

УДК 66.047

П. В. АКУЛИЧ

**ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОРИСТЫХ ТЕЛАХ
С УЧЕТОМ НЕСТАЦИОНАРНОСТИ ПАРАМЕТРОВ
НА УГЛУБЛЯЮЩЕЙСЯ ГРАНИЦЕ ИСПАРЕНИЯ**

*Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: akul@hmti.ac.by*

Предложен приближенный метод расчета тепломассопереноса в цилиндрических пористых телах при углублении границы испарения с учетом переменной температуры и давления пара на ней. Установлены зависимости углубления границы испарения и кинетики процесса сушки от параметров пористой среды и внешнего теплового воздействия.

Ключевые слова: тепломассоперенос, кинетика сушки, сушка

P. V. AKULICH

**HEAT AND MASS TRANSFER IN CYLINDRICAL POROUS BODIES WITH ACCOUNT
OF NONSTATIONARITY OF PARAMETERS OF DEEPENING EVAPORATION BOUNDARY**

*A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: akul@hmti.ac.by*

An approximate method is suggested for calculating heat and mass transfer in cylindrical porous bodies with deepening of the evaporation boundary with account of the variability of vapor temperature and pressure on it. Dependences of evaporation boundary deepening and kinetics of drying on the parameters of porous medium and external thermal effect have been found.

Keywords: heat and mass transfer, the drying kinetics, drying

Введение. Тепломассоперенос в капиллярно-пористых телах нередко сопровождается углублением зоны испарения. Данное явление наблюдается, если отвод пара настолько интенсивен, что капиллярный механизм переноса не обеспечивает подпитку жидкостью осушаемых пор. Математическое описание такого процесса основывается на задаче типа Стефана. Следует отметить, что в общем случае испарение происходит не только на движущемся фронте, но и в некоторой зоне. Это обусловлено, в частности, различными формами связи влаги с материалом.

Исследованию процессов тепломассопереноса с подвижной зоной или границей фазового превращения посвящено значительное количество работ [1–10]. В [1] получена система уравнений взаимосвязанного тепломассопереноса. Для рассматриваемого процесса записываются общие уравнения для сухой и влажной зон, а критерий фазового превращения представляется в виде разрывной функции. Следует отметить, что критерий фазового превращения зависит от параметров процесса и такой подход достаточно сложен в реализации.

Существующие наиболее простые и удобные для практики модели (например, [3–7]) не учитывают фильтрационного движения пара в сухой зоне или температура на границе испарения, как правило, принимается постоянной величиной. В данной работе приводится приближенный метод расчета процессов тепломассопереноса в цилиндрических капиллярно-пористых телах в предположении углубления зоны испарения. Полагается, что к границе испарения теплота подводится за счет теплопроводности сухого слоя материала и расходуется на испарение влаги. Внутри капиллярно-пористого тела возникает избыточное давление пара, вызывающее его

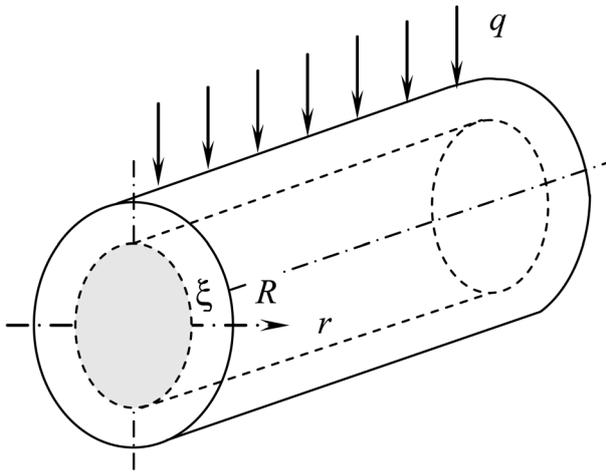


Рис. 1. К постановке задачи: цилиндрический образец с углубляющейся границей испарения

параметры насыщенного пара уравнением Клапейрона–Клаузиуса. С учетом принятых допущений уравнение для скорости углубления границы испарения при граничном условии III рода на поверхности $q = \alpha(T_\infty - T_R)$ можно записать

$$\left[c_c \rho_c (T_R - T_\xi) + (c_c \rho_c + c_{вл} u_V) (T_\xi - T_0) + u_V r_n \right] \xi \frac{d\xi}{d\tau} = - \frac{T_\infty - T_\xi}{\frac{1}{\alpha R} + \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{R}{\xi} \right)} \quad (1)$$

при начальном условии: $\tau = 0$, $\xi = R$; $\tau > 0$, $0 < \xi < R$. Здесь c_c , $c_{вл}$ – теплоемкость сухого тела, влаги (воды), Дж/(кг·К); r_n – удельная теплота парообразования, Дж/кг; τ – время, с; T_R , T_0 , T_ξ , T_∞ – соответственно температура поверхности тела, начальная температура тела, температура на границе испарения, температура окружающей среды, К; u_V – начальное влагосодержание тела, кг/м³; α – коэффициент теплообмена, Вт/(м²·К); λ – эффективный коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К); ξ – текущая координата границы испарения, м; ρ_c – плотность сухого тела, кг/м³.

Исходя из того, что теплота от поверхности материала передается в глубь тела теплопроводностью, следует

$$\alpha(T_\infty - T_R) = \frac{T_R - T_\xi}{\frac{R}{\lambda} \ln \left(\frac{R}{\xi} \right)}, \quad (2)$$

откуда

$$T_R = \frac{T_\xi + T_\infty \gamma}{1 + \gamma}, \quad (3)$$

где $\gamma = (\alpha R / \lambda) \ln(R / \xi)$.

После подстановки (3) в (1) и несложных преобразований получаем

$$\frac{d\xi}{d\tau} = - \frac{T_\infty - T_\xi}{\xi (T_\infty - T_\xi) \frac{1}{a} \ln \frac{R}{\xi} + \xi \left(\frac{1}{\alpha R} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{R}{\xi} \right) \left[c_m (T_\xi - T_0) + u_V r_n \right]}, \quad (4)$$

где $a = \lambda / c_c \rho_c$; $c_m = c_c \rho_c + c_{вл} u_V$.

Изменение влагосодержания тела связано с перемещением зоны испарения зависимостью

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{2\xi u_V}{R^2 \rho_c} \frac{d\xi}{d\tau}. \quad (5)$$

фильтрацию от границы испарения к поверхности. В результате скорость переноса влаги определяется термическим и фильтрационным сопротивлениями. Отметим, что такой подход использовался нами для описания тепломассопереноса в плоских капиллярно-пористых телах [11].

Математическая модель. Рассмотрим бесконечное цилиндрическое капиллярно-пористое тело, на поверхность которого воздействует тепловой поток (рис. 1). Длина тела намного больше его диаметра. Пренебрегается градиентами переноса во влажной зоне. Допускается квазистационарное распределение температуры в сухой зоне. Температура и давление на границе испарения связаны, как

После интегрирования уравнения (4) можно определить время заглобления зоны испарения, т. е. время сушки.

Массовый поток пара на единицу длины тела в сухой зоне от границы испарения к поверхности можно представить таким образом:

$$j_{\Pi} = -\frac{2\pi}{\ln(R/\xi)} \frac{\rho_{\Pi} k_{\Pi}}{\mu_{\Pi}} (p_R - p_{\xi}). \quad (6)$$

Здесь k_{Π} – коэффициент проницаемости, m^2 ; p_R , p_{ξ} , p_{∞} – соответственно давление пара на поверхности тела, границе испарения, в окружающей среде, Па; μ_{Π} – коэффициент динамической вязкости пара, Па·с; ρ_{Π} – плотность пара, kg/m^3 .

Тогда

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{1}{u_V \xi \ln(R/\xi)} \frac{\rho_{\Pi} k_{\Pi}}{\mu_{\Pi}} (p_R - p_{\xi}). \quad (7)$$

Для потока пара на поверхности тела можно записать

$$-\frac{D}{\ln(R/\xi)} (p_R - p_{\xi}) = \beta R (p_R - p_{\infty}), \quad (8)$$

откуда

$$p_R = \frac{p_{\infty} + p_{\xi} D^*}{1 + D^*} \quad (9)$$

(β – коэффициент массообмена, $kg/(m^2 \cdot c \cdot Pa)$; $D^* = D/[\beta R \ln(R/\xi)]$; $D = \rho_{\Pi} k_{\Pi} / \mu_{\Pi}$).

При $\xi = R$ $p_R = p_{\xi}$. Подставив (9) в (7), имеем

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -\frac{p_{\xi} - p_{\infty}}{u_V \xi \left[\frac{1}{D} \ln\left(\frac{R}{\xi}\right) + \frac{1}{\beta R} \right]}. \quad (10)$$

Давление насыщенного пара на границе испарения в зависимости от температуры определяется по уравнению Клапейрона–Клаузиуса

$$\frac{1}{p_{\xi}} \frac{dp_{\xi}}{dT_{\xi}} = \frac{r_{\Pi}(T_{\xi})}{R_{\Pi} T_{\xi}^2}. \quad (11)$$

Здесь R_{Π} – газовая постоянная пара, Дж/(кг·К).

Для случая, когда можно допустить $r_{\Pi}(T_{\xi}) = \text{const}$, имеем

$$p_{\xi} = p^* \exp(-T^*/T_{\xi}), \quad (12)$$

где $p^* = 6,4072 \cdot 10^{10}$ Па, $T^* = 4996$ К.

Из полученной системы уравнений (4), (10) и (12) можно определить температуру T_{ξ} на границе испарения в зависимости от ее координаты ξ . Для этого приравняем правые части уравнений (4), (10) и, подставив (12), после преобразований запишем

$$T_{\xi} = -T^* \ln^{-1} \left\{ \frac{C(T_{\infty} - T_{\xi})}{\left(\xi p^* / a \right) \ln(R/\xi) (T_{\infty} - T_{\xi}) + E p^* [c_m (T_{\xi} - T_0) + u_V r_{\Pi}]} + \frac{p_{\infty}}{p^*} \right\}, \quad (13)$$

где $C = u_V \xi \left[\frac{1}{D} \ln\left(\frac{R}{\xi}\right) + \frac{1}{\beta R} \right]$, $E = \xi \left(\frac{1}{\alpha R} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{R}{\xi} \right)$.

Трансцендентное уравнение (13) представлено в виде $T_{\xi} = \varphi(T_{\xi})$ и решается методом последовательных приближений. Достаточные условия сходимости последовательности итераций

к корню уравнения следующие: в некоторой окрестности корня функция $\varphi(T_\xi)$ непрерывна и удовлетворяет условию «сжатия» $|\varphi'(T_\xi)| < 1$. Можно показать, что в исследуемой области параметров условие $|\varphi'(T_\xi)| < 1$ выполняется.

Далее рассмотрим решение задачи при граничном условии I рода на поверхности тела $T_R = \text{const}$. В этом случае уравнение (1) принимает вид

$$\xi \ln\left(\frac{R}{\xi}\right) \frac{d\xi}{d\tau} = - \frac{\lambda(T_R - T_\xi)}{c_c \rho_c (T_R - T_\xi) + (c_c \rho_c + c_{\text{вл}} u_V) (T_\xi - T_0) + u_V r_{\text{п}}}. \quad (14)$$

Решим данное уравнение при условии, когда можно допустить, что температура на границе испарения $T_\xi = \text{const}$. Тогда время перемещения границы испарения или время сушки можно определить по выражению

$$\tau = \frac{c_c \rho_c (T_R - T_\xi) + c_m (T_\xi - T_0) + u_V r_{\text{п}}}{2\lambda(T_R - T_\xi)} \left[\frac{R^2}{2} - \xi^2 \left(\ln \frac{R}{\xi} + \frac{1}{2} \right) \right], \quad 0 < \xi \leq R. \quad (15)$$

Влагосодержание тела определяется по формуле

$$u = \frac{\xi^2 u_V}{R^2 \rho_c}, \quad (16)$$

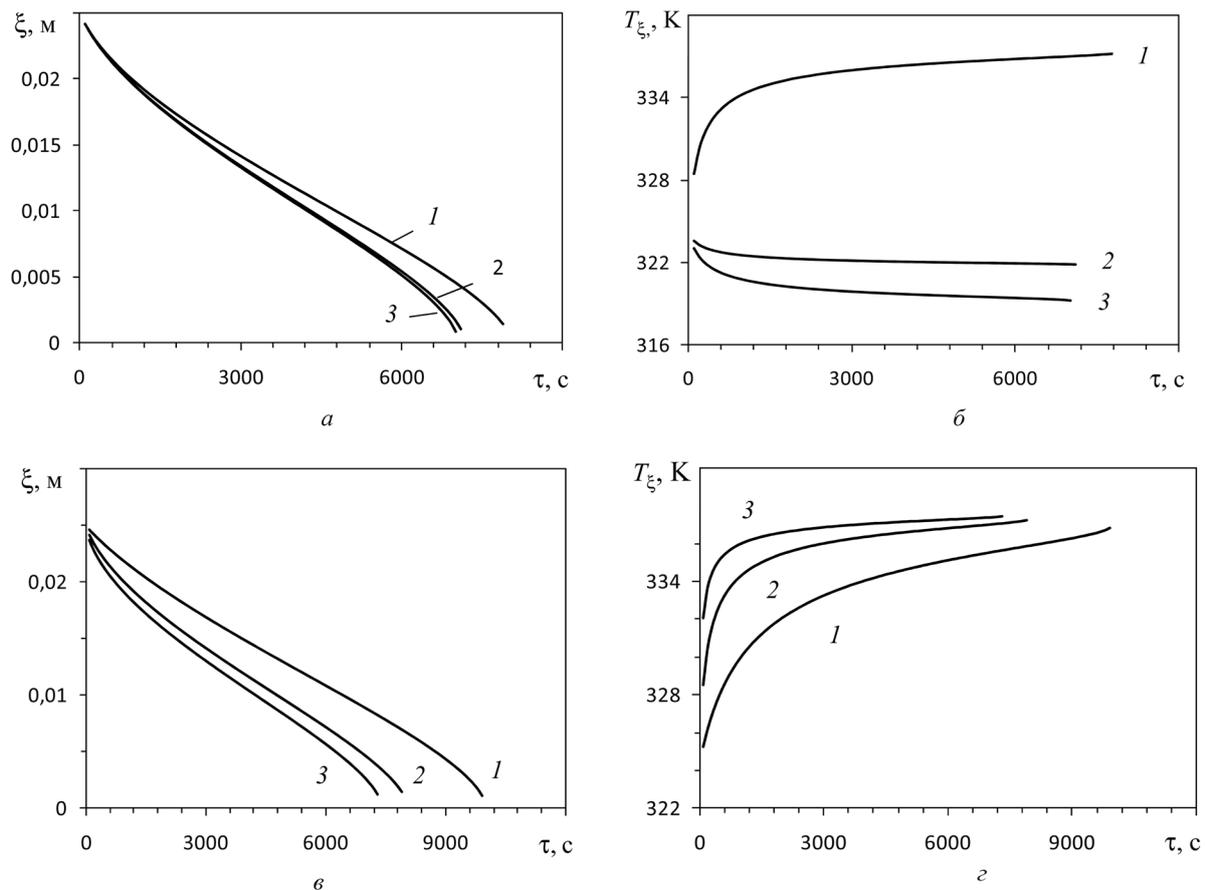


Рис. 2. Зависимости координаты границы испарения (а, в) и температуры (б, г) от времени: а, б – $\alpha = 50 \text{ Вт/(м}^2\text{К)}$, $\beta = 1 \cdot 10^{-6} \text{ кг/(м}^2\text{сПа)}$; 1 – $k_{\text{п}} = 1 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$; 2 – $k_{\text{п}} = 1 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2$; 3 – $k_{\text{п}} = 1 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$; в, г – $k_{\text{п}} = 1 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$; 1 – $\alpha = 20 \text{ Вт/(м}^2\text{К)}$, $\beta = 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ кг/(м}^2\text{сПа)}$; 2 – $\alpha = 50 \text{ Вт/(м}^2\text{К)}$, $\beta = 1 \cdot 10^{-6} \text{ кг/(м}^2\text{сПа)}$; 3 – $\alpha = 100 \text{ Вт/(м}^2\text{К)}$, $\beta = 2 \cdot 10^{-6} \text{ кг/(м}^2\text{сПа)}$

а средняя его температура

$$\bar{T} = \frac{c_c \rho_c T_c (R^2 - \xi^2) + c_m T_\xi \xi^2}{c_c \rho_c (R^2 - \xi^2) + c_m \xi^2}. \quad (17)$$

Результаты расчетов и их обсуждение. Уравнения (4) и (13) решались при следующих теплофизических параметрах пористой среды (например, цилиндрических образцов термомодифицированной древесины); $u_V = 300$ кг влаги/м³ тела; $\rho_c = 600$ кг/м³; $c_{вл} = 4190$ Дж/(кг·К); $c_c = 1900$ Дж/(кг·К); $\lambda = 0,16$ Вт/(м·К); $T_0 = 293$ К; $r_n = 2380$ кДж/кг; $\mu_n = 1,2 \cdot 10^{-5}$ Па·с; $\rho_n = 0,6$ кг/м³; $p_\infty = 10$ кПа; $T_\infty = 473$ К; $R = 0,025$ м.

В результате численного решения получены зависимости влияния проницаемости пористого тела и коэффициентов теплообмена на скорость углубления границы испарения и ее температуру (рис. 2). Установлено, что с уменьшением проницаемости тела скорость углубления границы испарения замедляется. Это обусловлено повышением сопротивления движению пара в сухой зоне. Если при $k_n = 1 \cdot 10^{-14}$ м² и прочих равных условиях температура пара на границе испарения с ее углублением возрастает, то при $k_n = 1 \cdot 10^{-13}$ и $1 \cdot 10^{-12}$ м² она незначительно снижается. Необходимо отметить, что при низкой пористости среды (следовательно, малой проницаемости) возможно значительное возрастание температуры насыщения пара, вызываемое повышением его давления (рис. 2 б, кривая 1). Увеличение значения теплопроводности тела повышает величину теплового потока к границе испарения и вызывает ускорение ее углубления, при этом температура возрастает. Интенсификация внешнего тепло- и массообмена ускоряет перемещение границы испарения. Однако, как и следовало ожидать, с ростом коэффициентов теплообмена ее скорость замедляется вследствие возрастания влияния термического и фильтрационного сопротивлений сухого слоя (рис. 2, в). При этом температура на границе испарения возрастает (рис. 2, г). Отметим, что повышение температуры окружающей среды приводит как к интенсификации массопереноса, так и к росту температуры на испаряющейся поверхности. О снижении скорости сушки с уменьшением проницаемости среды свидетельствуют кинетические зависимости на рис. 3. Следует отметить, что данная модель учитывает влияние парциального давления пара и температуры в окружающей среде и может быть использована для оценки воздействий внешних условий на интенсивность внутреннего теплообмена.

Заключение. На основе предложенной модели получены аналитические выражения для расчета скорости углубления границы испарения и кинетики сушки с учетом зависимости температуры и давления на границе испарения от параметров процесса. Показано, что теплофизические параметры пористой среды и режим теплообмена оказывают существенное влияние на значения температуры на углубляющейся поверхности испарения и скорости ее перемещения, что следует принимать во внимание в расчетах процессов теплообмена.

Список использованной литературы

1. Лыков, А. В. Теория сушки / А. В. Лыков. – М.: Энергия, 1968. – 472 с.
2. Хейфец, Л. И. Многофазные процессы в пористых средах / Л. И. Хейфец, А. В. Неймарк. – М.: Химия, 1982. – 320 с.
3. Кумер, И. Дж. Приближенное решение обобщенной задачи Стефана для пористой среды с переменными теплофизическими свойствами / И. Дж. Кумер, Л. Н. Гупта // Теплообмен-V: Материалы V Всесоюз. конф. по теплообмену. – Минск, 1976. – Т.5. – С. 187–197.
4. Шубин, Г. С. Расчет процессов теплообмена, сопровождаемых движением границы фазовых превращений / Г. С. Шубин // Теплообмен-V: Материалы V Всесоюз. конф. по теплообмену. – Минск, 1976. – Т. 5. – С. 207–217.

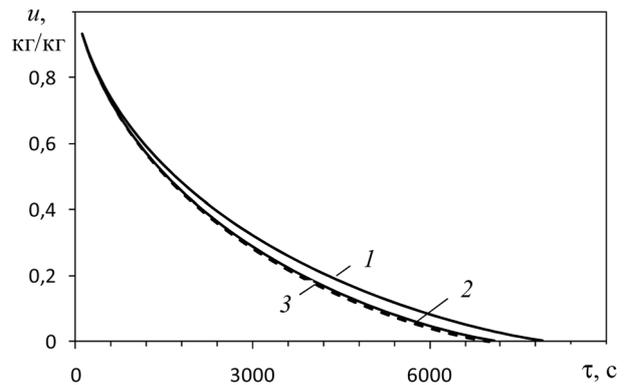


Рис. 3. Кинетические зависимости влагосодержания образца при различной его проницаемости: $\alpha = 50$ Вт/(м²·К), $\beta = 1 \cdot 10^{-6}$ кг/(м²·с·Па); 1 – $k_n = 1 \cdot 10^{-14}$ м²; 2 – $k_n = 1 \cdot 10^{-13}$ м²; 3 – $k_n = 1 \cdot 10^{-12}$ м²

5. Рубинштейн, Л. И. Проблема Стефана / Л. И. Рубинштейн. – Рига: Звайгзне, 1967. – 457 с.
6. Кафаров, В. В. Моделирование и оптимизация процессов сушки / В. В. Кафаров, И. Н. Дорохов // Итоги науки и техники: процессы и аппараты химической технологии. – М., 1987. – Т. 15. – С. 3–84.
7. Фролов, В. Ф. Моделирование сушки дисперсных материалов / В. Ф. Фролов. – Л.: Химия, 1987. – 208 с.
8. Бабенко, В. Е. Квазистационарный режим сушки сферической частицы / В. Е. Бабенко, Ю. А. Бувич, Н. М. Шепшук // ТОХТ.– 1975. – № 2. – С. 247–277.
9. Расчет процессов сушки, сопровождаемых перемещением зоны испарения / П. В. Акулич [и др.] // Тепло- и массоперенос: модели, теоретические и экспериментальные исследования: сб. науч. тр. АНК ИТМО НАН Беларуси. – Минск, 1993. – С. 26–29.
10. Акулич, П. В. Термогидродинамические процессы в технике сушки / П. В. Акулич. – Минск: ИТМО НАН Беларуси, 2002. – 268 с.
11. Акулич, П. В. Расчеты сушильных и теплообменных установок / П. В. Акулич. – Минск: Беларуская навука, 2010. – 443 с.

Поступила в редакцию 21.04.2016