

ISSN 1561-8358 (print)

УДК 539.3

Поступила в редакцию 09.03.2017

Received 09.03.2017

**О. Л. Швед***Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси,  
Минск, Беларусь***ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ  
ПРИ ТЕЧЕНИИ НЕЛИНЕЙНО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА**

**Аннотация.** Рассматривается вопрос о выборе двух скалярных параметров соответственно двух определяющих уравнений при течении в конкретной модели нелинейной упругопластичности для ограничения роста упругой анизотропии. Упругие свойства материала описываются обобщенным законом упругости Мурнагана. Модель построена с привлечением принципа потенциальности определяющего уравнения в скоростях напряжений, которое позволяет определить девиаторные сечения поверхности текучести. Для упрощения материал предполагается идеально упругопластическим. Величины первого и второго параметров представляют собой относительные части рассеиваемой удельной мощности деформации и проекции на поверхность девиаторного сечения поверхности текучести критериального девиатор-оператора. Они входят в дифференциальные определяющие уравнения для удельной потенциальной энергии упругой деформации и тензора напряжений Коши. В случае, когда первый параметр не зависит от тензора скорости деформаций, из системы определяющих уравнений получено минимальное значение зависящего от него второго параметра. Такой выбор вносит слишком большие погрешности в условие двухосности напряженного состояния при численном моделировании экспериментов Бриджмена при двухосном сжатии. Величина второго параметра должна быть существенно меньше. При выполнении этого требования в условиях зависимости первого параметра от угла между вектором нормали к поверхности девиаторного сечения и «вектором» скорости деформаций с учетом базовых, одноосных экспериментов реализован выбор первого параметра. Такой выбор указанных параметров значительно ограничивает рост упругой анизотропии, как показано при численном моделировании двухосных нагружений. Он может быть уточнен при наличии дополнительных экспериментальных данных по этим нагружениям.

**Ключевые слова:** упругопластичность, закон Мурнагана, критерий разрушения, определяющее уравнение, численное моделирование

**Для цитирования.** Швед, О. Л. Выбор параметров определяющих уравнений при течении нелинейно упругопластического материала / О. Л. Швед // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2017. – № 3. – С. 47–55.

**O. L. Shved***United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus***SETTING DETERMINING EQUATIONS FOR THE FLOW NONLINEAR ELASTIC-PLASTIC MATERIAL**

**Abstract.** The question of the choice of two scalar parameters, respectively, the two defining equations of the flow of the particular model of a nonlinear elasticity-plasticity to limit the growth of elastic anisotropy is considered. The elastic properties of the material are described by the generalized Murnaghan law of elasticity. The model is constructed with the assistance of the potentiality principle of defining equations in the stress rate, which lets determine the yield surface deviator cross-section. To simplify the case the material assumed to be perfectly elastic-plastic. The values of the first and second parameters are relative parts of dissipative specific deformation power and projections on the surface of deviator section of yield surface of criterion deviator operator. They are part of the differential equations for determining a specific potential energy of elastic deformation and the Cauchy stress tensor. In the case when the first parameter is independent on the strain rate tensor, the system of equations generates the minimum value of the parameter. This choice makes too large errors in the condition of biaxial state of stress in numerical modeling of Bridgman's experiments under biaxial compression. The value of the second parameter has to be substantially smaller. The first parameter is chosen while carrying out of this requirement when the first parameter depends on the angle between the normal vector to the surface deviator section and "vector" of strain rate (in basic, epitaxial experiments). The choice of these parameters significantly limits the growth of elastic anisotropy, as it is shown by numerical simulation of biaxial loading. It can be updated by use of additional experimental data of these loadings.

**Keywords:** elastic-plastic, Murnaghan law, failure criterion, defining equation, numeral design

**For citation.** Shved O. L. Setting determining equations for the flow nonlinear elastic-plastic material. *Vestsi Natsyyanai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2017, no. 3, pp. 47–55 (in Russian).

**Введение.** Представленная в [1] модель нелинейно упругопластического материала является обобщением модели нелинейно упругого материала Мурнагана [2, 3] с привлечением принципа потенциальности определяющего уравнения в скоростях напряжений. Для упрощения будем предполагать материал идеально упругопластическим. Определяющие уравнения модели включают пять уравнений: для удельной потенциальной энергии упругой деформации – потенциала напряжений, напряжений в конечном и дифференциальном видах, а также уравнение для параметров анизотропии в дифференциальном виде. В последнее уравнение входит неотрицательный скаляр, характеризующий скорость роста упругой анизотропии вследствие пластической деформации. В этом уравнении предусмотрена возможность минимизации данного скаляра – параметра роста упругой анизотропии. Такая оптимизация необходима, потому что согласно полученному критерию причиной разрушения является упругая анизотропия [4]. В [5] предложена процедура минимизации для общего триклинного упругопластического материала. В дифференциальные уравнения для потенциала напряжений и напряжений в конечном и дифференциальном видах входят еще два параметра, требующие допустимого и рационального их определения. Целью настоящей работы является реализация такого выбора указанных величин параметров: относительной части рассеиваемой удельной мощности деформации и относительной части проекции на поверхность девиаторного сечения поверхности текучести критериального девиатора. Требуется исследовать возможность ограничения роста анизотропии при существовании зависимости для этих параметров и при ее отсутствии.

**Определяющие уравнения и базовые эксперименты.** Удельная потенциальная энергия упругой деформации представляется в виде [1]

$$\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + c, \quad (1)$$

где  $\vartheta_2, \vartheta_3$  – анизотропные структуры второй и третьей степени;  $c$  – минимальная постоянная, обеспечивающая условие  $\vartheta \geq 0$ , начальные значения параметров анизотропии  $\delta_j = 0$  ( $j = 1, 77$ ), и тогда  $\vartheta$  с точностью до постоянной переходит в изотропный потенциал  $\vartheta_0$

$$\begin{aligned} \vartheta_0 = & 4^{-1}(4^{-1}(-12\lambda - 8\mu + 9\nu_1 + 18\nu_2 + 8\nu_3)I_1 + 4^{-1}(2\lambda + 4\mu - 3\nu_1 - 10\nu_2 - 8\nu_3)I_1^2 + \\ & + (-2\mu + 3\nu_2 + 4\nu_3)I_2 - (\nu_2 + 2\nu_3)I_1I_2 + 12^{-1}(\nu_1 + 6\nu_2 + 8\nu_3)I_1^3 + 2\nu_3I_3), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\lambda, \mu$  – постоянные Ляме второго и  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  – третьего порядков,  $I_1, I_2, I_3$  – первый, второй и третий главные инварианты мер Коши – Грина  $\mathbf{G}$  и Фигнера  $\mathbf{F}$ . В [5] приведены представления  $\vartheta_2, \vartheta_3$  для общего триклинного обобщенного материала Мурнагана.

Из (1) получаем определяющее уравнение для тензора напряжений Коши [1]:

$$\mathbf{T} = 2L_3^{-1}\mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^T = \mathbf{T}_0 + \sum_j \delta_j \mathbf{T}_j \left( \mathbf{T}_0 = 2L_3^{-1}\mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial \vartheta_0}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^T, \mathbf{T}_j = 2L_3^{-1}\mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial (\vartheta_2 + \vartheta_3)}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^T \right), \quad (3)$$

где  $\mathbf{G} = \mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{F}_e$ , неособенный тензор  $\mathbf{F}_e = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}^T$  (согласно полярному разложению [3]) заменяет деформационный градиент,  $\mathbf{O}^T = \mathbf{O}^{-1}$ ,  $\mathbf{O}$  – собственно ортогональный тензор поворота, сопровождающий упругую деформацию,  $L_3$  – третий главный инвариант меры упругих искажений  $\mathbf{V}$ ,  $I_3 = L_3^2$  и по (2), (3)

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_0 = & 2(\sqrt{I_3})^{-1}(\varphi_0\mathbf{E} + \varphi_1\mathbf{F} + \varphi_2\mathbf{F}^2)(\varphi_0 = a_0I_3, \varphi_1 = b_0 + b_1I_1 + b_2I_1^2 + b_3I_2, \varphi_2 = c_0 + c_1I_1), \\ a_0 = & 2^{-1}\nu_3, \quad b_0 = 16^{-1}(-12\lambda - 8\mu + 9\nu_1 + 18\nu_2 + 8\nu_3), \quad b_1 = 8^{-1}(2\lambda - 3\nu_1 - 4\nu_2), \\ b_2 = & 16^{-1}(\nu_1 + 2\nu_2), \quad b_3 = -4^{-1}(\nu_2 + 2\nu_3), \quad c_0 = 4^{-1}(2\mu - 3\nu_2 - 4\nu_3), \quad c_1 = -b_3. \end{aligned} \quad (4)$$

Соотношения (1), (3) являются определяющими уравнениями в конечном виде, которые всегда имеют место. Материалы и некоторые данные по ним об упругих постоянных для закона Мурнагана, входящих в выражение для  $\mathbf{T}_0$ , представлены в [3, с. 157–159]. В численных экспериментах использован рекристаллизованный вольфрам. Напряжение текучести при растяжении и сжатии составляет 450 МПа. По нему определяется переход материала в пластическое состояние в остальных случаях нагружений.

Введем дифференциальные определяющие уравнения при течении в регулярной точке девиаторного сечения поверхности текучести.

Уравнение для тензора напряжений Коши имеет вид [1]

$$\overset{\Omega}{\mathbf{T}} = K(\mathbf{Q} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}\mathbf{N}), \quad (5)$$

где  $\overset{\Omega}{\mathbf{T}}$  – объективная производная по времени тензора  $\mathbf{T}$ ;  $K$  – не зависящий от тензора скорости деформаций  $\mathbf{D}$  малый (при  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \geq 0$ ) положительный скаляр;  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{D})$  – девиатор, определяющий критерий течения;  $\mathbf{N}$  – нормированный вектор нормали к поверхности текучести при векторной интерпретации симметричного девиатора тензора второго ранга. При  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} < 0$  скаляр  $K$  определяется, как указано в [1].

Критерий текучести можно формулировать как в виде  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} > 0$ , так и в более простом виде  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{N} > 0$ , поскольку тензор  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{D}$  является положительным [3]. Однако вычислять тензор  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{D})$  необходимо для определения величины  $\mathbf{N}$  и использования его в (5).

Уравнение для удельной потенциальной энергии упругой деформации полагаем

$$(L_3^{-1}\varepsilon)' = (1 - \alpha)\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \quad (\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \geq 0), \quad (L_3^{-1}\varepsilon)' = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \quad (\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} < 0), \quad (6)$$

где  $\alpha$  – близкая к единице относительная часть величины рассеиваемой удельной мощности деформации, определяемая в одноосных экспериментах. Переход от первого случая ко второму в (6) происходит непрерывным образом.

Уравнение для параметров анизотропии запишется как

$$\dot{\delta}_j = \beta k_j \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}_j \|\mathbf{T}_j\|^{-1} \quad (\mathbf{T}_j \neq 0, \beta \geq 0, (k_j = \pm 1) \vee (k_j = 0)), \quad \|\mathbf{T}_j\| = \sqrt{\mathbf{T}_j \cdot \mathbf{T}_j}, \quad \dot{\delta}_j = 0 \quad (\mathbf{T}_j = 0). \quad (7)$$

Тензоры  $\mathbf{T}_j$  в первом случае (7) взяты с учетом нормировки ( $\mathbf{T}_j \|\mathbf{T}_j\|^{-1} \cdot \mathbf{T}_j \|\mathbf{T}_j\|^{-1} = 1$ ), поскольку параметры  $\delta_j$  считаются равноправными. Девиатор  $\mathbf{N}$  задает направление действия пластической деформации, порождающей анизотропию. Скаляр  $\beta$  характеризует скорость роста анизотропии, поэтому называем его параметром ее роста.

Дифференцируя уравнения (1), (3) и подставляя в соотношения (5), (6) с использованием (7), получаем в общем случае систему одного тензорного и одного скалярного уравнений относительно неизвестных симметричного тензора  $\overset{\Omega}{\mathbf{V}}$  и скаляра  $\beta$ . Она сводится к системе семи скалярных уравнений относительно шести компонент в базисе  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$  производной меры упругих искажений и параметра роста анизотропии. Для удобства записи системы первые шесть уравнений умножаем на  $2^{-1}L_3$ , а последнее – на  $L_3$ . Решение системы находим по методу Крамера. Пусть  $\Delta$  – определитель матрицы системы уравнений,  $A_i$  ( $i = 1, 7$ ) – алгебраические дополнения седьмого столбца матрицы. В [5] для триклинного упругопластического материала определена процедура максимизации величины  $\Delta$ , и значение  $\beta$  получается минимальным по всем наборам  $k_j$ .

При векторной интерпретации симметричного тензора второго ранга девиаторы  $\mathbf{W}_1 = (\sqrt{6})^{-1}(\mathbf{E} - 3\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3)$ ,  $\mathbf{W}_2 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1\mathbf{c}_1)$ ,  $\mathbf{W}_3 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1)$ ,  $\mathbf{W}_4 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_1)$ ,  $\mathbf{W}_5 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_2)$  образуют ортонормированный базис пространства девиаторов напряжений. Скалярное произведение таких векторов понимается как двойное скалярное произведение тензоров ( $\mathbf{W}_i \cdot \mathbf{W}_i = 1$ ,  $\mathbf{W}_i \cdot \mathbf{W}_j = 0$ ,  $i, j = \overline{1, 5}$ ,  $i \neq j$ ).

Согласно указанным соотношениям, включая процедуру минимизации, выполнено численное моделирование базовых экспериментов – простого растяжения и простого сжатия, проведенных до момента разрушения согласно предложенному в [4] критерию. На рис. 1 изображены начальные и конечные кривые пластичности. Критериальную функцию разрушения  $\Phi = \Phi(\varphi)$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  будет удобнее выписать ниже. Она вычисляется по кривым пластичности. Отмечены малые и большие штрихи, соответствующие приращениям угла  $\varphi = \pi/6$  и сингулярным точкам кривых. Обход и нумерация участков происходит из точки процесса по часовой стрелке. Переход нуля функции для анизотропного материала по сравнению с изотропным на соседний участок означает разрушение: слева с 2 на 1, 3 и с 6 – на 1, 5, справа с 3 на 2, 4 и с 5 на 6, 4.

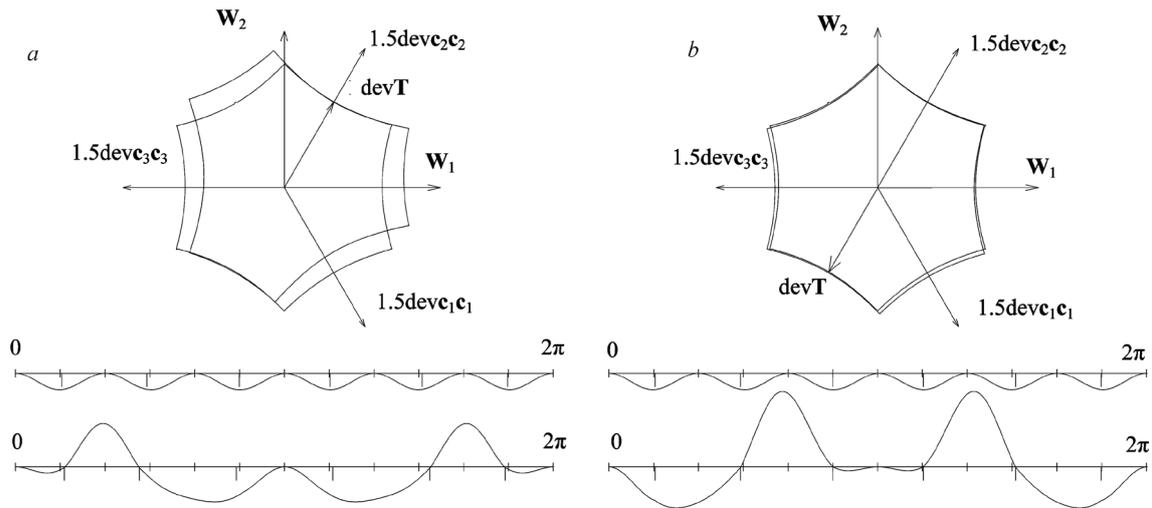


Рис. 1. Одноосное растяжение (a) и сжатие (b) по второй оси  
 Fig. 1. Uniaxial stretching (a) and compression (b) along the second axis

Наблюдается значительное уменьшение величины  $\beta$  приблизительно на три порядка по сравнению с тем случаем, когда ранее часть параметров анизотропии не учитывалась. Скаляр  $K$  в одноосных экспериментах найти нельзя, поэтому возникает вопрос об его определении. Необходимо также определить скаляр  $\alpha$  для произвольного нагружения. Как показали результаты численного моделирования в [6], стандартное задание  $\alpha$  постоянной величиной является неудовлетворительным. Отметим, что описать зависимость этой величины от напряженно-деформированного состояния и тем более от истории нагружения затруднительно. Здесь следует обратиться к двухосным нагружениям.

**Минимизация роста параметра анизотропии  $\beta$  при условии  $K = K(\alpha)$ .** Рассмотрим процедуру выбора параметра  $K$  в уравнении (5) при  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \geq 0$ , которая, возможно, позволит уменьшить величину параметра роста анизотропии  $\beta = \Delta_7(\Delta)^{-1}$  за счет минимизации величины  $\Delta_7$ . Эта процедура выполняется до минимизации величины  $\Delta$ .

Критериальный девиатор-оператор  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{D})$  вводится как О-производная девиатора  $\text{dev}\mathbf{T}$  (4), вычисленная при условии несжимаемости  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  по соотношению  $\mathbf{F}_e = \nabla \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{F}_e$ . Последнее уравнение задает тензор  $\mathbf{F}_e$ , заменяющий деформационный градиент в упругом состоянии.

При векторной интерпретации  $\mathbf{Q} = \sum_i q_i \mathbf{W}_i$ ,  $\mathbf{D} = \sum_i d_i \mathbf{W}_i$ , и критериальный девиатор-оператор записывается в матричной форме

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{pmatrix} = M_5 \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix}, \quad M_5 = \begin{pmatrix} p_1 + 2p_2 & \sqrt{3}p_2 & p_3 & p_6 & p_8 \\ \sqrt{3}p_2 & -p_1 + 2p_2 & p_4 & p_7 & p_9 \\ p_3 & p_4 & p_5 & p_{12} & p_{13} \\ p_6 & p_7 & p_{12} & p_{10} & p_{14} \\ p_8 & p_9 & p_{13} & p_{14} & p_{11} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где  $p_n$  – вычисляемые скаляры. Матрица  $M_5$  используется для определения вектора  $\mathbf{N}$ , который является одним из ее собственных векторов [1, 7]. Для ортотропного материала ненулевыми в (8) могут быть только величины  $p_1, p_2, p_5, p_{10}, p_{11}$ . Критериальная функция разрушения контролирует появление недопустимых кратных собственных значений:

$$\Phi(\varphi) = \frac{(p_2^2 - p_1^2 - 4p_2p_5 + p_5^2)(p_2^2 - p_1^2 - 4p_2p_{10} + p_{10}^2)(p_2^2 - p_1^2 - 4p_2p_{11} + p_{11}^2)}{(p_1^2 + 3p_2^2)^3}. \quad (9)$$

Величина в знаменателе (9) взята для нормировки.

Тензорное представление девиаторов  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{D}$  имеет вид

$$\mathbf{Q} = Q_1 \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1 + Q_2 \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2 + Q_3 \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_3 + Q_4 (\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_1) + Q_5 (\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_1) + Q_6 (\mathbf{c}_2 \mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_2),$$

$$\mathbf{D} = D_1 \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1 + D_2 \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2 + D_3 \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_3 + D_4 (\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_1) + D_5 (\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_1) + D_6 (\mathbf{c}_2 \mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_2).$$

Его также удобно представить в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} M_5 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{pmatrix} = M_6 \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{pmatrix},$$

$$M_6 =$$

$$\begin{pmatrix} 2^{-1}(p_2 - p_1) & 2^{-1}(p_1 - p_2) & 2^{-1}(p_2 - p_1) & (\sqrt{3})^{-1}p_3 - p_4 & (\sqrt{3})^{-1}p_6 - p_7 & (\sqrt{3})^{-1}p_8 - p_9 \\ 2^{-1}(p_1 - 3p_2) & 2^{-1}(3p_2 - p_1) & -2^{-1}(p_1 + 5p_2) & (\sqrt{3})^{-1}p_3 + p_4 & (\sqrt{3})^{-1}p_6 + p_7 & (\sqrt{3})^{-1}p_8 + p_9 \\ p_2 & -p_2 & p_1 + 2p_2 & -(\sqrt{3})^{-1}2p_3 & -(\sqrt{3})^{-1}2p_6 & -(\sqrt{3})^{-1}2p_8 \\ -2^{-1}p_4 & 2^{-1}p_4 & -2^{-1}\sqrt{3}p_3 & p_5 & p_{12} & p_{13} \\ -2^{-1}p_7 & 2^{-1}p_7 & -2^{-1}\sqrt{3}p_6 & p_{12} & p_{10} & p_{14} \\ -2^{-1}p_9 & 2^{-1}p_9 & -2^{-1}\sqrt{3}p_8 & p_{13} & p_{14} & p_{11} \end{pmatrix}.$$

Обозначим компоненты матрицы  $M_6$  через  $Q_{ij}$ . Тензорное представление величин  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{T}$  имеет вид  $\mathbf{N} = N_1 \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1 + N_2 \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2 + N_3 \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_3 + N_4 (\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_1) + N_5 (\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_1) + N_6 (\mathbf{c}_2 \mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_2)$ ,  $\mathbf{T} = T_1 \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1 + T_2 \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2 + T_3 \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_3 + T_4 (\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_1) + T_5 (\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_1) + T_6 (\mathbf{c}_2 \mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_2)$ .

Вычисляем  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} = T_1 D_1 + T_2 D_2 + T_3 D_3 + 2(T_4 D_4 + T_5 D_5 + T_6 D_6)$ ,  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} = \sum S_j D_j$ , где

$$S_1 = N_3 p_2 - N_5 p_7 - N_6 p_9 - N_4 p_4 + N_1 (p_2 - p_1) 2^{-1} + N_2 (p_1 - 3p_2) 2^{-1},$$

$$S_2 = -N_3 p_2 + N_4 p_4 + N_1 (p_1 - p_2) 2^{-1} + N_2 (3p_2 - p_1) 2^{-1} + N_6 p_9 + N_5 p_7,$$

$$S_3 = N_3 (p_1 + 2p_2) - N_2 (5p_2 + p_1) 2^{-1} + N_1 (p_2 - p_1) 2^{-1} + \sqrt{3} (N_5 p_6 - N_4 p_3 - N_6 p_8),$$

$$S_4 = 2N_6 p_{13} + 2N_5 p_{12} - N_1 p_4 + N_2 p_3 (\sqrt{3})^{-1} + 2N_4 p_5 + N_2 p_4 + p_3 (\sqrt{3})^{-1} (N_1 - 2N_3),$$

$$S_5 = 2N_4 p_{12} + N_1 p_6 (\sqrt{3})^{-1} + 2N_6 p_{14} + 2N_5 p_{10} - (N_1 - N_2) p_7 + (N_2 - 2N_3) (\sqrt{3})^{-1} p_6,$$

$$S_6 = 2N_4 p_{13} + N_1 p_8 (\sqrt{3})^{-1} + 2N_6 p_{11} - N_1 p_9 + 2N_5 p_{14} + N_2 ((\sqrt{3})^{-1} p_8 + p_9) - 2N_3 (\sqrt{3})^{-1} p_8.$$

Находим компоненты вектора  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} \mathbf{N}$ :  $\sum (Q_{ij} - S_i N_i) D_j$  (суммирование здесь ведется по индексу  $j$ ). Обозначим величины:  $B_j = \sum (Q_{ij} - S_i N_i) A_i$ ,  $C_j = A_7 T_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ),  $C_j = 2A_7 T_j$  ( $j = 4, 5, 6$ ). Далее находим  $R_j = 2L_3^{-1} B_j K + L_3 (1 - \alpha) C_j$ ,

$$\Delta_7 = \sum R_j D_j. \tag{10}$$

Отыскиваем минимальное значение величины  $\sum R_i^2$ , которое достигается при

$$K = -\frac{(1-\alpha)\sum B_i C_i}{2L_3^{-2}\sum B_i^2}. \quad (11)$$

В качестве наборов  $R_i$  можно использовать любые наборы из шести величин  $R_j$ , и по (10) выбирать минимальное значение  $\Delta_7$  для  $K$  из (11). Соотношения (10), (11) дают завышенную величину  $K$  и, как выясняется при моделировании двухосного нагружения, наблюдается недопустимое отклонение от условия двухосности. Подходящее значение составляет  $K \approx 0,000001$ .

**Выбор величины  $\alpha$ .** Рассмотрим двухосное нагружение по второй и третьей осям. Пусть деформируемое твердое тело представляет собой единичный куб. При растяжении, сжатии по трем осям куб преобразуется в прямоугольный параллелепипед со сторонами  $x, y, z$ . Покомпонентные представления тензоров имеют вид

$$\mathbf{T} = T_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + T_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{F} = x^2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + y^2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + z^2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{D} = v_1 x^{-1} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + v_2 y^{-1} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + v_3 z^{-1} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3, \quad (12)$$

где  $v_1 = \dot{x}, v_2 = \dot{y}, v_3 = \dot{z}$ . Считаем, что  $v_2 = 1$  (в двухосном растяжении) либо  $v_2 = -1$  (в двухосном сжатии). Величину  $v_3 = v_3(v_2)$  будем задавать, и она тоже будет постоянной. Значение  $v_3 = 0$  соответствует условиям по двухосному сжатию в экспериментах Бриджмена [8]. По второй оси происходит сжатие, по третьей оси приложены гладкие штампы, а поверхности ортогональные первой оси являются свободными (рис. 2).

Величина  $v_1$  является неизвестной и находится с использованием принципа стационарности в варьируемой актуальной конфигурации [3]. Функционал этого принципа для данной задачи имеет вид  $\psi = \int 2^{-1} \Theta \cdot \nabla \mathbf{v}^T dV$ , где  $V$  – объем, занимаемый телом;  $dV$  – элемент объема; тензор  $\Theta = \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T} \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{T}$  заменяет тензор напряжений Коши в этой конфигурации. При однородной деформации можно использовать следующий функционал:  $\psi = \Theta \cdot \nabla \mathbf{v}^T$ . Для изотропного материала материальная производная тензора Коши по (4) получается в виде  $\dot{\mathbf{T}} = -\nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{T} + 4L_3^{-1}(\varphi_0 \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{E} + d \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} + c_1 (\mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{D} \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \mathbf{F}^2) - \varphi_0 \mathbf{D} + \varphi_2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F})$ , где  $d = b_1 + (2b_2 + b_3)I_1$ . Находим функционал  $\psi = \Theta \cdot \nabla \mathbf{v}^T$ :

$$\psi = \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}^T + 4L_3^{-1}(\varphi_0 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})^2 + d (\mathbf{F} \cdot \mathbf{D})^2 + 2c_1 \mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} - \varphi_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^2 + \varphi_2 \mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{D}^2). \quad (13)$$

Вычисляем величины в (13), учитывая (12) и опуская постоянные. Например, величина  $\mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}^T = T_2 y^{-2} v_2^2 + T_3 z^{-2} v_3^2$  – постоянная. Имеем:  $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})^2 = (x^{-1} v_1)^2 + 2x^{-1} v_1 y^{-1} v_2 + 2x^{-1} v_1 z^{-1} v_3$ ,  $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{D})^2 = (x v_1)^2 + 2x v_1 y v_2 + 2x v_1 z v_3$ ,  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{D} = x^4 v_1^2 + v_1 x (v_2 y^3 + v_3 z^3) + v_1 x^3 (v_2 y + v_3 z)$ ,  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^2 =$

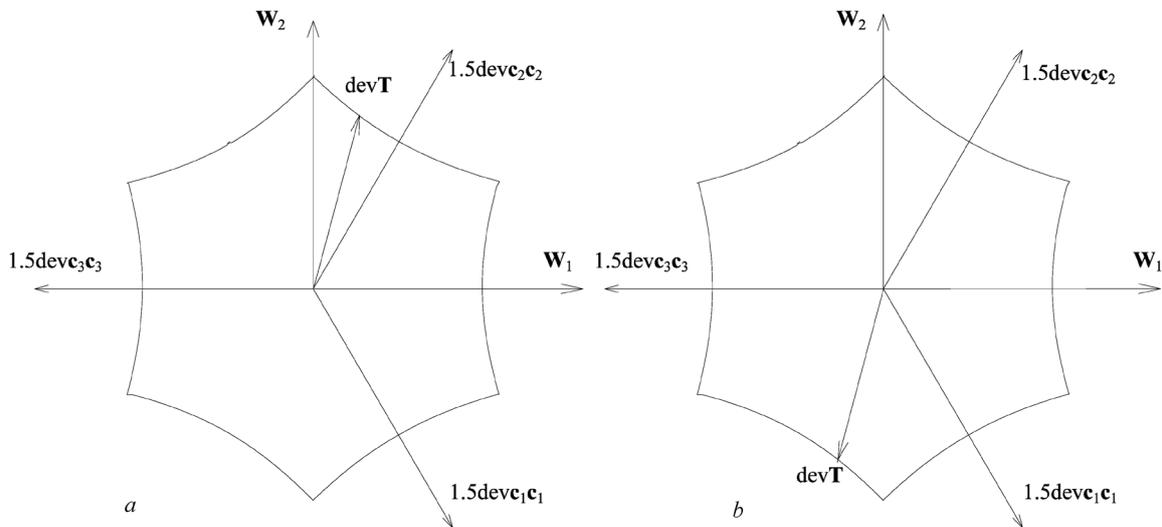


Рис. 2. Двухосные численные эксперименты по Бриджмену до момента течения:  $a$  – растяжение,  $b$  – сжатие  
 Fig. 2. Biaxial numerical experiments by Bridgman until the moment of flow:  $a$  – stretching,  $b$  – compression

$(x^{-1}v_1)^2$ ,  $\mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{D}^2 = (x^{-1}v_1)^2$ . Получаем в (13)  $\psi = 4L_3^{-1}v_1^2x^{-2}(dx^4 + 2c_1x^6 + \varphi_2x^4) + 4L_3^{-1}v_1(v_2(2\varphi_0x^{-1}y^{-1} + 2dxy + 2c_1xy(x^2 + y^2)) + v_3(2\varphi_0x^{-1}z^{-1} + 2dxz + 2c_1xz(x^2 + z^2)))$ . Находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial v_1} &= (v_1x^2(d + 2c_1x^2 + \varphi_2) + v_2x^{-1}y^{-1}(\varphi_0 + dx^2y^2 + c_1x^2y^2(x^2 + y^2)) + \\ &\quad v_3x^{-1}z^{-1}(\varphi_0 + dx^2z^2 + c_1x^2z^2(x^2 + z^2)))8L_3^{-1} = 0, \\ v_1 &= -\frac{v_2y^{-1}(\varphi_0 + dx^2y^2 + c_1x^2y^2(x^2 + y^2)) + v_3z^{-1}(\varphi_0 + dx^2z^2 + c_1x^2z^2(x^2 + z^2))}{x^3(d + 2c_1x^2 + \varphi_2)}. \end{aligned} \quad (14)$$

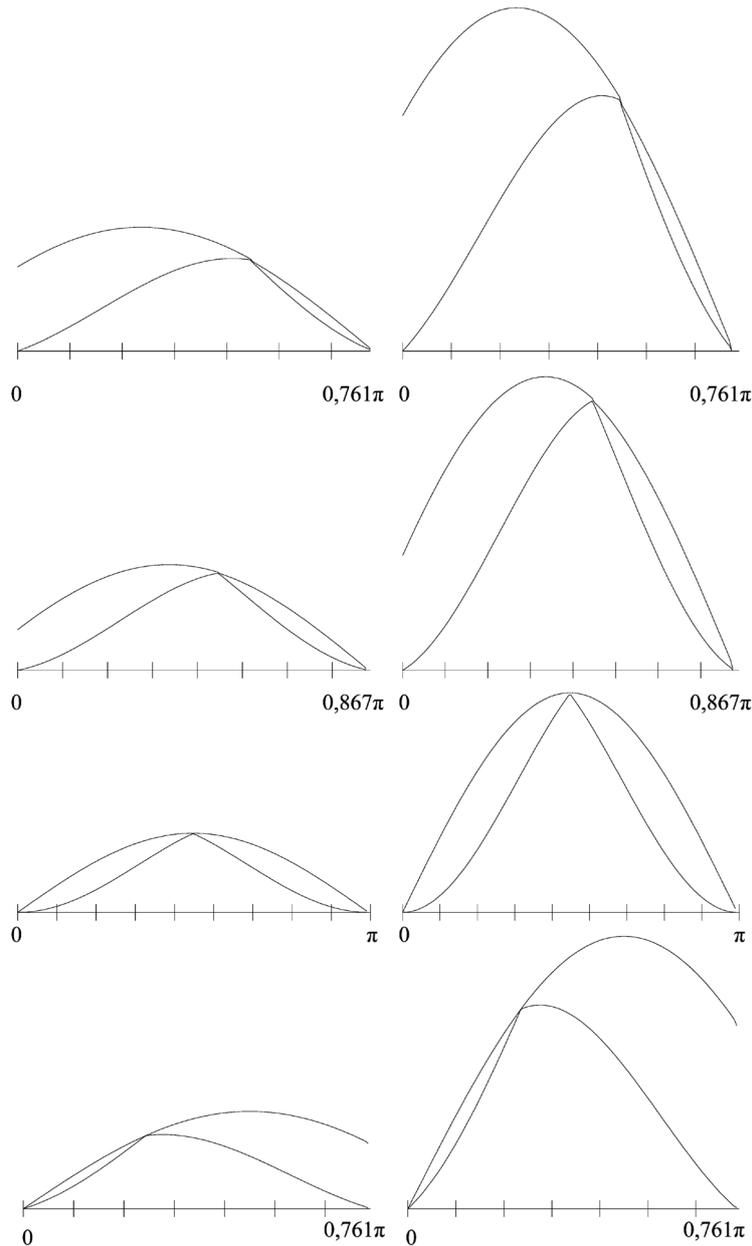


Рис. 3. Графики  $\beta$  для четырех точек кривой пластичности в зависимости от величины угла поворота по часовой стрелке вектора  $\mathbf{D}$  в промежутке его возможного изменения для нового задания  $\alpha$  (нижняя кривая) и старого задания (верхняя кривая) при одно-двухосных растяжении (слева), сжатии (справа). Деления по оси абсцисс соответствуют приращению угла  $9^{-1}\pi$

Fig. 3. Graphs  $\beta$  for four points of the plasticity curve as a function of the value of the clock-wise rotation angle of the vector  $\mathbf{D}$  in the interval of its possible change for a new job  $\alpha$  (lower curve) and the old job (the upper curve) for one-biaxial stretching (left) and compression (right). The divisions along the abscissa axis correspond to the increment of the angle  $9^{-1}\pi$

Соотношение (14) задает величину скорости перемещения материала по оси  $\mathbf{c}_1$ .

Пусть для регулярной точки поверхности выполняется условие  $(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \geq 0) \wedge (\mathbf{N} \cdot \mathbf{D} > 0)$ , то есть реализуется первый случай в дифференциальных определяющих уравнениях [1]. Вектор  $\mathbf{N}$  выбирается из  $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$  – двух собственных векторов оператора  $\mathbf{Q}$  [7]. Полагаем

$$K = 0,000001, \alpha = \alpha_i + (1 - \alpha_i)2\theta\pi^{-1} \quad (15)$$

$$(\theta = \arccos(\mathbf{N} \cdot \mathbf{D}_p (\sqrt{\mathbf{D}_p \cdot \mathbf{D}_p})^{-1}), \mathbf{D}_p = \mathbf{D} \cdot \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1 + \mathbf{D} \cdot \mathbf{N}_2 \mathbf{N}_2).$$

В (15) величина  $\alpha$  будет минимальной при  $\theta = 0$  и максимальной при  $\theta = 2^{-1}\pi$ . Случай, когда удельная мощность деформации отрицательная величина с учетом (6), рассмотрен в [1].

На верхнем правом участке кривой пластичности (рис. 2, а) выбраны четыре точки: близкая к левой сингулярной, соответствующая двухосному растяжению (между ними реализуется двухосное состояние растяжение – растяжение), соответствующая одноосному растяжению по второй оси и близкая к правой сингулярной (между ними реализуется двухосное состояние растяжение – сжатие). На нижнем правом участке кривой пластичности (рис. 2, б) выбраны также четыре точки: близкая к левой сингулярной, соответствующая двухосному сжатию (между ними реализуется двухосное состояние сжатие – сжатие), соответствующая одноосному сжатию по второй оси и близкая к правой сингулярной (между ними реализуется двухосное состояние растяжение – сжатие). Положение точек оценивается относительно вектора внешней нормали к кривой пластичности. Из системы определяющих уравнений с учетом (12)–(15) определяется величина  $\beta$  (рис. 3).

Второе соотношение в (15) допускает замену линейной зависимости на квадратичную при наличии дополнительных экспериментальных данных по двухосным нагружениям типа Бриджмена. Исходя из двухосных нагружений, нетрудно построить и трехосные нагружения с использованием дополнительного гидростатического давления.

**Закключение.** Представлены определяющие соотношения при течении в регулярной точке девиаторного сечения поверхности текучести. Выполнено численное моделирование базовых экспериментов с использованием модельного критерия разрушения, найдены значения  $\alpha_1 = 0,99352$  и  $\alpha_2 = 0,98218$  параметра  $\alpha$  при растяжении и сжатии. Исследованы возможности ограничения параметра роста анизотропии  $\beta$ . Выбраны величины параметров  $K, \alpha$ . Для проверки соотношений (11), (15) привлекались двухосные нагружения. Соотношение (15) значительно ограничивает рост упругой анизотропии и представляется приемлемым.

### Список использованных источников

1. Швед, О. Л. Модель нелинейно упругопластического материала / О. Л. Швед // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2014. – № 1. – С. 63–68.
2. Murnaghan, F. D. Finite deformation of an elastic solid / F. D. Murnaghan. – N. Y.: Dover, 1951. – 140 p.
3. Лурье, А. И. Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
4. Швед, О. Л. Критерий разрушения в модели упругопластической среды / О. Л. Швед // Тр. XVII междунар. конф. «Современные проблемы механики деформируемого твердого тела», г. Ростов-на-Дону, 14–17 окт. 2014 г. – Ростов н/Дон, 2014. – Т. 2. – С. 220–223.
5. Швед, О. Л. Определяющее уравнение для параметров анизотропии в модели триклинного упругопластического материала / О. Л. Швед // Тр. XVIII междунар. конф. «Современные проблемы механики деформируемого твердого тела», г. Ростов-на-Дону, 7–10 нояб. 2016 г. – Ростов н/Дон, 2016. – Т. 2. – С. 220–224.
6. Швед, О. Л. К вопросу описания явления «запирания» области высокого давления / О. Л. Швед // Сб. тр. IX Всерос. конф. по механике деформируемого твердого тела, г. Воронеж, 12–15 сент. 2016 г. – Воронеж, 2016. – С. 202–205.
7. Швед, О. Л. Вопросы обобщения нелинейной модели упругости на упругопластичность / О. Л. Швед // Материалы VIII Всерос. конф. по механике деформируемого твердого тела, г. Чебоксары, 16–21 июня 2014 г. – Чебоксары, 2014. – Ч. 2. – С. 225–227.
8. Бриджмен, П. Исследование больших пластических деформаций и разрыва / П. Бриджмен. – М.: Иностран. лит., 1955. – 444 с.

## References

1. Shved O. L. Model of nonlinear elastic-plastic material. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2014, no. 1, pp. 63–68 (in Russian).
2. Murnaghan F. D. *Finite deformation of an elastic solid*. N. Y., Dover, 1951. 140 p.
3. Lurie A. I. *Nonlinear theory elasticity*. Moscow, Nauka Publ., 1980. 512 p. (in Russian).
4. Shved O. L. Failure criterion in the elastic-plastic medium model. *Trudy XVII Mezhdunarodnoi konferentsii «Sovremennye problemy mekhaniki deformiruemogo tverdogo tela»*. g. Rostov-na-Donu, 14–17 oktiabria 2014 g. [Proceedings of the XVII International conference “Modern problems of solid mechanics”, 14–17 Oktober 2014. Volume 2]. Rostov-on-Don, 2014, pp. 220–224 (in Russian).
5. Shved O. L. The defining equation for anisotropic parameters in the model triclinic elastic-plastic material. *Trudy XVIII mezhdunarodnoi konferentsii «Sovremennye problemy mekhaniki deformiruemogo tverdogo tela»*, g. Rostov-na-Donu, 7–10 noiabria 2016 g. Tom 2 [Proceedings of the XVIII International Conference “Modern Problems of Mechanics of Deformable Solids”, Rostov-on-Don, 7–10 November 2016. Volume 2]. Rostov-on-Don, 2016, pp. 235–239 (in Russian).
6. Shved O. L. On the question of describing the phenomenon of “blocking” high pressure area. *Sbornik trudov IX Vserossiiskoi konferentsii po mekhanike deformiruemogo tverdogo tela*, g. Voronezh, 12–15 sentiabria 2016 g. [Proceedings of the IX All-Russian Conference on Solid Mechanics, Voronezh, 12–15 September 2016]. Voronezh, 2016, pp. 202–205 (in Russian).
7. Shved O. L. Questions generalization of nonlinear elasticity model elastic-plastic. *Materialy VIII Vserossiiskoi konferentsii po mekhanike deformiruemogo tverdogo tela*, g. Cheboksary, 16–21 iunia 2014 g. Cheboksary, 2014. Ch. 2 [Proceedings of VIII All-Russian Conference on Solid Mechanics. Cheboksary, 16–21 June, 2014. Part II]. Cheboksary, 2014, pp. 225–227 (in Russian).
8. Bridgman P. *Studies in Large Plastic Flow and Fracture*. New York–London, McGraw-Hill, 1952. 362 p.

## Информация об авторе

Швед Олег Лаврентьевич – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории исследования операций, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 6, г. Минск, 220012, Республика Беларусь). E-mail: swed@newman.bas-net.by

## Information about author

Oleg L. Shved – Ph. D. (Engineering), Leading Researcher of the Laboratory of Operational Research, United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (6, Surganonov Str., Minsk, 220012, Belarus). E-mail: swed@newman.bas-net.by