_1(t) = p''(t), \quad q(t) = p^{(3)}(t), \quad q'(t) = p^{(4)}(t). \quad (66)$$

С учетом равенств (66) уравнение (65) примет вид

$$4p^{(4)} + 1275p^{(3)} + 94410p''(t) + 1669680p'(t) + 3564000p(t) = 2070t - 56160t^2 + 594000t^3 - 30. \quad (67)$$

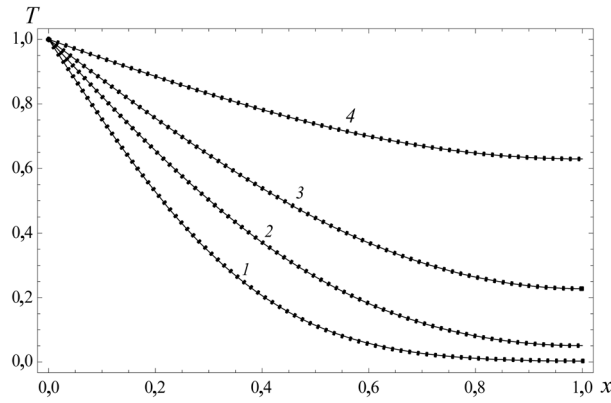


Рис. 2. Приближенные температурные профили, рассчитанные по формуле (71) (пунктир), в сравнении с точным решением (сплошные линии) в разные моменты времени: 1, 2, 3, 4 – $t = 0,05$; $0,1$; $0,2$; $0,5$ соответственно ($N = 5$)

Для функции $p(t)$, исходя из ее определения и представления функции $G_n(t)$ в виде (38), справедливы начальные условия

$$p(t_1) = G_3(t_1) = 0, \quad p'(t_1) = G_2(t_1) = 0, \quad p''(t_1) = G_1(t_1) = 0, \quad p^{(3)}(t_1) = q(t_1) = 0. \quad (68)$$

Отсюда на основании уравнения (67) и условий (68) приходим к задаче Коши для функции $p(t) = G_3(t)$ с нулевыми начальными условиями. Запишем характеристическое уравнение

$$4\mu^4 + 1275\mu^3 + 94410\mu^2 + 1669680\mu + 3564000 = 0, \quad (69)$$

корни которого определяют собственные значения: $\mu_1 = 2,467401$ (точное значение $\mu_1^* = 2,467401$ [24]), $\mu_2 = 22,1410$ ($\mu_2^* = 22,2066$ [24]), $\mu_3 = 74,13041$, $\mu_4 = 220,01121$. Первое вычисленное собственное значение совпадает с точным значением вплоть до шестого знака после запятой. Следует отметить, что известный интегральный метод дополнительных граничных условий [18–20] для приближенного решения с тем же полиномом пятой степени ($N = 5$) позволяет получить лишь два собственных значения, причем с более низкой точностью.

Решение системы (67)–(68) и последующее трехкратное дифференцирование по t найденной функции $p(t)$ дает искомую граничную функцию в следующем виде:

$$q(t) = 1 - 1,27324 e^{-2,467401t} + 0,41846 e^{-22,14098t} - 0,38808 e^{-74,13041t} - 2,4668 e^{-220,01121t} \quad (70)$$

и соответственно приближенное аналитическое решение задачи для второй стадии теплового процесса ($t_1 = 0,04148$):

$$\begin{aligned} T(x, t) = & 1 - \left(1,8054344x + 0,004587x^2 - 0,767965x^3 + 0,04726x^4 + 0,06005x^5\right) e^{-2,467401(t-t_1)} - \\ & - \left(0,80085x + 0,431778x^2 - 5,826683x^3 + 6,31953x^4 - 1,892494x^5\right) e^{-22,140976(t-t_1)} - \\ & - \left(0,14928x - 0,27480x^2 - 0,929812x^3 + 2,1765076x^4 - 1,103256x^5\right) e^{-74,13041(t-t_1)} - \\ & - \left(0,016962x - 0,1247245x^2 + 0,30535x^3 - 0,3057115x^4 + 0,1078574x^5\right) e^{-220,0112(t-t_1)}. \end{aligned} \quad (71)$$

Результаты расчетов безразмерных температур, согласно формуле (71), представлены на графиках рис. 2. Их анализ позволяет отметить, что полученное решение во всем рассматриваемом временном диапазоне практически совпадает с точным решением.

Заключение. На основе интеграла теплового баланса и применения систем из тождественных равенств, включающих $2n$ -кратные интегралы от искомой температурной функции и интегральные граничные характеристики, образуемые многократным интегрированием задаваемой функции граничного условия, получены аналитические решения краевых задач нестационарной теплопроводности для регулярного и нерегулярного режимов процесса нагрева (охлаждения)

протяженной пластины при граничных условиях первого рода. Доказано существование последовательностей, которые образуют тождественные равенства как для первой стадии процесса, так и для второй его стадии. Показано, что по точности и сходимости приближенных решений предложенный интегральный метод граничных характеристик превосходит известные методы, основанные на рассмотрении фронта возмущения, на порядок и выше. Полученные данным методом решения, по существу, являются точными, поскольку погрешность для широкой области значений параметров задач составляет сотые – десятитысячные доли процента.

Список использованной литературы

1. *Goodman, T. R.* Application of integral methods to transient nonlinear heat transfer / T. R. Goodman // *Adv. Heat Transfer*, New York: Academic Press.– 1964. – Vol. 1. – P. 51–122.
2. *Caldwell, J.* Numerical methods for one-dimensional Stefan problems / J. Caldwell, Y. Y. Kwan // *Comm. Numer. Meth. Eng.* – 2004. – Vol. 20, N 7.– P. 535–545.
3. *Caldwell, J.* Numerical solution of the Stefan problems by the heat balance integral method, Part I – cylindrical and spherical geometries / J. Caldwell, Y. Y. Kwan // *Comm. Numer. Meth. Eng.* – 2000. – Vol. 16, N 8.– P. 535–545.
4. A cubic heat balance integral method for one-dimensional melting of a finite thickness layer / T. G. Myers [et al.] // *Int. J. Heat Mass Transfer.* – 2007. – Vol. 50, N 25–26. – P. 5305–5317.
5. *Addison, J. A.* Ray Methods for free boundary problems / J. A. Addison, S. D. Howison, J. R. King // *Quart. Appl. Math.* – 2006. – Vol. LXIV, N 1. – P. 41–59.
6. Тимошпольский, В. И. Теоретические основы теплофизики и термомеханики в металлургии / В. И. Тимошпольский, Ю. С. Постольник, Д. Н. Андрианов.– Минск.: Бел. наука, 2005. – 560 с.
7. *Био, М.* Вариационные принципы в теории теплообмена / М. Био. – М.: Энергия, 1975. – 209 с.
8. *Баренблатт, Г. И.* О некоторых приближенных методах в теории одномерной неустановившейся фильтрации жидкости при упругом режиме / Г. И. Баренблатт // *Изв. АН СССР. ОТН.* – 1954. – № 9. – С. 35–49.
9. *Dorodnitsyn, A. A.* General method of integral relations and its application to boundary layer theory / A. A. Dorodnitsyn. – Th. von Karman. *Advances in Aeronautical Sciences*, Pergamon, 1965. – P. 207–219.
10. *Hristov, J.* The heat-balance integral method by a parabolic profile with unspecified exponent: Analysis and exercises / J. Hristov // *Thermal Sci.* – 2009. – Vol. 13, N 2. – P. 27–48.
11. *Sadoun, N.* On the refined integral method for the one-phase Stefan problem with time-dependent boundary conditions / N. Sadoun, E. K. Si-Ahmed, P. Colinet // *Appl. Math. Model.* – 2006. – Vol. 30, N 6. – P. 531–544.
12. *Mitchell, S. L.* Application of standard and refined heat balance integral methods to one-dimensional Stefan problems / S. L. Mitchell, T. G. Myers // *SIAM Rev.* – 2010. – Vol. 52, N 1. – P. 57–86.
13. *Myers, T. G.* Application of the combined integral method to Stefan problems / T. G. Myers, S. L. Mitchell // *Appl. Math. Model.* – 2011. – Vol. 35, N 9. – P. 4281–4294.
14. *Myers, T. G.* Optimizing the exponent in the heat balance and refined integral methods / T. G. Myers // *Int. Commun. Heat Mass Transfer.* – 2009. – Vol. 36, N 2. – P. 143–147.
15. *Langford, D.* The heat balance integral method / D. Langford // *Int. J. Heat and Mass Transfer.* – 1973. – Vol. 16, N 12. – P. 2424–2428.
16. *Wood, A. S.* A new look at the heat balance integral method / A. S. Wood // *Appl. Math. Model.* – 2001. – Vol. 25, N 10. – P. 815–824.
17. *Layeni, O. P.* Hybrids of the heat balance integral method / Layeni O. P., Johnson J. V. // *Appl. Math. Comput.* – 2012. – Vol. 218, N 14–15. – P. 7431–7444.
18. *Mitchell, S. L.* Improving the accuracy of heat balance integral methods applied to thermal problems with time dependent boundary conditions / S. L. Mitchell, T. G. Myers // *Int. J. Heat and Mass Transfer.* – 2010. – Vol. 53, N 17.– P. 3540–3551.
19. *Goodman, T. R.* The heat-balance integral – further considerations and refinements / T. R. Goodman // *Transactions of ASME, ser. C.* – 1961. – N 1. – P. 83–93.
20. *Федоров, Ф. М.* Граничный метод решения прикладных задач математической физики / Ф. М. Федоров. – Новосибирск: Наука, 2000. – 220 с.
21. *Кудинов, В. А.* Теплопроводность и термоупругость в многослойных конструкциях / В. А. Кудинов, Б. В. Аврин, Е. В. Стефанюк. – М.: Высшая школа, 2008. – 305 с.
22. *Кудинов, В. А.* Аналитический метод решения задач теплопроводности на основе определения фронта температурного возмущения / В. А. Кудинов, Е. В. Стефанюк, М. С. Антимонов// *Инженерно-физический журнал.* – 2009. – Т. 82, № 3. – С. 540–558.
23. *Стефанюк, Е. В.* Дополнительные граничные условия в нестационарных задачах теплопроводности / Е. В. Стефанюк, В. А. Кудинов // *Теплофизика высоких температур.* – 2009. – Т. 47, № 2. – С. 269–282.
24. *Лыков, А. В.* Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М.: Энергия, 1978. – 600 с.

Поступила в редакцию 19.06.2015