ISSN 0002-3566 (print)
УДК 629.33.021:004.94

Поступила в редакцию 22.10.2015
Received 22.10.2015

В. С. Кончак[1], А. А. Назаренко[2]

[1]Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси, Минск, Беларусь,
[2]Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, Минск, Беларусь

МЕТОДИКА ПОДГОТОВКИ МНОГОМАССОВЫХ КОМПЬЮТЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ К ВЕРИФИКАЦИИ

Разработаны методы идентификации параметров математических моделей по результатам стендовых и натурных испытаний механических конструкций. Исходными данными для вычисления параметров дифференциальных уравнений, описывающих динамику колебаний многомассовых моделей, являются измеренные в ходе эксперимента функции перемещения и нагружения. Получены формулы для вычисления коэффициентов упругих и демпфирующих элементов, объединяющих колеблющиеся массы в единый механизм. Результаты работы могут быть использованы при моделировании многомассовых колебательных систем, работающих в режиме свободных колебаний или с закрепленными граничными элементами.

Ключевые слова: модели механических конструкций, идентификация, верификация, линеаризация модели, гармоническая аппроксимация.

V. S. Konchak[1], A. A. Nazarenko[2]

[1]The Joint Institute of Mechanical Engineering of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
[2]The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus Minsk, Belarus

A METHOD FOR PREPARATION OF MULTIMASS COMPUTER MODELS FOR VERIFICATION PROCEDURE

Coefficients calculation methods for systems of differential equations are developed. These coefficients are calculated by the results of multimass model elements displacement function and loading function measurements obtained during bench tests.The obtained results can be used for verification of complex mechanical systems, models and finite element models of rod structures.

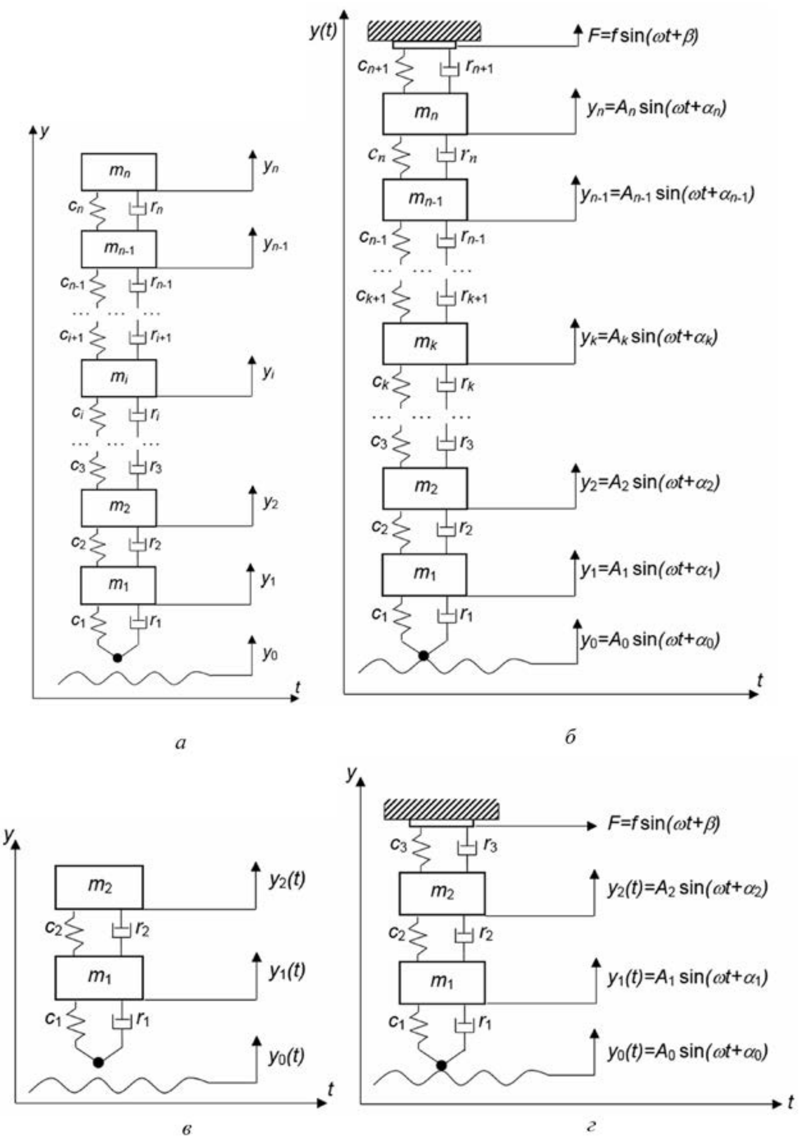
Keywords: mechanical structures models, identification, verification, model linearization, harmonic approximation.

Введение. Проектирование объектов новой техники связано с необходимостью исследования их опытных образцов на соответствие техническому заданию, что требует проведения больших объемов дорогостоящих испытаний узлов, агрегатов и изделия в целом.

Использование компьютерных технологий позволяет заменить реальные испытания виртуальными, которые проводят на моделях исследуемых конструкций. Однако такие модели должны быть адекватными реальным объектам, т. е. отражать их физические и механические свойства. Для этого применяют методы верификации, благодаря которым результаты виртуальных испытаний с заданной точностью совпадут с реальными данными. Расчетным путем удается исследовать на модели степень нагруженности узлов проектируемого изделия, уровни колебания конструктивных элементов и другие свойства, характеризующие качество функционирования разрабатываемого образца.

Цель настоящей статьи – разработка методов вычисления параметров математических моделей по результатам измерения реальных физических реакций, возникающих в конструкциях под нагрузкой. Рассматриваются два типа многомассовых моделей – модель, функционирующая в режиме свободных колебаний (рисунок, *а*), и модель, у которой граничная масса закреплена и измерена ее реакция на приложенную силу (рисунок, *б*). Разработан алгоритм вычисления коэффициентов уравнений как результат последовательного их решения.

Математическое обоснование алгоритма обработки экспериментальной информации, полученной при исследовании многомассовой колебательной системы. Динамическая модель упругого механизма – совокупность сосредоточенных масс, соединенных между собой упругим и демпфирующим безынерционными элементами. Силы в таких моделях обычно имеют



Структурные схемы многомассовых (*а*, *б*) и двухмассовых (*в*, *г*) моделей со свободными колебаниями граничной массы (*а*, *в*), с закреплением граничной массы (*б*, *г*)

детерминированный характер, а весь объект ввиду данного выше определения является единой упругой системой, для теоретического описания которой используются математические методы теории колебаний. Элементы механизма во время работы совершают сложные колебания. Представляет интерес относительное перемещение элементов, соединенных кинематически в многомассовую систему. Такая простейшая система изображена на рисунке *а*.

Динамика взаимных колебаний отдельных элементов такого объекта описывается системой дифференциальных уравнений [1, 2]

$$\begin{cases} m_1\ddot{y}_1 + r_1\dot{y}_1 + c_1 y_1 - r_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - c_2(y_2 - y_1) = r_1\dot{y}_0 + c_1 y_0, \\ m_2\ddot{y}_2 + r_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + c_2(y_2 - y_1) - r_3(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) - c_3(y_3 - y_2) = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ m_i\ddot{y}_i + r_i(\dot{y}_i - \dot{y}_{i-1}) + c_i(y_i - y_{i-1}) - r_{i+1}(\dot{y}_{i+1} - \dot{y}_i) - c_{i+1}(y_{i+1} - y_i) = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ m_{n-1}\ddot{y}_{n-1} + r_{n-1}(\dot{y}_{n-1} - \dot{y}_{n-2}) + c_{n-1}(y_{n-1} - y_{n-2}) - r_n(\dot{y}_n - \dot{y}_i) - c_n(y_n - y_i) = 0, \\ m_n\ddot{y}_n + r_n(\dot{y}_n - \dot{y}_{n-1}) + c_n(y_n - y_{n-1}) = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

В практике машиностроения такие динамические объекты встречаются довольно часто. Примером может служить система для моделирования крутильных колебаний валов [3, 4], приведенных систем подрессоривания элементов автомобильных конструкций [5] и других агрегатов, работающих под воздействием переменных нагрузок.

Рассмотрим простейшую систему, описывающую взаимодействие двух колеблющихся масс [6], первая передвигается под воздействием вынуждающих факторов, а вторая – от взаимодействия через упругий и демпфирующий элементы с первой. Схематическое представление такой системы приведено на рисунке *в*, ее уравнения движения запишем как

$$\begin{cases} m_1\ddot{y}_1 + r_1\dot{y}_1 + c_1 y_1 - r_2\left(\dot{y}_2 - \dot{y}_1\right) - c_2(y_2 - y_1) = F_{\text{вын}}, \\ m_2\ddot{y}_2 + r_2\left(\dot{y}_2 - \dot{y}_1\right) + c_2(y_2 - y_1) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

а уравнение вынуждающей силы, задающей колебания массы m_1, представим таким образом:

$$F_{\text{вын}} = r_1\dot{y}_0 + c_1 y_0. \tag{3}$$

Так как сила, вынуждающая движение массы m_1, порождена функцией перемещения

$$y_0 = A_0\sin\left(\omega t + \alpha_0\right), \tag{4}$$

то, учитывая линейный характер системы (2), обе функции перемещения масс m_1 и m_2 будут в этом случае гармоническими:

$$y_1 = A_1\sin(\omega t + \alpha_1), \quad y_2 = A_2\sin(\omega t + \alpha_2). \tag{5}$$

В результате подстановки в уравнения (2) функций (3)–(5) и их производных получим систему тождеств

$$\begin{cases} -m_1\omega^2 A_1\sin\left(\omega t + \alpha_1\right) + r_1\omega A_1\cos\left(\omega t + \alpha_1\right) + c_1 A_1\sin\left(\omega t + \alpha_1\right) - \\ -r_2\omega A_2\cos\left(\omega t + \alpha_2\right) + r_2\omega A_1\cos\left(\omega t + \alpha_1\right) - c_2 A_2\sin\left(\omega t + \alpha_2\right) + \\ +c_2 A_1\sin\left(\omega t + \alpha_1\right) = r_1\omega A_0\cos\left(\omega t + \alpha_0\right) + c_1 A_0\sin\left(\omega t + \alpha_0\right), \\ -m_2\omega^2 A_2\sin\left(\omega t + \alpha_2\right) + r_2\omega A_2\cos\left(\omega t + \alpha_2\right) - r_2\omega A_1\cos\left(\omega t + \alpha_1\right) + \\ +c_2 A_2\sin\left(\omega t + \alpha_2\right) - c_2 A_1\sin\left(\omega t + \alpha_1\right) = 0. \end{cases}$$

Выполним тригонометрические преобразования, тогда

$$\begin{cases} -m_1\omega^2 A_1(\sin\omega t\cos\alpha_1 + \cos\omega t\sin\alpha_1) + r_1\omega A_1(\cos\omega t\cos\alpha_1 - \\ -\sin\omega t\sin\alpha_1) + c_1 A_1\left(\sin\omega t\cos\alpha_1 + \cos\omega t\sin\alpha_1\right) - \\ -r_2\omega A_2\left(\cos\omega t\cos\alpha_2 - \sin\omega t\sin\alpha_2\right) + r_2\omega A_1(\cos\omega t\cos\alpha_1 - \\ -\sin\omega t\sin\alpha_1) - c_2 A_2(\sin\omega t\cos\alpha_2 + \cos\omega t\sin\alpha_2) + \\ +c_2 A_1(\sin\omega t\cos\alpha_1 + \cos\omega t\sin\alpha_1) = r_1\omega A_0(\cos\omega t\cos\alpha_0 - \\ -\sin\omega t\sin\alpha_0) + c_1 A_0(\sin\omega t\cos\alpha_1 + \cos\omega t\sin\alpha_1), \\ -m_2\omega^2 A_2(\sin\omega t\cos\alpha_2 + \cos\omega t\sin\alpha_2) + r_2\omega A_2(\cos\omega t\cos\alpha_2 - \\ -\sin\omega t\sin\alpha_2) - r_2\omega A_1\left(\cos\omega t\cos\alpha_1 - \sin\omega t\sin\alpha_1\right) + \\ +c_2 A_2(\sin\omega t\cos\alpha_2 + \cos\omega t\sin\alpha_2) - c_2 A_1(\sin\omega t\cos\alpha_1 + \\ +\cos\omega t\sin\alpha_1) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Поскольку система (6) является тождеством, то каждое из ее уравнений можно разделить на два соотношения, содержащие только функцию $\sin\omega t$ или $\cos\omega t$. В результате получим две системы алгебраических уравнений, у которых неизвестными будут параметры c_1, c_2, $r_1\omega$ и $r_2\omega$ исходной системы дифференциальных уравнений (2). Конкретное их представление будет иметь вид

$$\begin{cases} -m_1\omega^2 A_1\cos\alpha_1 - r_1\omega A_1\sin\alpha_1 + c_1A_1\cos\alpha_1 + r_2\omega A_2\sin\alpha_2 - \\ -r_2\omega A_1\sin\alpha_1 - c_2A_2\cos\alpha_2 + c_2A_1\cos\alpha_1 = -r_1\omega A_0\sin\alpha_0 + c_1A_0\cos\alpha_0, \\ -m_1\omega^2 A_1\sin\alpha_1 + r_1\omega A_1\cos\alpha_1 + c_1A_1\sin\alpha_1 - r_2\omega A_2\cos\alpha_2 + \\ +r_2\omega A_1\cos\alpha_1 - c_2A_2\sin\alpha_2 + c_2A_1\sin\alpha_1 = r_1\omega A_0\cos\alpha_0 + c_1A_0\sin\alpha_0, \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} -m_2\omega^2 A_2\cos\alpha_2 - r_2\omega A_2\sin\alpha_2 + r_2\omega A_1\sin\alpha_1 + c_2A_2\cos\alpha_2 - c_2A_1\cos\alpha_1 = 0, \\ -m_2\omega^2 A_2\sin\alpha_2 + r_2\omega A_2\cos\alpha_2 - r_2\omega A_1\cos\alpha_1 + c_2A_2\sin\alpha_2 - c_2A_1\sin\alpha_1 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Уравнения (8) являются системой второго порядка с двумя неизвестными. Для решения данной системы перегруппируем ее члены относительно указанных неизвестных r_2 и c_2:

$$\begin{cases} -r_2\omega\left(A_2\sin\alpha_2 - A_1\sin\alpha_1\right) + c_2\left(A_2\cos\alpha_2 - A_1\cos\alpha_1\right) = m_2\omega^2 A_2\cos\alpha_2, \\ r_2\omega\left(A_2\cos\alpha_2 - A_1\cos\alpha_1\right) + c_2\left(A_2\sin\alpha_2 - A_1\sin\alpha_1\right) = m_2\omega^2 A_2\sin\alpha_2. \end{cases} \tag{9}$$

Решать систему (9) будем методом Крамера. Вычислим определители:

$$\Delta = \begin{pmatrix} -\left(A_2\sin\alpha_2 - A_1\sin\alpha_1\right) & \left(A_2\cos\alpha_2 - A_1\cos\alpha_1\right) \\ \left(A_2\cos\alpha_2 - A_1\cos\alpha_1\right) & \left(A_2\sin\alpha_2 - A_1\sin\alpha_1\right) \end{pmatrix} = -\left[A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\left(\alpha_2-\alpha_1\right)\right],$$

$$\Delta r = \begin{pmatrix} m_2\omega^2 A_2\cos\alpha_2 & \left(A_2\cos\alpha_2 - A_1\cos\alpha_1\right) \\ m_2\omega^2 A_2\sin\alpha_2 & \left(A_2\sin\alpha_2 - A_1\sin\alpha_1\right) \end{pmatrix} = m_2\omega^2 A_1A_2\sin\left(\alpha_2-\alpha_1\right),$$

$$\Delta c = \begin{pmatrix} -\left(A_2\sin\alpha_2 - A_1\sin\alpha_1\right) & m_2\omega^2 A_2\cos\alpha_2 \\ \left(A_2\cos\alpha_2 - A_1\cos\alpha_1\right) & m_2\omega^2 A_2\sin\alpha_2 \end{pmatrix} = -m_2\omega^2(A_2^2 - A_1A_2\cos(\alpha_2-\alpha_1)),$$

тогда

$$r_2 = \frac{m_2\omega^2 A_1A_2\sin\left(\alpha_2-\alpha_1\right)}{-\left[A_2^2 + A_1^2 - 2A_1A_2\cos\left(\alpha_2-\alpha_1\right)\right]\omega}, \quad c_2 = \frac{m_2\omega^2(A_2^2 - A_1A_2\cos\left(\alpha_2-\alpha_1\right))}{A_2^2 + A_1^2 - 2A_1A_2\cos\left(\alpha_2-\alpha_1\right)}. \tag{10}$$

Сгруппируем члены уравнений системы (7) относительно неизвестных c_1, c_2 и r_1, r_2:

$$\begin{cases} -r_1\omega\left(A_1\sin\alpha_1 - A_0\sin\alpha_0\right) + c_1\left(A_1\cos\alpha_1 - A_0\cos\alpha_0\right) + \\ +r_2\omega\left(A_2\sin\alpha_2 - A_1\sin\alpha_1\right) - c_2\left(A_2\cos\alpha_2 - A_1\cos\alpha_1\right) = m_1\omega^2 A_1\cos\alpha_1, \\ r_1\omega\left(A_1\cos\alpha_1 - A_0\cos\alpha_0\right) + c_1\left(A_1\sin\alpha_1 - A_0\sin\alpha_0\right) - \\ -r_2\omega\left(A_2\cos\alpha_2 - A_1\cos\alpha_1\right) - c_2\left(A_2\sin\alpha_2 - A_1\sin\alpha_1\right) = m_1\omega^2 A_1\sin\alpha_1. \end{cases} \tag{11}$$

Просуммируем левые и правые части равенств систем (9) и (11). В результате будем иметь систему уравнений для вычисления неизвестных параметров r_1 и c_1:

$$\begin{cases} -r_1\omega\left(A_1\sin\alpha_1 - A_0\sin\alpha_0\right) + c_1\left(A_1\cos\alpha_1 - A_0\cos\alpha_0\right) = m_1\omega^2 A_1\cos\alpha_1 + m_2\omega^2 A_2\cos\alpha_2, \\ r_1\omega\left(A_1\cos\alpha_1 - A_0\cos\alpha_0\right) + c_1\left(A_1\sin\alpha_1 - A_0\sin\alpha_0\right) = m_1\omega^2 A_1\sin\alpha_1 + m_2\omega^2 A_2\sin\alpha_2, \end{cases} \tag{12}$$

которые могут быть получены, как и при решении системы (9):

$$r_1 = \frac{m_1\omega^2 A_1A_0\sin\left(\alpha_1-\alpha_0\right)}{\left[A_1^2 + A_0^2 - 2A_1A_0\cos\left(\alpha_1-\alpha_0\right)\right]\omega} + \frac{m_2\omega^2\left[A_2A_1\sin\left(\alpha_2-\alpha_1\right) - A_2A_0\sin\left(\alpha_2-\alpha_0\right)\right]}{\left[A_1^2 + A_0^2 - 2A_1A_0\cos\left(\alpha_1-\alpha_0\right)\right]\omega},$$

$$c_1 = \frac{m_1\omega^2\left[A_1^2 - A_1A_0\cos\left(\alpha_1-\alpha_0\right)\right]}{A_1^2 + A_0^2 - 2A_1A_0\cos\left(\alpha_1-\alpha_0\right)} + \frac{m_2\omega^2\left[A_2A_1\cos\left(\alpha_2-\alpha_1\right) - A_2A_0\cos\left(\alpha_2-\alpha_0\right)\right]}{A_1^2 + A_0^2 - 2A_1A_0\cos\left(\alpha_1-\alpha_0\right)}. \tag{13}$$

Для трехмассовой модели система дифференциальных уравнений, описывающих динамику ее колебаний, будет иметь вид

$$\begin{cases} m_1\ddot{y}_1 + r_1\dot{y}_1 + c_1 y_1 - r_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - c_2(y_2 - y_1) = r_1\dot{y}_0 + c_1 y_0, \\ m_2\ddot{y}_2 + r_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + c_2(y_2 - y_1) - r_3(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) - c_3(y_3 - y_2) = 0, \\ m_3\ddot{y}_3 + r_3(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) + c_3(y_3 - y_2) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

В результате подстановки в систему (14) ее решения в виде гармонических функций получим три системы алгебраических уравнений, решением которых и будут неизвестные параметры r_i, c_i (12) (i = 1, 2, 3):

$$r_3 = \frac{m_3\omega^2 A_3 A_2 \sin(\alpha_3 - \alpha_2)}{-\left[A_3^2 + A_2^2 - 2A_3A_2\cos(\alpha_3 - \alpha_2)\right]\omega}, \quad c_3 = \frac{m_3\omega^2 (A_3^2 - A_3A_2\cos(\alpha_3 - \alpha_2))}{\left[A_3^2 + A_2^2 - 2A_3A_2\cos(\alpha_3 - \alpha_2)\right]}, \tag{15}$$

$$r_2 = -\left\{\frac{m_2\omega^2 A_2 A_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\left[A_2^2 + A_1^2 - 2A_2A_1\cos(\alpha_2 - \alpha_1)\right]\omega} + \frac{m_3\omega^2\left[(A_3A_2\sin(\alpha_3 - \alpha_2) - A_3A_1\sin(\alpha_3 - \alpha_1)\right]}{\left[A_2^2 + A_1^2 - 2A_2A_1\cos(\alpha_2 - \alpha_1)\right]\omega}\right.,$$

$$c_2 = \frac{m_2\omega^2\left[A_2^2 - A_2A_1\cos(\alpha_2 - \alpha_1)\right]}{\left[A_2^2 + A_1^2 - 2A_2A_1\cos(\alpha_2 - \alpha_1)\right]} - \left.\frac{m_3\omega^2\left[A_3A_2\cos(\alpha_3 - \alpha_2) - A_3A_1\cos(\alpha_3 - \alpha_1)\right]}{\left[A_2^2 + A_1^2 - 2A_2A_1\cos(\alpha_2 - \alpha_1)\right]}\right\}, \tag{16}$$

$$r_1 = -\left\{\frac{m_1\omega^2 A_1 A_0 \sin(\alpha_1 - \alpha_0)}{\left[A_1^2 + A_0^2 - 2A_1A_0\cos(\alpha_1 - \alpha_0)\right]\omega} + \frac{m_2\omega^2\left[A_2A_1\sin(\alpha_2 - \alpha_1) - A_2A_0\sin(\alpha_2 - \alpha_0)\right]}{\left[A_1^2 + A_0^2 - 2A_1A_0\cos(\alpha_1 - \alpha_0)\right]\omega} + \right.$$

$$\left. + \frac{m_3\omega^2\left[A_3A_2\sin(\alpha_3 - \alpha_2) - A_3A_1\sin(\alpha_3 - \alpha_1)\right]}{\left[A_1^2 + A_0^2 - 2A_1A_0\cos(\alpha_1 - \alpha_0)\right]\omega}\right\},$$

$$c_1 = \left\{\frac{m_1\omega^2\left[A_1^2 - A_1A_0\cos(\alpha_1 - \alpha_0)\right]}{\left[A_1^2 + A_0^2 - 2A_1A_0\cos(\alpha_1 - \alpha_0)\right]} + \frac{m_2\omega^2\left[A_2A_1\cos(\alpha_2 - \alpha_1) - A_1A_0\cos(\alpha_1 - \alpha_0)\right]}{\left[A_1^2 + A_0^2 - 2A_1A_0\cos(\alpha_1 - \alpha_0)\right]} + \right.$$

$$\left. + \frac{m_3\omega^2\left[A_3A_2\cos(\alpha_3 - \alpha_2) - A_3A_1\cos(\alpha_3 - \alpha_1)\right]}{\left[A_1^2 + A_0^2 - 2A_1A_0\cos(\alpha_1 - \alpha_0)\right]}\right\}. \tag{17}$$

Для многомассовой модели, обобщенная схема которой приведена на рисунке *а*, при тестировании ее в условиях стендовых испытаний гармонической функцией с частотой ω формулы для вычисления коэффициентов r_k и c_k будут иметь следующий вид:

$$r_1 = -\frac{1}{\omega}\left\{\frac{m_1\omega^2 A_1\left[A_1\sin(\alpha_1 - \alpha_1) - A_0\sin(\alpha_1 - \alpha_0)\right]}{A_1^2 + A_0^2 - 2A_1A_0\cos(\alpha_1 - \alpha_0)} + \right.$$

$$+ \frac{m_2\omega^2 A_2\left[A_1\sin(\alpha_2 - \alpha_1) - A_0\sin(\alpha_2 - \alpha_0)\right]}{A_1^2 + A_0^2 - 2A_1A_0\cos(\alpha_1 - \alpha_0)} + \dots +$$

$$+ \frac{m_i\omega^2 A_i\left[A_1\sin(\alpha_i - \alpha_1) - A_0\sin(\alpha_i - \alpha_0)\right]}{A_1^2 + A_0^2 - 2A_1A_0\cos(\alpha_1 - \alpha_0)} + \dots +$$

$$\left. + \frac{m_n\omega^2 A_n\left[A_1\sin(\alpha_n - \alpha_1) - A_0\sin(\alpha_n - \alpha_0)\right]}{A_1^2 + A_0^2 - 2A_1A_0\cos(\alpha_1 - \alpha_0)}\right\},$$

$$c_1 = \left\{ \frac{m_1\omega^2 A_1\left[A_1\cos(\alpha_1-\alpha_1)-A_0\cos(\alpha_1-\alpha_0)\right]}{\left[A_1^2+A_0^2-2A_1A_0\cos(\alpha_1-\alpha_0)\right]} + \right. \tag{18}$$

$$+\frac{m_2\omega^2 A_2\left[A_1\cos(\alpha_2-\alpha_1)-A_0\cos(\alpha_2-\alpha_0)\right]}{A_1^2+A_0^2-2A_1A_0\cos(\alpha_1-\alpha_0)}+\cdots+$$

$$+\frac{m_i\omega^2 A_i\left[A_1\cos(\alpha_i-\alpha_1)-A_0\cos(\alpha_i-\alpha_0)\right]}{A_1^2+A_0^2-2A_1A_0\cos(\alpha_1-\alpha_0)}+\cdots+$$

$$\left. +\frac{m_n\omega^2 A_n\left[A_1\cos(\alpha_n-\alpha_1)-A_0\cos(\alpha_n-\alpha_0)\right]}{A_1^2+A_0^2-2A_1A_0\cos(\alpha_1-\alpha_0)}\right\},$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$r_k = -\frac{1}{\omega}\left\{ \frac{m_k\omega^2 A_k\left[A_k\sin(\alpha_k-\alpha_k)-A_{k-1}\sin(\alpha_k-\alpha_{k-1})\right]}{A_k^2+A_{k-1}^2-2A_kA_{k-1}\cos(\alpha_k-\alpha_{k-1})}+\cdots+ \right.$$

$$\left. +\frac{m_n\omega^2 A_n\left[A_k\sin(\alpha_n-\alpha_k)-A_{k-1}\sin(\alpha_n-\alpha_{k-1})\right]}{A_k^2+A_{k-1}^2-2A_kA_{k-1}\cos(\alpha_k-\alpha_{k-1})}\right\},$$

$$c_k = \left\{ \frac{m_k\omega^2 A_k\left[A_k\cos(\alpha_k-\alpha_k)-A_{k-1}\cos(\alpha_k-\alpha_{k-1})\right]}{A_k^2+A_{k-1}^2-2A_kA_{k-1}\cos(\alpha_k-\alpha_{k-1})}+\cdots+ \right. \tag{19}$$

$$\left. +\frac{m_n\omega^2 A_n\left[A_k\cos(\alpha_k-\alpha_{k-1})-A_{k-1}\cos(\alpha_k-\alpha_{k-1})\right]}{A_k^2+A_{k-1}^2-2A_kA_{k-1}\cos(\alpha_k-\alpha_{k-1})}\right\},$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$r_n = -\frac{m_n\omega^2 A_n\left[A_n\sin(\alpha_n-\alpha_n)-A_{n-1}\sin(\alpha_n-\alpha_{n-1})\right]}{\left[A_n^2+A_{n-1}^2-2A_nA_{n-1}\cos(\alpha_n-\alpha_{n-1})\right]\omega},$$

$$c_n = \frac{m_n\omega^2 A_n\left[A_n\cos(\alpha_n-\alpha_n)-A_{n-1}\cos(\alpha_n-\alpha_{n-1})\right]}{A_n^2+A_{n-1}^2-2A_nA_{n-1}\cos(\alpha_n-\alpha_{n-1})}. \tag{20}$$

Для систем, у которых граничная масса m_n закреплена с помощью элемента жесткости c_{n+1} и сопротивления перемещению r_{n+1}, можно построить алгоритм вычисления параметров системы дифференциальных уравнений, используя последовательный способ решения, изложенный для систем со свободным колебанием граничной массы. Рассмотрим данный способ решения задачи на примере колебаний двухмассовой системы (рисунок *г*).

Уравнения движения, задающие колебания масс m_1 и m_2, представляют собой систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} m_1\ddot{y}_1 + r_1\dot{y}_1 + c_1y_1 + r_2(\dot{y}_1-\dot{y}_2) + c_2(y_1-y_2) = r_1\dot{y}_0 + c_1y_0, \\ m_2\ddot{y}_2 + r_2(\dot{y}_2-\dot{y}_1) + c_2(y_2-y_1) - r_3\dot{y}_2 - c_3y_2 = 0, \\ r_3\dot{y}_2 + c_3y_2 = f\sin(\omega t+\beta). \end{cases} \tag{21}$$

Раскроем третье равенство системы (21), подставив значения y_1, y_2 в виде гармонических функций. В результате получим

$$r_3\omega A_2\left(\cos\omega t\cos\alpha_2-\sin\omega t\sin\alpha_2\right)+c_3A_2\left(\sin\omega t\cos\alpha_2+\cos\omega t\sin\alpha_2\right)=$$
$$=f\left(\sin\omega t\cos\beta+\cos\omega t\sin\beta\right).$$

При разделении уравнения на синусные и косинусные составляющие оно преобразуется в систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases}-r_3\omega A_2\sin\alpha_2+c_3A_2\cos\alpha_2=f\cos\beta,\\ r_3\omega A_2\cos\alpha_2+c_3A_2\sin\alpha_2=f\sin\beta.\end{cases}\tag{22}$$

Решением системы (22) будут функции

$$r_3=-\frac{f\sin\left(\alpha_2-\beta\right)}{A_2},\quad c_3=\frac{f\cos\left(\alpha_2-\beta\right)}{A_2}.$$

Если сложить правые и левые части второго и третьего уравнений системы (21) и с полученным результатом проделать такие преобразования, как и для третьего уравнения, то получим систему уравнений, аналогичную системе (9):

$$\begin{cases}-r_2\omega\left(A_2\sin\alpha_2-A_1\sin\alpha_1\right)+c_2\left(A_2\cos\alpha_2-A_1\cos\alpha_1\right)=\\ \qquad=m_2\omega^2A_2\cos\alpha_2+f\cos\beta,\\ r_2\omega\left(A_2\cos\alpha_2-A_1\cos\alpha_1\right)+c_2\left(A_2\sin\alpha_2-A_1\sin\alpha_1\right)=\\ \qquad=m_2\omega^2A_2\sin\alpha_2+f\sin\beta.\end{cases}\tag{23}$$

Используя метод Крамера, вычисляем определители:

$$\Delta=\begin{pmatrix}-\left(A_2\sin\alpha_2-A_1\sin\alpha_1\right) & \left(A_2\cos\alpha_2-A_1\cos\alpha_1\right)\\ \left(A_2\cos\alpha_2-A_1\cos\alpha_1\right) & \left(A_2\sin\alpha_2-A_1\sin\alpha_1\right)\end{pmatrix}=-\left[A_2^2+A_1^2-2A_1A_2\cos\left(\alpha_2-\alpha_1\right)\right],$$

$$\Delta r=\begin{pmatrix}\left(f\cos\beta+m_2\omega^2A_2\cos\alpha_2\right) & \left(A_2\cos\alpha_2-A_1\cos\alpha_1\right)\\ \left(f\sin\beta+m_2\omega^2A_2\sin\alpha_2\right) & \left(A_2\sin\alpha_2-A_1\sin\alpha_1\right)\end{pmatrix}=$$

$$=f\left[A_2\sin\left(\alpha_2-\beta\right)-A_1\sin\left(\alpha_1-\beta\right)\right]+m_2\omega^2\left[A_2^2\sin\left(\alpha_2-\alpha_2\right)-A_2A_1\sin\left(\alpha_2-\alpha_1\right)\right],$$

$$\Delta c=\begin{pmatrix}-\left(A_2\sin\alpha_2-A_1\sin\alpha_1\right) & \left(f\cos\beta+m_2\omega^2A_2\cos\alpha_2\right)\\ \left(A_2\cos\alpha_2-A_1\cos\alpha_1\right) & \left(f\sin\beta+m_2\omega^2A_2\sin\alpha_2\right)\end{pmatrix}=$$

$$=-f\left[A_2\cos\left(\alpha_2-\beta\right)-A_1\cos\left(\alpha_1-\beta\right)\right]-m_2\omega^2\left[A_2^2\cos\left(\alpha_2-\alpha_2\right)-A_2A_1\sin\left(\alpha_2-\alpha_1\right)\right],$$

откуда

$$r_2=\frac{\Delta r}{\Delta}=-\frac{f\left[A_2\sin\left(\alpha_2-\beta\right)-A_1\sin\left(\alpha_1-\beta\right)\right]}{\left[A_2^2+A_1^2-2A_1A_2\cos\left(\alpha_2-\alpha_1\right)\right]\omega}+\frac{m_2\omega^2A_2\left[A_2\sin\left(\alpha_2-\alpha_2\right)-A_1\sin\left(\alpha_2-\alpha_1\right)\right]}{\left[A_2^2+A_1^2-2A_1A_2\cos\left(\alpha_2-\alpha_1\right)\right]\omega},$$

$$c_2=\frac{\Delta c}{\Delta}=\frac{f\left[A_2\cos\left(\alpha_2-\beta\right)-A_1\cos\left(\alpha_1-\beta\right)\right]}{A_2^2+A_1^2-2A_1A_2\cos\left(\alpha_2-\alpha_1\right)}+\frac{m_2\omega^2A_2\left[A_2\cos\left(\alpha_2-\alpha_2\right)-A_1\cos\left(\alpha_2-\alpha_1\right)\right]}{A_2^2+A_1^2-2A_1A_2\cos\left(\alpha_2-\alpha_1\right)}.$$

Применяя прием, как и при решении уравнений (23), получаем систему

$$\begin{cases}-r_1\omega\left(A_1\sin\alpha_1-A_0\sin\alpha_0\right)+c_1\left(A_1\cos\alpha_1-A_0\cos\alpha_0\right)=m_1\omega^2A_1\cos\alpha_1+\\ \qquad+m_2\omega^2A_2\cos\alpha_2+f\cos\beta,\\ r_1\omega\left(A_1\cos\alpha_1-A_0\cos\alpha_0\right)+c_1\left(A_1\sin\alpha_1-A_0\sin\alpha_0\right)=m_1\omega^2A_1\sin\alpha_1+\\ \qquad+m_2\omega^2A_2\sin\alpha_2+f\sin\beta,\end{cases}$$

решением которой будут следующие функции:

$$r_1=-\left\{\frac{m_1\omega^2 A_1\left[A_1\sin(\alpha_1-\alpha_1)-A_0\sin(\alpha_1-\alpha_0)\right]}{\left[A_1^2+A_0^2-2A_1A_0\cos(\alpha_1-\alpha_0)\right]\omega}+\right.$$

$$\left.+\frac{m_2\omega^2 A_2\left[A_1\sin(\alpha_2-\alpha_1)-A_0\sin(\alpha_2-\alpha_0)\right]}{\left[A_1^2+A_0^2-A_1A_0\cos(\alpha_1-\alpha_0)\right]\omega}+\frac{f\left[A_1\sin(\alpha_1-\beta)-A_0\sin(\alpha_0-\beta)\right]}{\left[A_1^2+A_0^2-2A_1A_0\cos(\alpha_1-\alpha_0)\right]\omega}\right\},$$

$$c_1=\frac{m_1\omega^2\left[A_1^2\cos(\alpha_1-\alpha_1)-A_1A_0\cos(\alpha_1-\alpha_0)\right]}{A_1^2+A_0^2-2A_1A_0\cos(\alpha_1-\alpha_0)}+$$

$$\left.+\frac{m_2\omega^2\left[A_2A_1\cos(\alpha_2-\alpha_1)-A_2A_0\cos(\alpha_2-\alpha_0)\right]}{A_1^2+A_0^2-2A_1A_0\cos(\alpha_1-\alpha_0)}+\frac{f\left[A_1\cos(\alpha_1-\beta)-A_0\cos(\alpha_0-\beta)\right]}{A_1^2+A_0^2-2A_1A_0\cos(\alpha_1-\alpha_0)}\right\}.$$

Для многомассового объекта, структурная схема которого приведена на рисунке *б*, система дифференциальных уравнений будет иметь вид

$$\begin{cases} m_1\ddot{y}_1+r_1\dot{y}_1+c_1y_1+r_2(\dot{y}_1-\dot{y}_2)+c_2(y_1-y_2)=r_1\dot{y}_0+c_1y_0,\\ m_2\ddot{y}_2+r_2(\dot{y}_2-\dot{y}_1)+c_2(y_2-y_1)-r_3(\dot{y}_3-\dot{y}_2)-c_3(y_3-y_2)=0,\\ \quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\\ m_k\ddot{y}_k+r_k(\dot{y}_k-\dot{y}_{k-1})+c_k(y_k-y_{k-1})-r_{k+1}(\dot{y}_{k+1}-\dot{y}_k)-c_{k+1}(y_{k+1}-y_k)=0,\\ \quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\\ m_{n-1}\ddot{y}_{n-1}+r_{n-1}(\dot{y}_{n-1}-\dot{y}_{n-2})+c_{n-1}(y_{n-1}-y_{n-2})-r_n(\dot{y}_n-\dot{y}_i)-c_n(y_n-y_{n-1})=0,\\ m_n\ddot{y}_n+r_n(\dot{y}_n-\dot{y}_{n-1})+c_n(y_n-y_{n-1})-r_{n+1}\dot{y}_n-c_{n+1}y_n=0,\\ r_{n+1}\dot{y}_n+c_{n+1}y_n=f\sin(\omega t+\beta). \end{cases} \tag{24}$$

Преобразуем систему (24), как и в предыдущем случае, в алгебраическую, содержащую $2n+2$ уравнений:

$$\begin{cases} -r_1\omega(A_1\sin\alpha_1-A_0\sin\alpha_0)+c_1(A_1\cos\alpha_1-A_0\cos\alpha_0)+\\ +r_2\omega(A_2\sin\alpha_2-A_1\sin\alpha_1)-c_2(A_2\cos\alpha_2-A_1\cos\alpha_1)=m_1\omega^2A_1\cos\alpha_1,\\ r_1\omega(A_1\cos\alpha_1-A_0\cos\alpha_0)+c_1(A_1\sin\alpha_1-A_0\sin\alpha_0)-\\ -r_2\omega(A_2\cos\alpha_2-A_1\cos\alpha_1)-c_2(A_2\sin\alpha_2-A_1\sin\alpha_1)=m_1\omega^2A_1\sin\alpha_1, \end{cases} \tag{25}$$

$$\begin{cases} -r_2\omega(A_2\sin\alpha_2-A_1\sin\alpha_1)+c_2(A_2\cos\alpha_2-A_1\cos\alpha_1)+\\ +r_3\omega(A_3\sin\alpha_3-A_2\sin\alpha_2)-c_3(A_3\cos\alpha_3-A_2\cos\alpha_2)=m_2\omega^2A_2\cos\alpha_2,\\ r_2\omega(A_2\cos\alpha_2-A_1\cos\alpha_1)+c_2(A_2\sin\alpha_2-A_1\sin\alpha_1)-\\ -r_3\omega(A_3\cos\alpha_3-A_2\cos\alpha_2)-c_3(A_3\sin\alpha_3-A_2\sin\alpha_2)=m_2\omega^2A_2\sin\alpha_2, \end{cases} \tag{26}$$

$$\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots$$

$$\begin{cases} -r_k\omega(A_k\sin\alpha_k-A_{k-1}\sin\alpha_{k-1})+c_k(A_k\cos\alpha_k-A_{k-1}\cos\alpha_{k-1})+\\ +r_{k+1}\omega(A_{k+1}\sin\alpha_{k+1}-A_k\sin\alpha_k)-c_{k+1}(A_{k+1}\cos\alpha_{k+1}-A_k\cos\alpha_k)=m_k\omega^2A_k\cos\alpha_k,\\ r_k\omega(A_k\cos\alpha_k-A_{k-1}\cos\alpha_{k-1})+c_k(A_k\sin\alpha_k-A_{k-1}\sin\alpha_{k-1})-\\ -r_{k+1}\omega(A_{k+1}\cos\alpha_{k+1}-A_k\cos\alpha_k)-c_{k+1}(A_{k+1}\sin\alpha_{k+1}-A_k\sin\alpha_k)=m_k\omega^2A_k\sin\alpha_k, \end{cases} \tag{27}$$

$$\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots$$

$$\begin{cases} -r_{n-1}\omega\left(A_{n-1}\sin\alpha_{n-1}-A_{n-2}\sin\alpha_{n-2}\right)+c_{n-1}\left(A_{n-1}\cos\alpha_{n-1}-\right. \\ \left.-A_{n-2}\cos\alpha_{n-2}\right)+r_n\omega\left(A_n\sin\alpha_n-A_{n-1}\sin\alpha_{n-1}\right)- \\ -c_{n-1}\left(A_n\sin\alpha_n-A_{n-1}\sin\alpha_{n-1}\right)=m_{n-1}\omega^2A_{n-1}\cos\alpha_{n-1}, \\ r_{n-1}\omega\left(A_{n-1}\cos\alpha_{n-1}-A_{n-2}\cos\alpha_{n-2}\right)+c_{n-1}\left(A_{n-1}\sin\alpha_{n-1}-\right. \\ \left.-A_{n-2}\sin\alpha_{n-2}\right)-r_n\omega\left(A_n\cos\alpha_n-A_{n-1}\cos\alpha_{n-1}\right)- \\ -c_{n-1}\left(A_n\cos\alpha_n-A_{n-1}\cos\alpha_{n-1}\right)=m_{n-1}\omega^2A_{n-1}\sin\alpha_{n-1}, \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases} -r_n\omega\left(A_n\sin\alpha_n-A_{n-1}\sin\alpha_{n-1}\right)+c_n\left(A_n\cos\alpha_n-A_{n-1}\cos\alpha_{n-1}\right)+ \\ +r_{n+1}\omega A_n\sin\alpha_n-c_{n+1}A_n\cos\alpha_n=m_n\omega^2A_n\cos\alpha_n, \\ r_n\omega\left(A_n\cos\alpha_n-A_{n-1}\cos\alpha_{n-1}\right)+c_n\left(A_n\sin\alpha_n-A_{n-1}\sin\alpha_{n-1}\right)- \\ -r_{n+1}\omega A_n\cos\alpha_n-c_{n+1}A_n\sin\alpha_n=m_n\omega^2A_n\sin\alpha_n, \end{cases} \tag{29}$$

$$\begin{cases} -r_{n+1}\omega A_n\sin\alpha_n+c_{n+1}A_n\cos\alpha_n=f\cos\beta \\ r_{n+1}\omega A_n\cos\alpha_n+c_{n+1}A_n\sin\alpha_n=f\sin\beta. \end{cases} \tag{30}$$

Решением системы (30) будут функции

$$r_{n+1}=-\frac{fA_n\sin\left(\alpha_n-\beta\right)}{\omega A_n^2},\ c_{n+1}=\frac{fA_n\cos\left(\alpha_n-\beta\right)}{A_n^2}. \tag{31}$$

Просуммируем левую и правую части равенств систем (29) и (30). В результате получим соотношения

$$\begin{cases} -r_n\omega\left(A_n\sin\alpha_n-A_{n-1}\sin\alpha_{n-1}\right)+c_n\left(A_n\cos\alpha_n-A_{n-1}\cos\alpha_{n-1}\right)=f\cos\beta+m_n\omega^2A_n\cos\alpha_n, \\ r_n\omega\left(A_n\cos\alpha_n-A_{n-1}\cos\alpha_{n-1}\right)+c_n\left(A_n\sin\alpha_n-A_{n-1}\sin\alpha_{n-1}\right)=f\sin\beta+m_n\omega^2A_n\sin\alpha_n, \end{cases}$$

решение которых с точностью до индексов совпадет с решением системы (23):

$$r_n=-\frac{f\left[A_n\sin\left(\alpha_n-\beta\right)-A_{n-1}\sin\left(\alpha_{n-1}-\beta\right)\right]}{\left[A_n^2+A_{n-1}^2-2A_nA_{n-1}\cos\left(\alpha_n-\alpha_{n-1}\right)\right]\omega}+\frac{m_n\omega^2A_n\left[A_n\sin\left(\alpha_n-\alpha_n\right)-A_{n-1}\sin\left(\alpha_n-\alpha_{n-1}\right)\right]}{\left[A_n^2+A_{n-1}^2-2A_nA_{n-1}\cos\left(\alpha_n-\alpha_{n-1}\right)\right]\omega},$$

$$c_n=\frac{f\left[A_n\cos\left(\alpha_n-\beta\right)-A_{n-1}\cos\left(\alpha_{n-1}-\beta\right)\right]}{A_n^2+A_{n-1}^2-2A_nA_{n-1}\cos\left(\alpha_n-\alpha_{n-1}\right)}+\frac{m_n\omega^2A_n\left[A_n\cos\left(\alpha_n-\alpha_n\right)-A_{n-1}\cos\left(\alpha_n-\alpha_{n-1}\right)\right]}{A_n^2+A_{n-1}^2-2A_nA_{n-1}\cos\left(\alpha_n-\alpha_{n-1}\right)}. \tag{32}$$

Выполнив последовательное решение систем (25) – (28), будем иметь следующий результат:

$$r_{n-1}=-\frac{f\left[A_{n-1}\sin\left(\alpha_{n-1}-\beta\right)-A_{n-2}\sin\left(\alpha_{n-2}-\beta\right)\right]}{\left[A_{n-1}^2+A_{n-2}^2-2A_{n-1}A_{n-2}\cos\left(\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2}\right)\right]\omega}+$$

$$+\frac{m_{n-1}\omega^2A_{n-1}\left[A_{n-1}\sin\left(\alpha_{n-1}-\alpha_{n-1}\right)-A_{n-2}\sin\left(\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2}\right)\right]}{\left[A_{n-1}^2+A_{n-2}^2-2A_{n-1}A_{n-2}\cos\left(\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2}\right)\right]\omega}+$$

$$+\frac{m_n\omega^2A_n\left[A_{n-1}\sin\left(\alpha_n-\alpha_{n-1}\right)-A_{n-2}\sin\left(\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2}\right)\right]}{\left[A_{n-1}^2+A_{n-2}^2-2A_{n-1}A_{n-2}\cos\left(\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2}\right)\right]\omega},$$

$$c_{n-1}=\frac{f\left[A_{n-1}\cos\left(\alpha_{n-1}-\beta\right)-A_{n-2}\cos\left(\alpha_{n-2}-\beta\right)\right]}{\left[A_{n-1}^2+A_{n-2}^2-2A_{n-1}A_{n-2}\cos\left(\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2}\right)\right]\omega}+$$

$$+\frac{m_{n-1}\omega^2 A_{n-1}\left[A_{n-1}\cos\left(\alpha_{n-1}-\alpha_{n-1}\right)-A_{n-2}\cos\left(\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2}\right)\right]}{A_{n-1}^2+A_{n-2}^2-2A_{n-1}A_{n-2}\cos\left(\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2}\right)}+$$

$$+\frac{m_n\omega^2 A_n\left[A_{n-1}\cos\left(\alpha_n-\alpha_{n-1}\right)-A_{n-2}\cos\left(\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2}\right)\right]}{A_{n-1}^2+A_{n-2}^2-2A_{n-1}A_{n-2}\cos\left(\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2}\right)}, \tag{33}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$r_k=-\frac{f\left[A_k\sin\left(\alpha_k-\beta\right)-A_{k-1}\sin\left(\alpha_{k-1}-\beta\right)\right]}{\left[A_k^2+A_{k-1}^2-2A_kA_{k-1}\cos\left(\alpha_k-\alpha_{k-1}\right)\right]\omega}+\frac{\omega^2\sum_{i=k}^n m_iA_i\left[A_k\sin\left(\alpha_i-\alpha_k\right)-A_{k-1}\sin\left(\alpha_i-\alpha_{k-1}\right)\right]}{\left[A_k^2+A_{k-1}^2-2A_kA_{k-1}\cos\left(\alpha_k-\alpha_{k-1}\right)\right]\omega},$$

$$c_k=\frac{f\left[A_k\cos\left(\alpha_k-\beta\right)-A_{k-1}\cos\left(\alpha_{k-1}-\beta\right)\right]}{A_k^2+A_{k-1}^2-2A_kA_{k-1}\cos\left(\alpha_k-\alpha_{k-1}\right)}+$$

$$+\frac{\omega^2\sum_{i=k}^n m_iA_i\left[A_k\cos\left(\alpha_i-\alpha_k\right)-A_{k-1}\cos\left(\alpha_i-\alpha_{k-1}\right)\right]}{A_k^2+A_{k-1}^2-2A_kA_{k-1}\cos\left(\alpha_k-\alpha_{k-1}\right)}, \tag{34}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$r_1=-\frac{f\left[A_1\sin\left(\alpha_1-\beta\right)-A_0\sin\left(\alpha_0-\beta\right)\right]}{\left[A_1^2+A_0^2-2A_1A_0\cos\left(\alpha_1-\alpha_0\right)\right]\omega}+\frac{\omega^2\sum_{i=1}^n m_iA_i\left[A_1\sin\left(\alpha_i-\alpha_1\right)-A_0\sin\left(\alpha_i-\alpha_0\right)\right]}{\left[A_1^2+A_0^2-2A_1A_0\cos\left(\alpha_1-\alpha_0\right)\right]\omega},$$

$$c_1=\frac{f\left[A_1\cos\left(\alpha_1-\beta\right)-A_0\cos\left(\alpha_0-\beta\right)\right]}{A_1^2+A_0^2-2A_1A_0\cos\left(\alpha_1-\alpha_0\right)}+\frac{\omega^2\sum_{i=1}^n m_iA_i\left[A_1\sin\left(\alpha_i-\alpha_1\right)-A_0\sin\left(\alpha_i-\alpha_0\right)\right]}{A_1^2+A_0^2-2A_1A_0\cos\left(\alpha_1-\alpha_0\right)}. \tag{35}$$

Таким образом, чтобы вычислить параметры многомассовых моделей, схемы которых приведены на рисунке *а*, *б*, необходимо в процессе эксперимента измерить функции перемещения каждой из масс, а для системы, у которой граничная масса закреплена неподвижно, измерить величину силы, возникшей от перемещения масс. По полученным результатам вычислить амплитуды A_k и фазы α_k, используя формулы (18)–(20) либо (31)–(35) (в зависимости от типа системы), определить коэффициенты жесткости и демпфирования и подставив их в уравнения модели выполнить процедуру верификации.

Правила проведения стендовых испытаний. Анализ полученных формул для вычисления параметров многомассовой колебательной системы свидетельствует о том, что она обладает памятью. На колебания каждой из масс воздействуют силы инерции остальных масс. Следовательно, мы рассматриваем колебания взаимно связанных элементов. Поэтому информация, полученная в режиме статических испытаний данных систем, не будет отражать динамику колебаний исследуемого объекта. Стендовые испытания необходимо проводить в режиме вынужденных колебаний. При этом в качестве вынуждающей должна быть использована сила, полученная от воздействия на первое звено элементов подрессоривания функцией перемещения (4). Тогда вынуждающая сила (3) вызовет перемещение $y_1(t)$ массы m_1, а реакция на него будет вынуждающей силой для движения массы m_2 и т. д. Колебания масс в этом случае будут неустановившимися, а их процесс – переходным. Процедуру измерения можно проводить по окончании переходного процесса, длительность которого называется временем памяти динамической системы. По завершении переходного процесса все n масс будут колебаться в установившемся режиме.

При использовании приведенных выше формул вычислим r_k, c_k, и, подставив полученные параметры в модель, выполним виртуальные испытания. По результатам сравнительного анализа (виртуальных и стендовых испытаний) делаем вывод об адекватности модели реальному объекту.

Если в результате сравнения модель удовлетворяет требованиям точности, то ее можно использовать для проведения прочностных расчетов, анализа вибронагруженности и для других видов исследований, необходимых для получения заключения о пригодности проектируемого изделия к изготовлению и проведению заключительных натурных испытаний в условиях эксплуатации.

Заключение. Изложены методы вычисления параметров математического описания динамики колебаний технических систем, для которых в качестве математической модели используются дифференциальные уравнения. Такую модель можно построить, применяя методы приведения уравнения к обобщенной системе координат, т. е. к уравнению Лагранжа второго рода. Источником информации для идентификации параметров являются результаты измерений, проведенных при испытании реальной конструкции.

Использование для экспериментального исследования многомассовых систем в качестве тестовых сигналов гармонических функций позволило легко перейти от систем дифференциальных уравнений к алгебраическим, что значительно сократило объем вычислений и упростило решение задачи. Кроме того, применение гармонических сигналов при проведении стендовых испытаний дает возможность построить математическую модель для систем со слабой нелинейностью, используя для этого метод гармонической линеаризации, а для нелинейных систем с памятью – матричный оператор, описывающий математическую зависимость выходной функции от входа [7].

Получены формулы вычисления коэффициентов жесткости и демпфирования упругих элементов, которые учитывают взаимную зависимость колебаний отдельных масс, вызывающих резонансные явления. Рассмотрены два типа систем, содержащих счетное число колебательных элементов. У первого типа граничная масса в режиме вынужденных колебаний выполняет свободные колебания, а у второго она закреплена с использованием упругого и демпфирующего элементов. Результаты работы могут быть использованы при верификации компьютерных многомассовых моделей объектов машиностроения и моделировании машиностроительных конструкций с использованием конечно-элементных моделей.

Список использованных источников

1. Афанасьева, О. В.Некоторые свойства движения многомассовых систем. Тр. междунар. конференции KDS-98. – Польша, Щетин, 1998.

2. Пановко, Я. Г. Введение в теорию механических колебаний / Я. Г. Пановко. – М.: Наука, 1991.

3. Сурьянов, Н. Г. Теоретические основы динамики машин / Н. Г. Сурьянов, А. Ф. Дащенко, Белоус. – Одесса, ОГПУ, 2000, 306 с.

4. Ден-Гартог, Дж. П. Механические колебания. М.: Физматгиз, 1960, 580 с.

5. Ротенберг, Р. В. Подвеска автомобиля и его колебания / Р. В. Ротенберг. – М.: Машгиз, 1960.

6. Кончак, В. С. Методы определения динамических характеристик упругих элементов подвески по экспериментальным данным / В. С.Кончак, А. Н. Колесникович, С. П. Лазакович, С. В. Хитриков // Весці НАН Беларусі. Сер. фiз-тэхн. навук. – 2008 – № 2. С. 20–25.

7. Кончак, В. С. Верификация компьютерных моделей механических конструкций с испльзованием результатов эксперимента / В. С. Кончак, А. А. Назаренко // Весці НАН Беларусі. Сер. фiз-тэхн. навук. – 2016 – № 3. С. 35–45.

References

1. Afanas’eva, O. V. (1998), ″Some properties of motion of multibody systems″, *Trudy mezhdunarodnoi konferentsii KDS-98* [Proceedings of the International Conference KDS-98], Szczecin, Poland.

2. Panovko, Ja. G. (1991), *Vvedenie v teoriyu mekhanicheskikh kolebanii* [Introduction to the Theory of mechanical vibrations], Nauka, Moscow, RU.

3. Sur’yanov, N. G., Dashchenko, A. F. and Belous, P. A. (2000), *Teoreticheskie osnovy dinamiki mashin* [Theoretical foundations of dynamics of machines], National Polytechnic University, Odessa, UA.

4. Den Hartog, J. P. (1960), *Mekhanicheskie kolebaniya* [Mechanical Vibrations], Fizmatgiz, Moscow, RU.

5. Rotenberg, R. V. (1960), *Podveska avtomobilya i ego kolebaniya* [Suspension of the car and his fluctuations], Mashgiz, Moscow, RU.

6. Konchak, V. S., Kolesnikovich, A. N., Lazakovich, S. P. and Hitrikov, S. V. (2008), ″Methods of determination of dynamic parameters of elastic elements of suspension by experimental data″, *Vestsi NAN Belarusi. Ser. fiz.-tekhn. navuk* [Proceedings of the National academy of science of Belarus. Physico-technical series], no. 2, pp. 20–25.

7. Konchak, V. S. and Nazarenko, A. A. (2016), ″Verification of computer models of mechanical structures using experimental results″, *Vestsi NAN Belarusi. Ser. fiz.-tekhn. navuk* [Proceedings of the National Academy of Science of Belarus. Physico-technical series], no. 3, pp. 35–45.

Информация об авторах

Кончак Вячеслав Станиславович – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник. Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси (220072, г. Минск, ул. Академическая, 12, Беларусь). Тел.: +375-17-284-24-46; +375-29-766-69-81.

Назаренко Андрей Алексеевич – аспирант. Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси (220012, г. Минск, ул. Сурганова, 6, Беларусь). Тел.: +375-29-762-62-62.

Information about the authors

Konchak Vjacheslav Stanislavovich – Ph. D. (Engineering), Leading Researcher. The Joint Institute of Mechanical Engineering of the National Academy of Sciences of Belarus (12, Akademicheskaya str., 220072, Minsk, Belarus). Tel.: +375-17-284-24-48; +375-29-766-69-81.

Nazarenko Andrej Alekseevich – postgraduate student. The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (6, Surganova str., 220012, Minsk, Belarus). Tel.: +375-29-762-62-62.

Для цитирования

Кончак, В. С. Методика подготовки многомассовых компьютерных моделей к верификации / В. С. Кончак, А. А. Назаренко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз-тэхн. навук. – 2016. – № 4. – С. 49–60.

Forcitation

Konchak V. S., Nazarenko A. A. A method for preparation of multimass computer models for verification procedure. Proceedings of the National academy of science of Belarus. physical-technicalseries. 2016, no. 4, pp. 49–60.