

УДК 629.33.021:004.94

В. С. КОНЧАК¹, А. А. НАЗАРЕНКО²

ВЕРИФИКАЦИЯ КОМПЬЮТЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ МЕХАНИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

*¹Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: bats@ncpmn.bas-net.by,*

*²Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: nazaruiip@gmail.com*

Разработаны методы верификации компьютерных моделей механических конструкций на основе результатов обработки экспериментальной информации. Рассмотрены два подхода к построению математических моделей: метод «черного ящика» и аналитический на основе дифференциальных уравнений. Все теоретические положения продемонстрированы на примере верификации элементов длинноходовой подвески.

Ключевые слова: модели механических конструкций, идентификация, верификация, линеаризация модели, гармоническая аппроксимация.

V. S. KONCHAK¹, A. A. NAZARENKO²

VERIFICATION OF COMPUTER MODELS OF MECHANICAL STRUCTURES USING EXPERIMENTAL RESULTS

*¹The Joint Institute of Mechanical Engineering of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: bats@ncpmn.bas-net.by,*

*²The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: nazaruiip@gmail.com*

Verification methods of computer models of mechanical structures were developed on the basis of processing of the results of experimental data. Two approaches to construction of mathematical models were considered: the method of «black box» and the analytical method based on differential equations. All theoretical points were demonstrated on the example of long-stroke suspension elements verification.

Keywords: mechanical structures models, identification, verification, model linearization, harmonic approximation.

Введение. Применение компьютерных технологий в задачах проектирования изделий машиностроительной техники связано с разработкой динамических моделей, которые в виртуальном пространстве способны воспроизводить режимы их функционирования, близкие к реальным. Последнее позволяет проводить исследование на моделях таких свойств проектируемого изделия, как вибронагруженность, устойчивость функционирования, управляемость в режиме динамического нагружения, тем самым оценить его соответствие техническому заданию до изготовления опытного образца. Чтобы разрабатываемая модель была пригодна для исследования свойств проектируемого изделия, ее математическое представление должно адекватно отображать физические процессы, которые протекают в механической конструкции в режиме реального функционирования. Ввиду этого при разработке компьютерной модели используется математическое описание, отображающее физические и механические свойства объекта, определяющие кинематику и динамику моделируемой конструкции.

Всякая модель содержит ряд параметров, которые и отображают физические и механические свойства проектируемого изделия. Их можно получить либо расчетным путем, либо по результатам эксперимента. Основным источником информации для получения таких характеристик динамических систем, как собственная частота колебаний, коэффициент демпфирования, ам-

плитудные спектры входа, выхода и передаточной функции, фазовый спектр, коэффициенты жесткости и сопротивления перемещению, являются стендовые либо натурные испытания реальной конструкции.

Цель настоящей статьи – разработка методов классификации математических моделей колебательных систем, их идентификации, а также получения параметров для их математического представления по результатам измеренной экспериментальной информации, которые в конечном счете используются при верификации разработанной компьютерной модели.

1. Основные термины теории верификации. Понятие верификации широко используется в различных направлениях науки, техники и службах контроля качества выпускаемой продукции. В соответствии с требованиями международного стандарта к системе менеджмента качества ИСО 9000, на основании которого был разработан российский стандарт ГОСТ Р ИСО 9000–2008, верификация определяется как «подтверждение посредством представления объективных свидетельств того, что установленные требования выполнены».

В дополнение к данному термину введено понятие валидации, которое по определению того же стандарта означает «подтверждение посредством представления объективных свидетельств того, что требования, предназначенные для конкретного использования или применения, выполнены».

Понятия верификации и валидации используются для проверки качества широкого класса объектов. Нами поставлена задача использования возможностей теории верификации для разработки компьютерных моделей механических конструкций, адекватных реальным объектам. Верифицировать модель, значит, задать такие параметры математического описания объекта, чтобы результат сравнительных испытаний находился в пределах заданной точности.

Валидация в соответствии с определением осуществляет проверку с помощью верифицированной модели того, что использование данного изделия в проектируемом объекте обеспечит выполнение требований технического задания. Таким образом, валидация обеспечивает только предположение о возможности использования данной комплектующей в проектируемом объекте. Окончательный вывод можно сделать только после сравнения результатов виртуальных испытаний модели собранной конструкции с реальной проверкой ее функционирования, т. е. после ее верификации.

Следует различать понятия верификации и идентификации. Идентификация – разработка математического аппарата для построения модели динамической системы по измеренным данным. Так как математическая модель отображает динамику поведения системы с учетом кинематики и физических процессов, протекающих при взаимодействии ее элементов, то идентификация уточняет описание ее структуры и параметров путем анализа входных и выходных данных.

Отметим, что модель является некоторым приближением реального объекта и о ее адекватности можно судить после проведения сравнительных испытаний, в результате которых оценки параметров и процессов в контролируемых точках совпадут в пределах заданной точности. Следовательно, модель адекватна реальному объекту лишь после ее верификации.

2. Классификация математических моделей колебательных систем. Анализ динамики колебаний линейных механических систем, работающих в условиях переменных нагрузок, основан на решении совместных систем дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода и алгебраических уравнений связи, а в простейшем случае – на втором законе Ньютона, отражающем равновесие приложенных сил. Система, работающая в условиях свободных колебаний, описывается уравнением

$$m\ddot{y} = -r\dot{y} - cy, \quad (1)$$

где y – функция перемещения, m – поддрессоренная масса, r – коэффициент сопротивления перемещению, c – коэффициент жесткости, $m\ddot{y}$ – инерционная сила, $r\dot{y}$ – сила сопротивления перемещению, cy – упругая сила. Решением данного уравнения будет функция $y = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_0 t + \alpha)$, где A_0 – амплитуда, задающая максимально возможное отклонение колеблющейся массы от статического состояния, $\beta = r/(2m)$ – коэффициент демпфирования, характеризующий скорость затухания колебаний, $\omega_0 = \sqrt{c/m}$ – собственная частота.

Вызвать свободные колебания в реальной конструкции не всегда возможно. Поэтому на практике чаще всего используют режим вынужденных колебаний, уравнение динамического равновесия сил при котором имеет вид

$$m\ddot{y} + r\dot{y} + cy = f \sin \omega t. \quad (2)$$

Решением данного уравнения будет функция

$$y = A \sin(\omega t + \alpha), \quad (3)$$

где A – амплитуда вынужденных колебаний, ω – частота, f – амплитуда вынуждающей силы.

Для построения модели в виде уравнения (2) необходимо по результатам измерения экспериментальной информации получить коэффициенты c и r , которые, как показано в [1], могут быть вычислены таким образом:

$$c = \frac{f(\omega_k) \cos \alpha}{A(\omega_k)}, \quad r = \frac{f(\omega_k) \sin \alpha}{A(\omega_k)}, \quad (4)$$

где $f(\omega_k)$ – амплитуда входного силового возбуждения, $A(\omega_k)$ – амплитуда выходного процесса перемещения элементов конструкции под воздействием приложенной силы, α – фазовое смещение, отражающее время реакции исследуемой системы.

Перечисленные выше характеристики рассчитывались по коэффициентам разложения в ряд Фурье процессов $x(t)$ и $y(t)$ с использованием следующих формул:

$$A(\omega_k) = \sqrt{a_k^2(y) + b_k^2(y)}, \quad f(\omega_k) = \sqrt{a_k^2(x) + b_k^2(x)}. \quad (5)$$

$$\alpha = \alpha_y - \alpha_x, \quad \alpha_y = \arctg(b_y / a_y), \quad \alpha_x = \arctg(b_x / a_x). \quad (6)$$

Таким образом, для идентификации параметров уравнения (2) достаточно в процессе эксперимента измерить входную и выходную функции и по амплитудным и фазовым характеристикам, полученным из соотношений (5) и (6), вычислить с помощью формулы (4) значения жесткости и сопротивления.

В соответствии с методикой проведения экспериментальных исследований динамических систем [2] на вход объекта испытания в режиме вынужденных колебаний подаются гармонические функции. При этом выходная функция (3) в режиме установившихся колебаний будет также гармонической. Если фаза $\alpha(\omega_k)$ будет константой, а зависимость упругой силы от перемещения – прямой, проходящей через начало координат под углом α для всех частот в полосе исследования $0 \leq \omega_k \leq \omega_{\text{высш}}$, то объект моделирования будет линейным, не зависящим от частоты. При этом коэффициенты уравнения (2) будут постоянными, а его решение – линейной функцией

$$y(t) = \text{tg } \alpha x(t), \quad (7)$$

задающей зависимость ординат выходной последовательности от входной. Следовательно, для частотно-независимых линейных систем по результатам обработки экспериментальной информации можно построить аналитическую модель с использованием уравнения (2) или модель с применением метода «черного ящика» – уравнение (7).

Если же в результате тестирования объекта в режиме экспериментальных исследований выходная функция будет гармонической, а фазовая характеристика будет зависеть от частоты, то в соответствии с уравнениями (4) коэффициенты жесткости и сопротивления также будут функциями частоты. Тогда уравнение (2) преобразуется к виду

$$m\ddot{y} + r(\omega_k)\dot{y} + c(\omega_k)y = f \sin \omega_k t, \quad (8)$$

т. е. будет линейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами. Системы такого типа называют частотно-зависимыми или обладающими памятью. Рабочие диаграммы такой системы для каждой частоты ω_k – прямые линии, а для всего частотного диапазона –

пучок прямых, проходящих через начало координат. Угловой коэффициент каждой из них будет равным $\operatorname{tg}\alpha(\omega_k)$. При этом в отличие от частотно-независимых систем, где имеет место линейная связь между упругой силой и функцией перемещения, у систем с памятью такая связь существует между амплитудно-частотными характеристиками (АЧХ) выходной $y(t)$ и входной $x(t)$ функций.

Во временной области связь между $y(t)$ и $x(t)$ задается в виде интегрального уравнения типа свертки

$$y(t) = \int_0^T h(t + \tau) x(\tau) d\tau, \quad (9)$$

для которого в качестве весовой функции используется импульсная переходная характеристика (ИПХ) $h(t)$.

В частотной области уравнение (9) будет иметь вид

$$S_y(j\omega_k) = S_h(j\omega_k) S_x(j\omega_k), \quad (10)$$

где S_x, S_y – коэффициенты преобразования Фурье входной $x(t)$ и выходной $y(t)$ функций, а S_h – коэффициенты импульсной переходной характеристики $h(t)$. Частотная зависимость в таких системах возникает из-за отставания или опережения движения при взаимодействии силы инерции и сопротивления, что приводит к ускорению или замедлению движения. В результате на определенных частотах возникает явление резонанса, которое у частотно-независимых линейных систем отсутствует. Оно связано с понятием частоты собственных колебаний, при возникновении которой АЧХ принимает максимальное значение, а фазочастотная характеристика (ФЧХ) терпит разрыв, изменяясь с $-\pi/2$ на $\pi/2$ [3].

Коэффициенты преобразования Фурье ИПХ могут быть получены из соотношения (10) как

$$S_h(j\omega_k) = a_h(\omega_k) + jb_h(\omega_k) = \frac{S_y(j\omega_k)}{S_x(j\omega_k)} = \frac{S_y(j\omega_k) S_x^*(j\omega_k)}{|S_x(j\omega_k)|^2} = \frac{S_{yx}(j\omega_k)}{|S_x(j\omega_k)|^2}, \quad (11)$$

а дискретное представление оператора модели во временной области

$$|h_r(i\Delta t)| = F^{-1} \operatorname{diag} |S_h(j\omega_k)| F, \quad (12)$$

где $h_r(i\Delta t)$ – циклическая матрица дискретной ИПХ, F – матрица преобразования Фурье, $\operatorname{diag} |S_h(j\omega_k)|$ – матрица комплексного спектра ИПХ. Соответственно выходной процесс

$$\overline{y(n\Delta t)} = |h_r(i\Delta t)| \overline{x(i\Delta t)}. \quad (13)$$

Таким образом, частотно-зависимые линейные системы имеют линейную аналитическую зависимость (10) между коэффициентами преобразования Фурье входа и выхода. Аналитической моделью таких систем являются дифференциальные уравнения (8) с переменными коэффициентами, а моделью типа «черный ящик» – матричное соотношение (13), для которого оператор вычисляется в соответствии с формулой (12).

Рассмотренным выше системам свойственно отображать гармоническую функцию входного воздействия в гармоническую реакцию. Однако существуют реальные колебательные системы, которые преобразуют гармонический сигнал в периодический, но не гармонический. В таких случаях принято считать, что система обладает свойством нелинейного искажения входного воздействия.

Источником нелинейности в колебательных системах являются силы сопротивления движению, которые служат причиной неравномерного затухания колебаний и являются функциями от скорости перемещения элементов конструкции (возникают в демпферах и называются диссипативными). Зависимость силы трения от скорости наиболее часто представляют [4] в одной из следующих форм:

$$F(\dot{y}) = -r\dot{y} \quad (14)$$

как силу линейного трения;

$$F(\dot{y}) = -r \operatorname{sign} \dot{y} \quad (15)$$

как кулонову силу трения;

$$F(\dot{y}) = -r(\dot{y})^n \operatorname{sign} \dot{y} \quad (16)$$

как силу нелинейного вязкого трения и

$$F(\dot{y}) = -b_1 \dot{y} - b_2 \dot{y}^2 - \dots - b_k \dot{y}^k \dots \quad (17)$$

как обобщенную силу сопротивления перемещению частотно-независимых нелинейных систем.

Реакция на вход в нелинейных системах кроме частоты гармоник входного сигнала содержит и дополнительные частоты размножившихся гармонических компонент. Для реализаций $y_{i,k}$ выходного процесса коэффициент нелинейности Δ определяется как отношение мощности его части, содержащей только гармоник размножившихся частот, к мощности основной гармоники. Если величина Δ не превосходит значения допустимой погрешности, то в этом случае система может быть описана с использованием метода гармонической линеаризации, суть которого состоит в фильтрации гармоник размножившихся частот. Процесс линеаризации преобразует исследуемую систему в линейную и ее анализ сведется к методам, описанным выше для линейных систем.

У систем с высокой степенью нелинейности, когда значение Δ больше допустимой погрешности, необходимо провести анализ на частотную зависимость. Для этого формально выполняется линеаризация выходного процесса и строятся рабочие диаграммы. Если фаза $\alpha(\omega_k)$ для всего диапазона частот постоянная, то исходная система частотно-независимая нелинейная и ее модель будет описана уравнением (17).

При применении модели типа «черный ящик» необходимо для всех ω_k построить поле рассеяния точек характеристики. При использовании последних по методу наименьших квадратов строится полином, являющийся аппроксимацией характеристики исследуемого объекта. Полученный полином описывает зависимость силы сопротивления от скорости перемещения, т. е.

$$F[\dot{y}(t)] = P[f(t)] \dot{y}(t). \quad (18)$$

Аналитическое представление модели для частотно-независимых нелинейных систем будет в этом случае иметь вид

$$m\ddot{y} + P[f(t)] \dot{y}(t) + cy = f \sin \omega t. \quad (19)$$

Используя аналитическое представление полинома $P[\dot{y}(t)]$, вычисляем полином, дающий зависимость скорости $\dot{y}(t)$ от силы $F(t)$:

$$\dot{y}(t) = P^{-1}[f(t)].$$

Тогда решением уравнения (17) будет функция

$$y(t) = \int P^{-1}[f(t)] dt. \quad (20)$$

Следовательно, для частотно-независимых нелинейных систем может применяться аналитическая модель (19) либо модель типа «черный ящик» (20).

Системы, у которых коэффициент нелинейности Δ превосходит допустимую погрешность, а фазовая характеристика $\alpha(\omega_k) \neq \text{const}$, называют частотно-зависимыми нелинейными или обладающими памятью. Нелинейную зависимость сил сопротивления от скорости перемещения определяют [4] как

$$F[\dot{y}(t)] = -r \dot{y}(t)^{n-1} \dot{y}(t).$$

С учетом этого дифференциальное уравнение (1) равновесия сил примет вид

$$m\ddot{y} + r\dot{y}(t)^n + cy = f\sin\omega t. \quad (21)$$

Решение данного уравнения можно получить, применяя метод энергетического баланса, предположив, что его решением будет функция [4]

$$y(t) = A(t)\sin\omega t, \quad (22)$$

у которой $A(t)$ – медленно меняющаяся амплитуда колебаний, а частота постоянная.

В настоящей работе поставлена задача построения модели при использовании цифровой информации, полученной из эксперимента. Для решения данной задачи предложено применить метод гармонической аппроксимации.

Пусть X – матрица реализаций входного процесса, заданного в виде гармонических функций с дискретностью по частоте $\Delta f = 4f_{\text{высш}}/N$ и по времени $\Delta t = T_{\text{высш}}/4$, где $f_{\text{высш}}$ – граничная частота, $T_{\text{высш}}$ – период гармоники высшей частоты, $T_1 = \Delta t N$ – период полученной цифровой реализации, N – число дискретных отсчетов в одной реализации.

Зависимость выхода от входа запишем как

$$Y = XH, \quad (23)$$

где Y – ансамбль функций выходного процесса (реакция системы), H – матричный оператор, задающий характер нелинейного преобразования входных гармоник X . Так как по определению классификационных признаков нелинейной системы строки матриц X и Y входного и выходного ансамблей являются периодическими функциями, то они могут быть разложены в ряд Фурье. Для этого умножим матричное уравнение (23) справа на матрицу преобразования Фурье, а матрицу X – справа на единичную матрицу $E=FF^{-1}$. Тогда уравнение (23) преобразуется к виду

$$YF = XFF^{-1}HF. \quad (24)$$

Поскольку YF – матрица коэффициентов преобразования Фурье ансамбля выходных функций $y_{i,k}$, XFF^{-1} – диагональная матрица коэффициентов гармонических функций, а $F^{-1}HF$ – двумерное преобразование ординат неизвестного оператора H , то матричное уравнение (24) можно записать как

$$|S_y(j\omega_k)| = \text{diag}|S_x(j\omega_k)||S_h(j\omega_k)|. \quad (25)$$

Чтобы вычислить комплексный спектр оператора H , умножим слева уравнение (25) на матрицу, обратную диагональной. Тогда

$$|S_h(j\omega_k)| = \text{diag}|S_x^{-1}(j\omega_k)||S_y(j\omega_k)|,$$

а оператор H исследуемой нелинейной системы – результат обратного двумерного преобразования Фурье матрицы $|S_h(j\omega_k)|$:

$$H = F|S_h(j\omega_k)|F^{-1}. \quad (26)$$

Таким образом, для частотно-зависимых систем, обладающих высокой степенью нелинейности, в качестве аналитической модели может быть использовано дифференциальное уравнение (21), а в качестве модели типа «черный ящик» – матричное уравнение (23), для которого оператор H вычисляется с помощью соотношения (26).

3. Методика подготовки и проведения эксперимента. Как уже отмечено в настоящей работе, эксперимент является основным объективным источником информации, обеспечивающей возможность построения адекватных моделей деталей, узлов, систем и основных сборочных единиц проектируемого изделия. Для механических конструкций эксперимент является способом исследования их поведения в условиях динамического нагружения.

По своему назначению испытания подразделяют на эксплуатационные и стендовые, натурные и виртуальные, доводочные и приемочные, ресурсные и исследовательские. По характеру подготовки и методам осуществления испытания, проводимые с целью получения экспериментальной информации, на основании которой будут разработаны динамические модели механических конструкций, можно отнести к исследовательским. Они позволяют на основе измеренной информации выполнить классификацию исследуемого объекта, получить параметры, характеризующие его механические свойства и математическое описание механических процессов, преобразующих вынужденные механические колебания в реакцию системы. Методика проведения испытаний изложена в [2], где показано, что на вход динамического объекта в процессе эксперимента следует подавать силовое нагружение в виде гармонических функций. Это позволяет исключить взаимное влияние частот при построении оператора нелинейных систем (соотношения (23)–(26)).

Процесс планирования эксперимента включает в себя разработку схемы стендовых испытаний, на основании которой изготавливается оснастка для крепления объекта испытаний, осуществляется выбор нагружающих устройств и режимов испытаний. Все перечисленные мероприятия являются основой для разработки схемы установки датчиков и разработки алгоритмов обработки экспериментальной информации.

Испытания проводятся в соответствии с программой и методикой, основой которой являются методы, изложенные в отраслевых и государственных стандартах на испытания исследуемого объекта, а также конструкторская документация, кинематическая схема и схема нагружения.

Ввиду того, что стенд, являясь динамической системой, искажает управляющий сигнал, поданный на его исполнительные органы с помощью устройства связи с объектом, то для исключения этого влияния на результат вычисления оператора используется реальная функция нагружения, измеренная дополнительным специально установленным датчиком.

С целью поддержания высокой степени достоверности измерительного процесса следует соблюдать всю технологию подготовки и проведения стендовых испытаний, выполнять поверку цифроаналоговых и аналого-цифровых преобразователей и тарировку датчиков.

Таким образом, в процессе эксперимента достаточно измерить входные последовательности в виде гармонической функции в заданной полосе частот ($0; \omega_{\text{высш}}$) и ансамбль реализаций реакции системы на входные воздействия. Обработку полученной цифровой информации наиболее целесообразно проводить, используя частотные методы, что на порядок ускорит вычисление результатов за счет применения «быстрого преобразования Фурье». При использовании результатов обработки экспериментальной информации АЧХ и ФЧХ исследуемая система может быть отнесена к одному из классов, что и дает возможность построения математической модели.

4. Исследование адекватности отображения модели реальному объекту. Проверка адекватности модели осуществляется в режиме сравнительных испытаний. Для их организации необходимо разработать модели виртуальных стендов, которые с учетом принципа максимального правдоподобия должны соответствовать схеме эксперимента, разработанной для стендовых испытаний.

Рассмотрим основные принципы проведения таких испытаний на примере исследования колебаний стойки длинноходовой рычажной подвески, у которой в качестве упругого и демпфирующего элемента используются пружина и амортизатор, допускающие возможность перемещения ступицы колеса в пределах ± 250 мм.

Техническое оснащение стендовых испытаний выполнено с использованием оборудования испытательного комплекса фирмы SHENK (Германия). Процесс управления экспериментом осуществляется цифровым многоканальным управляющим комплексом. Оцифровка информации с датчиков и подача управляющих процессов на исполнительные органы стенда выполнены многоканальными синхронными аналого-цифровыми и цифроаналоговыми преобразователями.

Испытания проводились в режиме вынужденных колебаний. Поэтому исследуемый объект (амортизатор, пружина, стойка подвески) устанавливался в замкнутый контур оснастки, колебания в котором выполнял гидравлический цилиндр. Процессы управления колебаниями и изме-

рения возникающего силового нагружения синхронизированы, что позволило с высокой точностью определить фазовые характеристики.

В режиме виртуальных испытаний динамических моделей должны соблюдаться все перечисленные условия. Поэтому динамические модели стендов, разработанные в пакете ADAMS [5] в соответствии со схемой эксперимента, полностью повторяют кинематические и динамические свойства процесса проведения реальных испытаний.

В режиме виртуальных испытаний функции перемещения формировались сплайнами третьего и четвертого порядков при учете кинематических законов движения элементов объекта испытания.

В процессе разработки моделей исследуемых объектов по результатам стендовых испытаний получены:

рабочая диаграмма пружины (рис. 1, *а*) для перемещения поршня стенда в пределах $\pm 0,25$ м на частотах колебаний 2,91; 3,36; 4,0; 5,38 Гц;

рабочая диаграмма амортизатора (рис. 1, *б*) для перемещения поршня стенда в пределах $\pm 0,25$ м на частотах колебаний от 0,24 до 1,7 Гц;

характеристика амортизатора, график которой построен на максимальных скоростях перемещений (рис. 1, *в*);

характеристика стойки подвески в сборе (рис. 1, *г*).

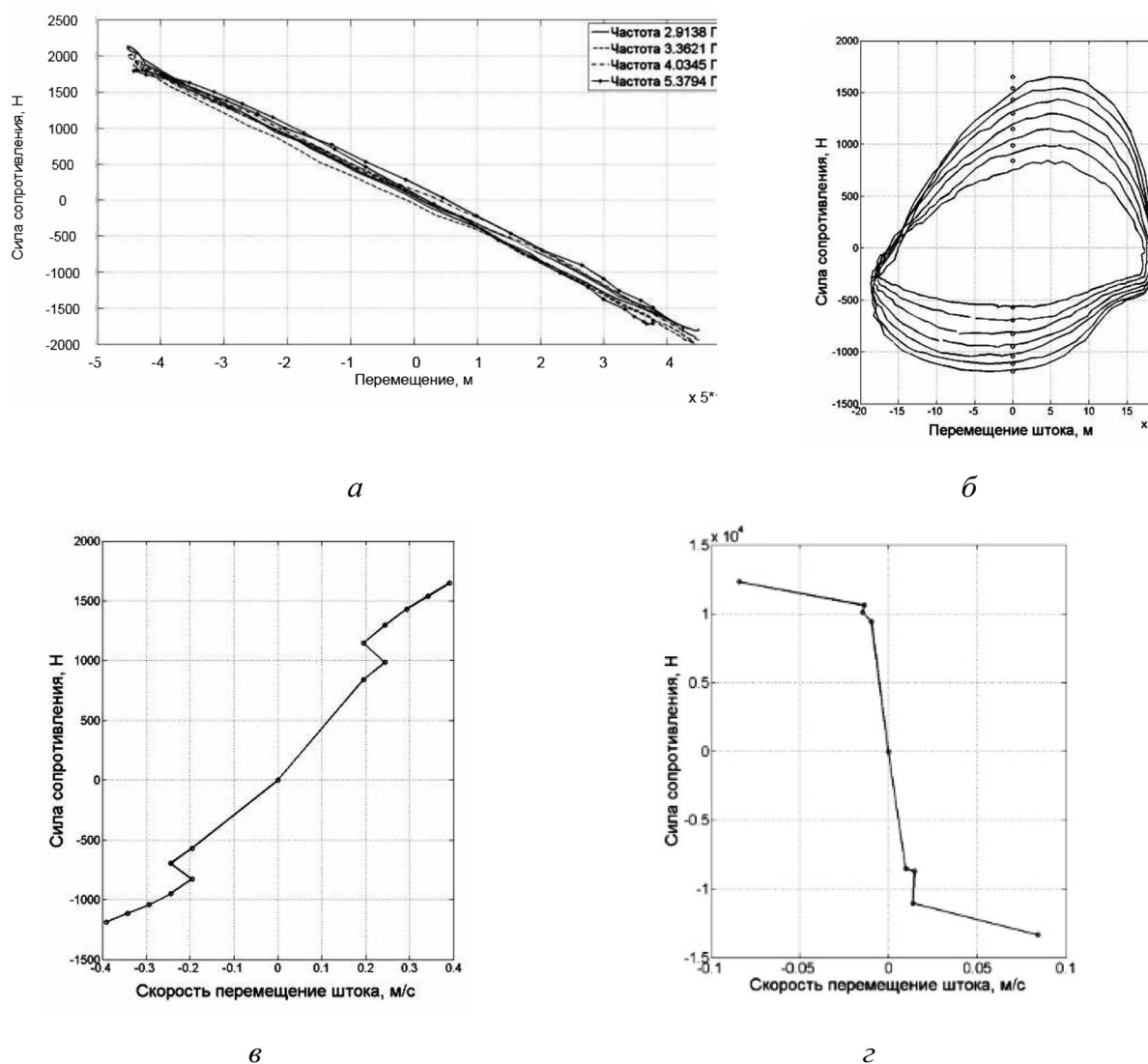


Рис. 1. Функциональные зависимости упругой силы пружины от величины перемещения (*а*); рабочая диаграмма амортизатора (*б*); характеристика амортизатора (*в*); характеристика стойки подвески в сборе (*г*)

Как следует из рис. 1, *в*, *г*, угол наклона характеристики стойки подвески на 45 град больше, чем у амортизатора. Это связано с очень высокой жесткостью пружины, у которой наклон рабочей диаграммы более 130 град.

В процессе выполнения сравнительных испытаний вычислены:

импульсная переходная характеристика пружины;

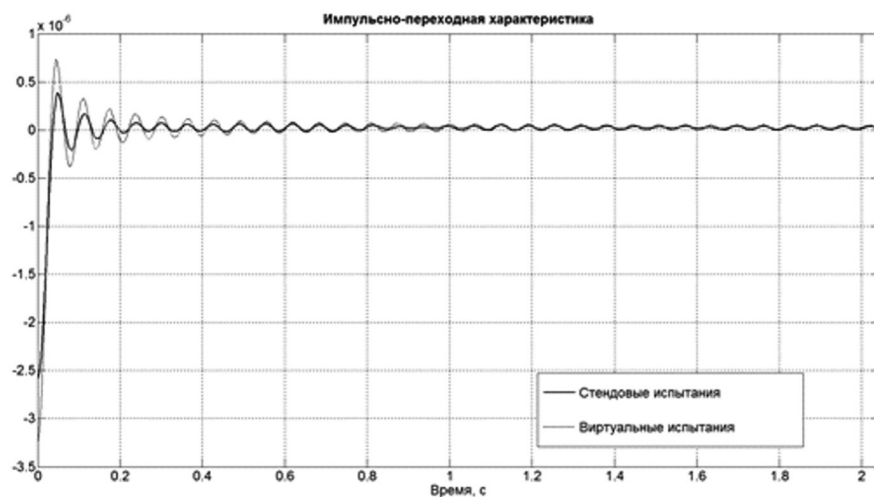
импульсная переходная характеристика амортизатора;

импульсная переходная характеристика стойки подвески в сборе при статическом нагружении 4,5 т;

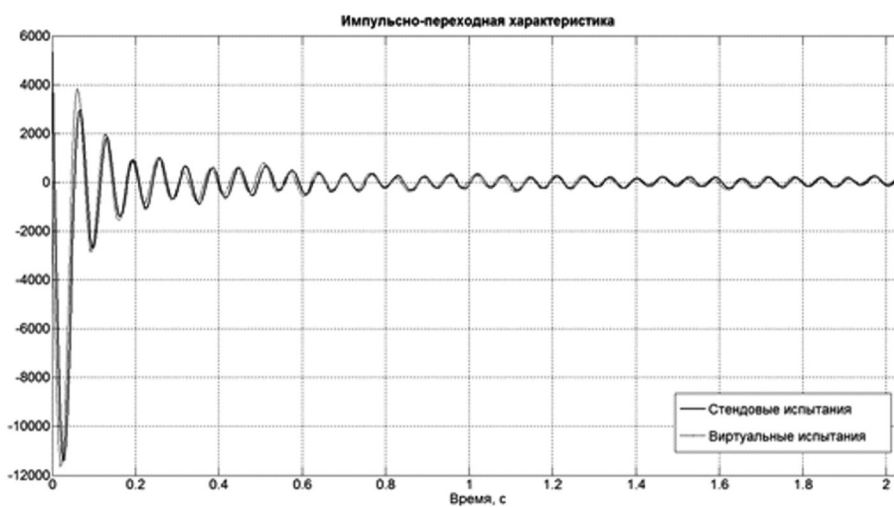
импульсная переходная характеристика стойки подвески в сборе при статическом нагружении 2,15 т.

Вычисленные по результатам виртуальных испытаний характеристики моделей исследуемых объектов использованы при моделировании перечисленных выше объектов. Результаты сравнения приведены на графиках (рис. 2, 3), из которых следует, что характеристики, полученные по результатам стендовых и виртуальных испытаний, хорошо совпадают как по частотам, так и по характеру затухания колебаний.

Численные результаты сравнительного анализа сведены в таблицу, где приведены как сами значения параметров, так и величины погрешностей их вычисления. Максимальная величина

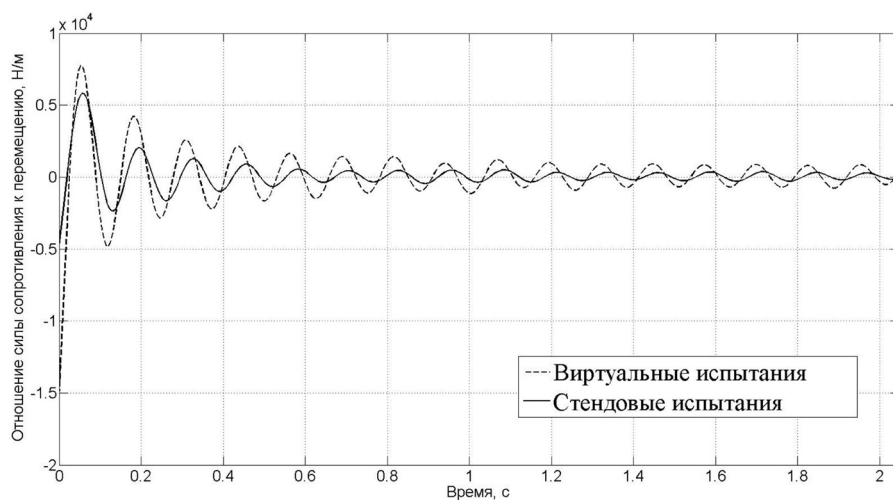


а

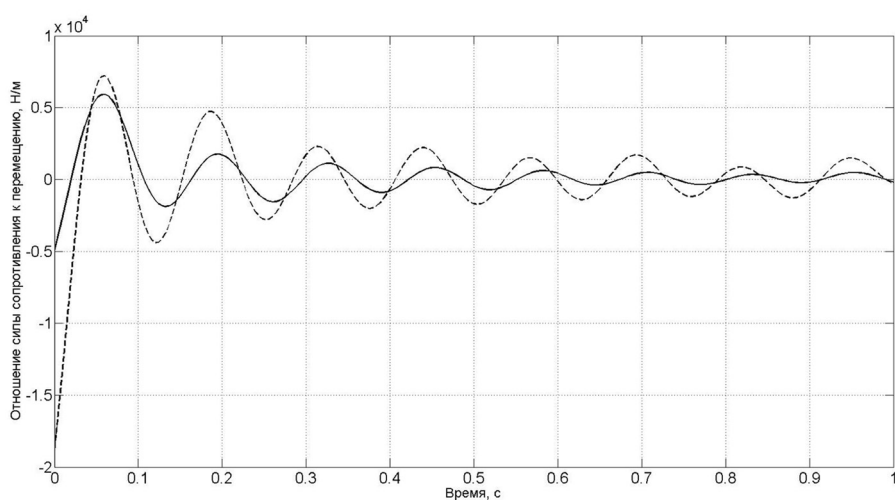


б

Рис. 2. Импульсные переходные характеристики элементов подвески: *а* – пружина; *б* – амортизатор



а



б

Рис. 3. Импульсная переходная характеристика стойки подвески: а, б – при статическом нагружении 2,15 и 4 т соответственно

погрешности не превосходит 9%. Исследуемая модель нелинейная. Для построения импульсных переходных характеристик она линеаризована и, как видно из таблицы, в результате линеаризации получены приемлемые модели.

На рис. 4 приведена аппроксимация по методу наименьших квадратов нелинейной характеристики амортизатора, полученной по результатам нагружения гармоническими функциями во

Сравнительный анализ результатов стендовых и виртуальных испытаний

Элемент подвески	T_0, c		Погрешность, %	$\omega_0, \text{рад/с}$		Погрешность, %	λ		Погрешность, %	β, c^{-1}		Погрешность, %
	стенд.	вирт.		стенд.	вирт.		стенд.	вирт.		стенд.	вирт.	
Пружина	0,058	0,0587	1,192	108,33	107,1	1,135	0,0976	0,0913	6,455	1,683	1,555	7,605
Амортизатор	0,0643	0,0587	8,709	97,666	107,1	8,808	0,0949	0,0917	3,372	1,476	1,563	5,566
Подвеска в сборе (статика 4,5 т)	0,128	0,127	0,781	49,1	49,5	0,808	0,45	0,42	6,667	3,516	3,307	5,944
Подвеска в сборе (статика 2,15 т)	0,129	0,127	1,551	48,8	49,5	1,414	0,38	0,3	7,895	2,946	2,756	6,449

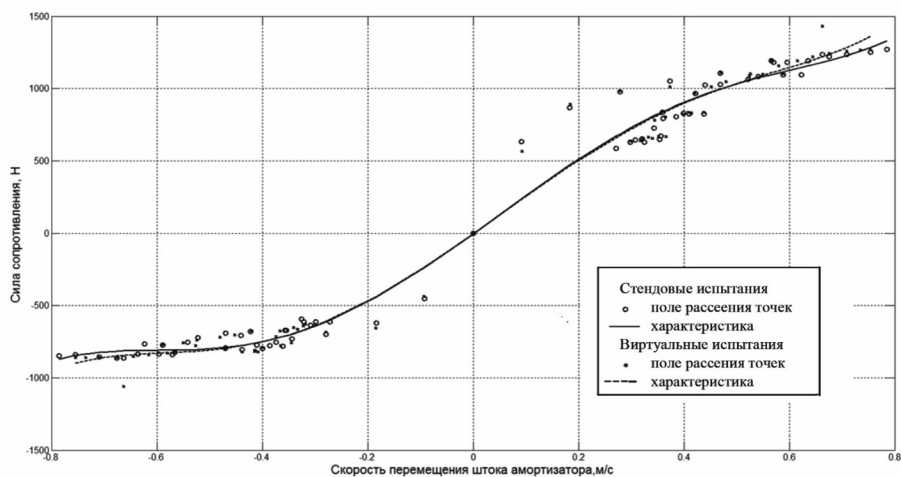


Рис. 4. Характеристики амортизатора, полученные по результатам стендовых и виртуальных испытаний

всем диапазоне частот от 0,6 до 14 Гц с помощью полинома четвертой степени. Как видно из рисунка, точность приближения результатов виртуальных испытаний к стендовым очень высокая.

Заключение. В работе изложены основные положения теории верификации математических моделей машиностроительных конструкций, работающих в условиях переменных нагрузок. Показано, что на практике в качестве математической модели используется аналитическое представление механических и физических свойств моделируемых объектов, которое, как правило, использует для описания динамики дифференциальные уравнения. Выполнена классификация колебательных систем в соответствии с их механическими свойствами, полученными в результате эксперимента. Приведено теоретическое обоснование моделей колебательных систем как при классическом их описании, так и с использованием метода «черного ящика».

Предложены методы и алгоритмы, позволяющие по результатам эксперимента вычислить параметры математического представления аналитических моделей и операторы системы, связывающие ее вход и выход. Показано, что использование частотных методов анализа позволяет достаточно эффективно исследовать системы с памятью, что в итоге однозначно формирует математическое представление их моделей. Получено теоретическое обоснование математического описания нелинейных систем с памятью. На примере исследования длинноходовой подвески продемонстрировано использование полученных результатов на практике.

Список использованной литературы

1. Методы определения динамических характеристик упругих элементов подвески по экспериментальным данным / В. С. Кончак [и др.] // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2008. – № 2. – С. 20–25.
2. Методика подготовки исходных данных для разработки динамических моделей автомобильных конструкций / В. С. Кончак, С. В. Хитриков, С. П. Лазакович // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2014. – № 1. – С. 60–68.
3. Определение параметров одномассовых колебательных систем по результатам экспериментальных исследований / В. С. Кончак // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2013. – № 2. – С. 76–82.
4. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний / Я. Г. Пановко. – М., 1991. – 255 с.
5. Верификация компьютерных моделей элементов рычажной длинноходовой подвески по результатам стендовых испытаний / В. С. Кончак [и др.] // Информатика. – 2013. – № 3. – С. 115–125.

Поступила в редакцию 20.12.2015