

В. П. Тузлуков

Белорусская государственная академия авиации, Минск, Беларусь

ЛИНЕЙНОЕ СУММИРОВАНИЕ СИГНАЛОВ РАВНОЙ МОЩНОСТИ, ПЕРЕДАВАЕМЫХ ПОСРЕДСТВОМ ОБОБЩЕННОГО КАНАЛА СВЯЗИ С ЗАМИРАНИЯМИ

Аннотация. Учитывая важность статистических моделей, используемых при описании канала связи с замираниями, подчиняющимися таким законам распределения, как Накагами- n (распределение Райса) и Накагами- q (распределение Хойта), при рассмотрении наземных, мобильных и спутниковых телекоммуникационных систем, мы представляем альтернативный подход, основанный на моментных функциях, для анализа характеристик приемных устройств с линейным суммированием сигналов равной мощности, передаваемых посредством каналов связи с замираниями, которые являются независимыми, но необязательно идентично распределенными в соответствии с законами Райса и Хойта. Получены точные математические выражения для моментных функций отношения сигнал/помеха на выходе сумматора приемного устройства. Исследуются важные критерии характеристик приемного устройства, такие как среднее отношение сигнал/помеха на выходе приемного устройства, степень замираний, спектральная эффективность в режиме сигналов малой мощности. Кроме того, используя рациональную аппроксимацию Паде, то есть наилучшую рациональную аппроксимацию степенного ряда, применительно к производящей функции моментов отношения сигнал/помеха на выходе приемного устройства, оцениваются средняя вероятность ошибок на символ и вероятность нарушения связи. Мы также исследуем соответствие моделирования замираний в канале связи, описываемых распределением Хойта, с помощью выбранной должным образом модели распределения Накагами- m при условии, что рассматривается помехозащищенность, или коэффициент ошибок приемного устройства при линейном суммировании сигналов равной мощности.

Ключевые слова: сигналы равной мощности, распределение Райса, распределение Хойта, распределение Накагами, фазовая модуляция, отношение сигнал/помеха

Для цитирования. Тузлуков, В. П. Линейное суммирование сигналов равной мощности, передаваемых посредством обобщенного канала связи с замираниями / В. П. Тузлуков // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2017. – №4. – С. 80–92.

V. P. Tuzlukov

Belarussian State Aviation Academy, Minsk, Belarus

EQUAL GAIN COMBINING OVER GENERALIZED FADING CHANNELS

Abstract. We suggest the alternative approach based on definition of the moment generating function for the average signal-to-noise ratio (SNR) at the receiver output with the purpose to analyze performance of systems with equal gain combining over Nakagami- n (Rice) and Nakagami- q (Hoyt) fading channels under consideration of land, mobile and satellite telecommunication systems. We derive the exact closed-form mathematical expressions for average symbol error probability and outage probability using the Pade rational approximation to moment generating function of the SNR at the output of the combiner. We investigate the following important receiver performance such as the average SNR at the receiver output, fading, spectral effectiveness at weak input signals. Additionally, we study the rational Pade approximation of the moment generating function applying to the average SNR at the receiver output and evaluate bit error rate and the outage probability. Additionally, we investigate a possibility of modeling a Hoyt fading channel based on presentation Nakagami- m statistical model for evaluation of error performance under the use of equal gain combining technique.

Keywords: equal power signals, Rice distribution, Hoyt distribution, Nakagami distribution, phase modulation, signal-to-noise ratio

For citation. Tuzlukov V. P. Equal gain combining over generalized fading channels. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2017, no. 4, pp. 80–92 (in Russian).

Введение. Разнесенный прием сигналов – это хорошо известное направление в области обработки сигналов с целью строгого определения средней мощности сигнала и уменьшения уровня флуктуаций сигнала в каналах связи с замираниями, при котором множество полученных копий

сигнала может быть суммировано разумным образом для того, чтобы обеспечить более высокое значение отношения сигнал/помеха на выходе приемного устройства. Основными технологиями для разнесения сигналов являются линейное суммирование дифференциально взвешенных сигналов каждого канала, сложение разнесенных сигналов с автовыбором и их комбинация, так называемое обобщенное сложение разнесенных сигналов с автовыбором.

Линейное суммирование сигналов равной мощности представляет наибольший практический интерес для исследования среди указанных технологий, потому что этот метод обеспечивает очень близкую вероятность ошибок на бит или символ к аналогичной характеристике оптимального метода суммирования дифференциально взвешенных сигналов каждого канала, демонстрируя при этом очень простую практическую реализацию.

В современной литературе оцениванию вероятности ошибок на бит или символ на выходе приемных устройств, выполняющих линейное суммирование сигналов равной мощности и работающих в условиях замираний в канале связи, описываемых распределениями Накагами- n (распределение Райса) и Накагами- q (распределение Хойта), не уделено так много внимания по сравнению с рэлеевскими замираниями в канале связи (распределение Накагами- m), главным образом, вследствие сложной формы представления плотности распределения вероятностей для законов распределения Райса и Хойта, несмотря на тот факт, что закон распределения Накагами- n (распределение Райса) и закон распределения Накагами- q (распределение Хойта) демонстрируют великолепное совпадение с экспериментальными измерениями замираний в канале связи для наземных, мобильных и спутниковых систем телекоммуникации.

Строго говоря, закон распределения Накагами- n (распределение Райса) [1–3], частным случаем которого является рэлеевский закон распределения, обеспечивает оптимальное совпадение с экспериментальными данными как для наземных [4, 5], мобильных [6], так и для спутниковых систем телекоммуникации [7–9]. Закон распределения Накагами- q (распределение Хойта) [2], как правило, характерен для спутниковых каналов связи вследствие наличия ионосферного мерцания и модифицируется в пределах от одностороннего гауссовского распределения до рэлеевского закона распределения замираний в канале связи [10, 11]. В дальнейшем мы будем называть закон распределения Накагами- n (распределение Райса) и закон распределения Накагами- q (распределение Хойта) как модели замираний Райса и Хойта соответственно.

Предыдущие исследования, касающиеся додетекторного разнесения сигналов равной мощности с линейным суммированием при наличии моделей замираний Райса и Хойта в канале связи, представлены в [12–16]. Более точно в [12] оценивается помехозащищенность, или коэффициент ошибок при использовании когерентной двоичной фазовой модуляции и некогерентной двоичной частотной модуляции при разнесении сигналов равной мощности с линейным суммированием, аппроксимируя функцию распределения вероятностей суммы L статистически независимых случайных величин [17].

Однако, как упоминалось в [18], элегантное разложение в ряд степенной функции, выполненное в [12], имеет форму $0,5 \pm \Sigma$. Принимая во внимание хвосты распределения, необходимо учитывать большое число членов разложения в ряд, чтобы не потерять значимые коэффициенты при округлении значений, когда осуществляется сложение Σ с 0,5 или вычитание Σ из 0,5.

Помехозащищенность, или коэффициент ошибок для некогерентной двоичной частотной модуляции при линейном суммировании сигналов равной мощности для случая медленных, коррелированных и избирательных во времени замираний Райса, исследовалась в [13]. В [14] представлен альтернативный полуаналитический подход для оценивания функции распределения вероятностей взвешенной суммы L независимых случайных величин, распределенных по закону Райса, при условии наличия или отсутствия аддитивного белого гауссовского шума, используя эрмитово численное интегрирование. Этот результат применяется затем в [15] для оценивания вероятности ошибок на бит или символ в случае использования когерентной двоичной фазовой модуляции.

В [16], применяя теорему Парсевала, представлен основанный на преобразовании интеграла ошибок в частотной области альтернативный подход к оцениванию средней вероятности ошибок на бит или символ на выходе приемных устройств с линейным суммированием сигналов равной мощности, которые передаются по каналу связи с замираниями, описываемыми моделями Рэля, Накагами- m , Райса, Хойта. Однако выражения для вероятности ошибок на бит или

символ для моделей замираний Райса и Хойта включают в себя интегралы с бесконечными пределами интегрирования и подынтегральные выражения, образованные бесконечными суммами комплексных функций (вырожденных гипергеометрических функций) вследствие комплексных форм представления их характеристических функций.

В настоящей работе мы преодолеваем проблемы, связанные с определением плотности распределения вероятностей суммы случайных величин, характеризующих замирания в канале связи, и использованием комплексных форм характеристических функций, путем предложения альтернативного подхода, основанного на производящей функции моментов, с целью анализа характеристик вероятности ошибок на бит или символ на выходе приемных устройств с линейным суммированием сигналов равной мощности, работающих в условиях независимых и неидентичных замираний в канале связи, описываемых моделями замираний Райса и Хойта.

Используя строгие математические выражения для производящих функций моментов отношения сигнал/помеха на выходе сумматора приемного устройства и аппроксимируя соответствующие производящие функции моментов при помощи теории аппроксимации Паде [19], мы исследуем важные критерии определения вероятности ошибок на бит или символ. Среднее значение отношения сигнал/помеха на выходе приемного устройства, степень замирания и спектральная эффективность в области сигналов малой мощности выражаются в простой математической форме при произвольном числе входных каналов приемного устройства и случайном характере замираний в канале связи.

Средние значения вероятности ошибок на бит или символ и вероятности нарушения связи строго аппроксимируются, используя хорошо известный подход на основе производящей функции моментов [20]. Кроме того, рассматривается возможность представления канала связи с замираниями, описываемыми моделью Хойта, законом распределения Накагами- m , выбранным в соответствии с требованиями при условии, что исследуется помехозащищенность, или коэффициент ошибки на выходе приемного устройства с линейным суммированием сигналов равной мощности. Предлагаемый математический анализ сопровождается представлением многочисленных результатов моделирования и соответствующим графическим представлением.

Моменты отношения сигнал/помеха на выходе приемного устройства. Рассмотрим L -канальное приемное устройство, выполняющее линейное суммирование сигналов равной мощности при условии статистической независимости, но необязательной идентичности распределения случайных процессов, поступающих по каналам связи на вход приемного устройства, и гладких замираний в каналах связи. Такая модель канала связи соответствует пространственному разнесению сигналов системами передачи информации, для которой случайные процессы, поступающие на вход приемного устройства, являются идентично распределенными так же, как и при многолучевом излучении по частотно-избирательным каналам связи при наличии замираний, для которых зависимость между мощностью сигнала и его задержкой на входе приемного устройства стремится к неравномерности.

Отношение сигнал/помеха на выходе приемного устройства можно определить следующим образом:

$$q_{\text{вых}} = \frac{E_s}{L\mathcal{N}_0} \left(\sum_{i=1}^L x_i \right)^2, \quad (1)$$

где x_i – огибающая случайного процесса на i -м входном канале многоканального приемного устройства, которая рассматривается как случайная величина, распределенная в соответствии с законом распределения Райса или Хойта; E_s – энергия сигнала на символ; \mathcal{N}_0 – односторонняя спектральная плотность распределения мощности аддитивного «белого» гауссовского шума.

По определению, момент n -го порядка отношения сигнал/помеха на выходе приемного устройства можно представить в следующем виде

$$E\{q_{\text{вых}}^n\} = E\left\{\left[\frac{E_s}{L\mathcal{N}_0}(x_1 + \dots + x_L)^2\right]^n\right\} = \left(\frac{E_s}{L\mathcal{N}_0}\right)^n E\{(x_1 + \dots + x_L)^{2n}\}, \quad (2)$$

где $E\{\dots\}$ – математическое ожидание случайной величины. Расширяя член $(x_1 + \dots + x_L)^{2n}$, используя мультиномиальное тождество [21], (2) может быть представлено в виде

$$E\{q_{\text{ВЫХ}}^n\} = \left(\frac{E_s}{L\mathcal{N}_0}\right)^n (2n)! \sum_{\substack{k_1, \dots, k_L=0 \\ k_1 + \dots + k_L = 2n}}^{2n} \frac{E\{x_1^{k_1} \dots x_L^{k_L}\}}{\prod_{j=1}^L (k_j)!}. \quad (3)$$

С учетом мгновенного значения отношения сигнал/помеха для каждого канала при приеме разнесенных сигналов, определяемого как $q_i = x_i^2 E_s / \mathcal{N}_0$, (3) может быть представлено как

$$E\{q_{\text{ВЫХ}}^n\} = \frac{(2n)!}{L^n} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_L=0 \\ k_1 + \dots + k_L = 2n}}^{2n} \frac{E\{q_1^{0.5k_1} \dots q_L^{0.5k_L}\}}{\prod_{j=1}^L (k_j)!}. \quad (4)$$

Предположим, что случайные процессы во всех каналах приемного устройства при линейном суммировании сигналов равной мощности не коррелированы между собой. Тогда (4) можно представить в более простом виде

$$E\{q_{\text{ВЫХ}}^n\} = \frac{(2n)!}{L^n} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_L=0 \\ k_1 + \dots + k_L = 2n}}^{2n} \prod_{j=1}^L \frac{E\{q_j^{0.5k_j}\}}{(k_j)!}. \quad (5)$$

Если приемное устройство функционирует при наличии в канале связи замираний, подчиняющихся закону распределения Райса, то отношение сигнал/помеха для каждого канала разнесенного приема распределено в соответствии с нецентральной χ^2 законом распределения.

Используя определение для моментов случайной величины, распределенной в соответствии с нецентральной χ^2 законом распределения [20], и учитывая (5), моменты отношения сигнал/помеха на выходе приемного устройства при линейном суммировании сигналов равной мощности могут быть записаны в виде следующего математического выражения:

$$E\{q_R^n\} = \frac{(2n)!}{L^n} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_L=0 \\ k_1 + \dots + k_L = 2n}}^{2n} \left\{ \prod_{j=1}^L \frac{\bar{q}_j^{0.5k_j} \Gamma(1 + 0.5k_j)}{(k_j)! (1 + K_j)^{0.5k_j}} {}_1F_1(-0.5k_j, 1; -K_j) \right\}, \quad (6)$$

где $\bar{q}_j = \Omega_j E_s / \mathcal{N}_0$ – среднее значение отношения сигнал/помеха на символ для j -го канала приемного устройства при $\Omega_j = x_i^2$ – среднее значение x_i^2 на символ; $\Gamma(\cdot)$ – Гамма функция [16]; ${}_1F_1(\cdot, \cdot; \cdot)$ – вырожденная гипергеометрическая функция первого рода [21]; K_j – коэффициент Райса для j -го канала приемного устройства, определяемый как отношение мощности сигнала в главной компоненте к общей рассеиваемой мощности.

Если $K_j \rightarrow -\infty$ (дБ), получаем рэлеевские замирания в канале связи; при $K_j \rightarrow \infty$ (дБ) замирания в канале связи отсутствуют. Значения коэффициента Райса для наземных, мобильных и спутниковых систем телекоммуникации лежат в пределах от 0 до 12 дБ [5, 22]. В дальнейшем без потери общности будем полагать, что коэффициент Райса принимает одно и то же значение для всех каналов разнесенного приема, то есть $K_1 = \dots = K_L = K$.

Если многоканальное приемное устройство функционирует в условиях замираний в канале связи, определяемых законом распределения Хойта, то моменты отношения сигнал/помеха на выходе приемного устройства могут быть определены при подстановке в (5) моментов отношения сигнал/помеха для каждого канала на входе приемного устройства, что приводит к результату [20]

$$E\{q_H^n\} = \frac{(2n)!}{L^n} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_L=0 \\ k_1 + \dots + k_L = 2n}}^{2n} \left\{ \prod_{j=1}^L \frac{\bar{q}_j^{0.5k_j} \Gamma(1 + 0.5k_j)}{(k_j)!} {}_2F_1\left[-\frac{k_j - 2}{4} - 0.25k_j; 1; \left(\frac{1 - \gamma_j^2}{1 + \gamma_j^2}\right)^2\right] \right\}, \quad (7)$$

где ${}_2F_1(\cdot, \cdot; \cdot; \cdot)$ – гауссовская гипергеометрическая функция [21]; γ_j – параметр замирания в канале связи для закона распределения Накагами- q замираний j -го канала разнесенного приема сигналов, который изменяется от 0 (гауссовское распределение замираний в канале связи) до 1 (рэлеевское распределение замираний в канале связи).

Как и прежде, предположим без какой-либо потери общности, что γ_j принимают одно и то же значение для всех каналов разнесенного приема, то есть $\gamma_1 = \dots = \gamma_L = \gamma$. Моменты отношения сигнал/помеха на выходе многоканального приемного устройства используются в последующем для исследования важных критериев определения вероятности ошибок при линейном суммировании сигналов равной мощности, таких как средняя мощность отношения сигнал/помеха на выходе приемного устройства, степень замираний в канале связи, спектральная эффективность в области очень слабых сигналов, характеризующихся очень малым значением отношения сигнал/помеха по мощности. Также исследуются вероятность ошибок и вероятность отказа или нарушения связи, аппроксимируя производящую функцию моментов на основе теории аппроксимации Паде.

Необходимо отметить, что моменты более высокого порядка также полезны для анализа алгоритмов обработки сигналов при решении задач обнаружения сигналов и играют фундаментальную роль в понимании вероятности ошибок на бит или символ для широкополосных систем связи при наличии замираний в канале связи [23–25].

Среднее значение отношения сигнал/помеха на выходе приемного устройства. Среднее значение отношения сигнал/помеха на выходе L -канального приемного устройства с линейным суммированием сигналов равной мощности, которое функционирует при наличии независимых и не идентичных по распределению замираний в канале связи, описываемых законом распределения Райса, может быть получено, полагая $n = 1$ в (6). После простых математических преобразований мы получаем

$$\bar{q}_R = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \bar{q}_i + \frac{\pi}{4L(K+1)} [{}_1F_1(-0.5, 1; -K)]^2 \sum_{i=1}^L \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^L \sqrt{\bar{q}_i \bar{q}_j}. \quad (8)$$

В случае независимых и идентично распределенных замираний в канале связи, то есть $\bar{q}_i = \bar{q}$, (8) сводится к более простому выражению

$$\bar{q}_R = \bar{q} \left[1 + \frac{\pi(L-1)}{4(K+1)} [{}_1F_1(-0.5, 1; -K)]^2 \right]. \quad (9)$$

Заметим, что при $K \rightarrow \infty$ (дБ) легко проверить, что (9) сводится к выражению для рэлеевских замираний в канале связи, полученному в [20]. При замираниях в канале связи, описываемых законом распределения Хойта, среднее значение отношения сигнал/помеха на выходе L -канального приемного устройства с линейным суммированием сигналов равной мощности для независимых и не идентично распределенных замираний в канале связи может быть получено при $n = 1$ в (7). После простых преобразований получаем

$$\bar{q}_H = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \bar{q}_i + \left[{}_2F_1 \left[0.25, -0.25; 1; \left(\frac{1-\gamma^2}{1+\gamma^2} \right)^2 \right] \right]^2 \frac{\pi}{4L} \sum_{i=1}^L \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^L \sqrt{\bar{q}_i \bar{q}_j}. \quad (10)$$

В случае независимых идентично распределенных замираний в канале связи (10) имеет вид

$$\bar{q}_H = \bar{q} + (L-1) \frac{\bar{q}\pi}{4} \left[{}_2F_1 \left[0.25, -0.25; 1; \left(\frac{1-\gamma^2}{1+\gamma^2} \right)^2 \right] \right]^2. \quad (11)$$

При $\gamma = 1$ (рэлеевские замирания) (11) упрощается и сводится к известному уравнению [20].

Степень замираний и спектральная эффективность. Степень замираний была определена в [25] как единая мера показателя воздействия замираний в канале связи. Эта мера, как правило, независима от средней мощности замираний в канале связи и определяется следующим образом

$$Q = \frac{\text{Var}\{q_{\text{ВЫХ}}\}}{\bar{q}_{\text{ВЫХ}}^2} = \frac{E\{q_{\text{ВЫХ}}^2\}}{\bar{q}_{\text{ВЫХ}}^2} - 1, \quad (12)$$

где $\text{Var}\{q_{\text{ВЫХ}}\}$ – дисперсия отношения сигнал/помеха на выходе приемного устройства. Используя (6), получаем, что для замираний в канале связи, распределенных по закону Райса, степень замираний определяется как

$$Q_R = \frac{4! \sum_{\substack{k_1, \dots, k_L=0 \\ k_1 + \dots + k_L=4}}^4 \prod_{j=1}^L \frac{\bar{q}_j^{0.5k_j} \Gamma(1+0.5k_j)}{k_j! (1+K)^{0.5k_j}} {}_1F_1(-0.5k_j, 1; -K)}{\left[\sum_{i=1}^L \bar{q}_i + \frac{\pi}{4(K+1)} [{}_1F_1(-0.5, 1; -K)]^2 \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^L \sum_{j=1}^L \sqrt{\bar{q}_i \bar{q}_j} \right]^2} - 1. \quad (13)$$

Если приемное устройство с линейным суммированием сигналов равной мощности функционирует при условии, что замирания в канале связи распределены в соответствии с законом распределения Хойта, тогда степень замираний в канале связи, используя (7), имеет вид

$$Q_H = \frac{4! \sum_{\substack{k_1, \dots, k_L=0 \\ k_1 + \dots + k_L=4}}^4 \prod_{j=1}^L \frac{\bar{q}_j^{0.5k_j} \Gamma(1+0.5k_j)}{k_j!} {}_2F_1\left[-0.25(k_j-2), -0.25k_j; 1; \left(\frac{1-\gamma^2}{1+\gamma^2}\right)^2\right]}{\left[\sum_{i=1}^L \bar{q}_i + \frac{\pi}{4} \left[{}_2F_1\left[0.25, -0.25; 1; \left(\frac{1-\gamma^2}{1+\gamma^2}\right)^2\right] \right]^2 \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^L \sum_{j=1}^L \sqrt{\bar{q}_i \bar{q}_j} \right]^2} - 1. \quad (14)$$

Степень замираний в канале связи может быть использована для исследования спектральной эффективности при наличии гладких замираний в области очень слабых сигналов по мощности, например в спутниковой системе телекоммуникации. Тогда минимальное отношение энергии сигнала на бит к мощности помехи, требуемое для надежной связи, составляет $(E_b/\mathcal{N}_0)_{\min} = -1,59$ дБ.

Наклон кривой спектральной эффективности S_0 как функция отношения сигнал/помеха на бит E_b/\mathcal{N}_0 в единицах бит/Гц на 3 дБ при минимальном значении $(E_b/\mathcal{N}_0)_{\min}$ определяется как [26]

$$S_0 = \frac{2E^2\{x_{\text{ВЫХ}}^2\}}{E\{x_{\text{ВЫХ}}^4\}} = \frac{2\bar{q}_{\text{ВЫХ}}^2}{E\{q_{\text{ВЫХ}}^2\}}, \quad (15)$$

где $x_{\text{ВЫХ}}$ – огибающая амплитуды процесса на выходе сумматора приемного устройства. Выражение (15) можно записать в виде степенного ряда замираний в канале связи на выходе сумматора, то есть

$$S_0 = \frac{2}{Q+1}. \quad (16)$$

Используя (13) и (14) с учетом (16) спектральная эффективность в области очень слабых сигналов по мощности может быть определена для приемных устройств с линейным суммированием сигналов равной мощности, которые функционируют при наличии замираний в канале связи, распределенных в соответствии с законами Райса и Хойта соответственно.

Численный анализ. Предположим, что многоканальное приемное устройство функционирует согласно экспоненциальной зависимости между мощностью рассеивания и задержкой сигнала во времени, то есть $\bar{q}_i = \bar{q}_1 \exp\{-\delta(i-1)\}$.

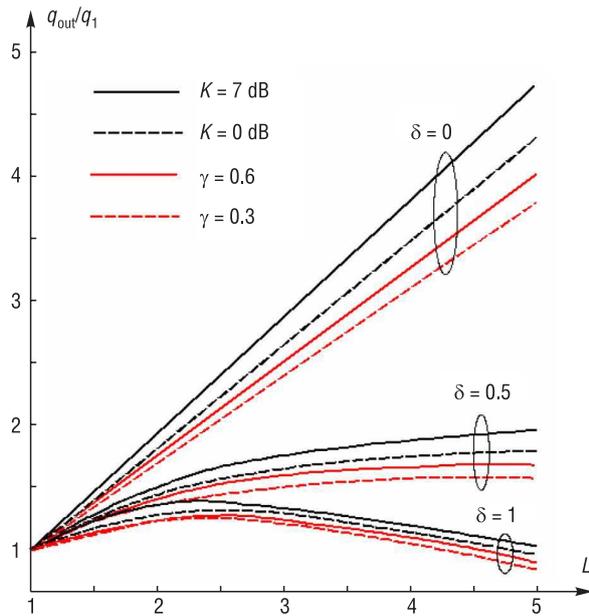


Рис. 1. Нормализованное среднее значение отношения сигнал/помеха для первого канала как функция числа каналов L при замираниях, распределенных по закону Райса (черный цвет) и Хойта (красный цвет)

Fig. 1. Normalized average SNR for the first channel versus channel number L in Rice (black) and Hoyt (red) fading

Рис. 1 демонстрирует графическое представление нормализованного среднего значения отношения сигнал/помеха, характерного для первого канала, на выходе многоканального приемного устройства для линейного суммирования сигналов равной мощности, как функцию числа каналов приема сигналов при наличии замираний в канале связи, распределенных по закону Райса: $K = 0$ дБ и $K = 7$ дБ, и Хойта: $\gamma = 0,3$ и $\gamma = 0,6$ соответственно.

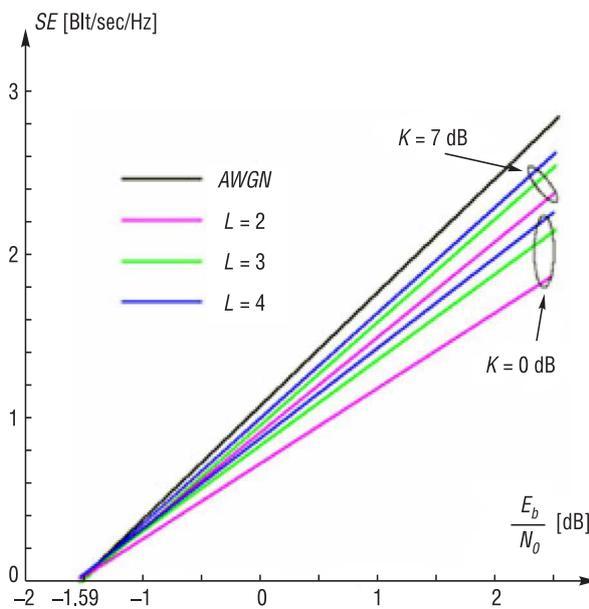


Рис. 3. Спектральная эффективность в области слабых сигналов при замираниях Райса в канале связи; AWGN – аддитивный «белый» гауссовский шум

Fig. 3. Spectral effectiveness for low power signals in Rice channel fading; AWGN – additive white Gaussian noise

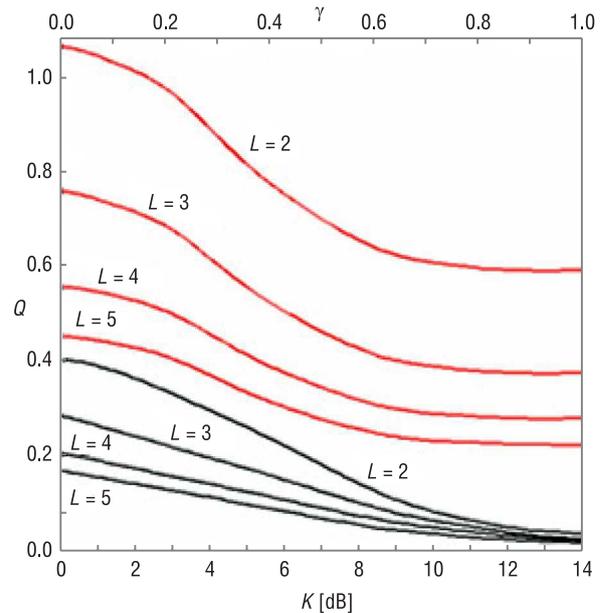


Рис. 2. Степень замираний в канале связи при линейном суммировании сигналов равной мощности как функция от соответствующего параметра замираний в канале связи, K (черный цвет) и γ (красный цвет)

Fig. 2. Fading channel degree for equal gain combining versus fading channel parameter, K (black) and γ (red)

На рис. 2 представлена степень замираний в канале связи для линейного суммирования сигналов равной мощности как функция соответствующего параметра замираний в канале связи, K или γ , для нескольких значений L . Как и ожидалось, на выходе сумматора приемного устройства степень замираний в канале связи компенсируется более эффективно с увеличением числа каналов L приемного устройства при линейном суммировании сигналов равной мощности.

На рис. 3 представлена спектральная эффективность в области очень слабых сигналов по мощности для многоканального приемного устройства при линейном суммировании сигналов равной мощности, которое функционирует в условиях замираний в канале связи, распределенных в соответствии с законом Райса. Спектральная эффективность демонстрируется для канала связи без замираний, подверженного воздействию аддитивного «белого» гауссовского шума с целью сравнения.

Частота ошибок и вероятность нарушения связи. *Средняя вероятность ошибок на символ.* Метод исследований, основанный на производящей функции моментов [20], является унифицированным для определения коэффициента или частоты ошибок при передаче двоичных данных для ряда видов модуляции. Однако пока не получены точные математические выражения для производящей функции моментов отношения сигнал/помеха на выходе приемного устройства с линейным суммированием сигналов равной мощности.

По этой причине в настоящей работе предлагается использовать теорию аппроксимации Паде как альтернативный и простой способ для аппроксимации производящей функции моментов. Объясним в краткой форме, как можно применить теорию аппроксимации Паде для получения точной рациональной аппроксимации производящей функции моментов $\mathcal{M}_{q_{\text{вых}}}(s)$ для отношения сигнал/помеха на выходе приемного устройства.

По определению производящая функция моментов равна [27]

$$\mathcal{M}_{q_{\text{вых}}}(s) = E\{\exp(sq_{\text{вых}})\} \quad (17)$$

и может быть представлена в виде степенного ряда, например в виде ряда Тейлора

$$\mathcal{M}_{q_{\text{вых}}}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} E\{q_{\text{вых}}^n\} s^n \sin^{-1} \theta. \quad (18)$$

Затруднительно сделать вывод, что степенной ряд в (18) имеет положительный радиус сходимости и относительно какого значения он сходится. Для решения этой проблемы привлекается теория аппроксимации Паде [19] как простой и альтернативный способ аппроксимации производящей функции моментов. Аппроксимирующая функция Паде является той рациональной функциональной аппроксимацией для $\mathcal{M}_{q_{\text{вых}}}(s)$ установленного порядка B для знаменателя и порядка A для числителя так, что разложение в степенной ряд согласуется с разложением в степенной ряд функции $\mathcal{M}_{q_{\text{вых}}}(s)$ порядка $A + B$

$$R_{[A/B]}(s) = \frac{\sum_{i=0}^A a_i s^i}{1 + \sum_{i=1}^B b_i s^i} = \sum_{n=0}^{A+B} \frac{E\{q_{\text{вых}}^n\}}{n!} s^n + o\{s^{N+1}\}, \quad (19)$$

где $o\{s^{N+1}\}$ – бесконечно малая величина, которой можно пренебречь. Здесь необходимо оценить первые $A + B$ моменты для построения аппроксимирующей функции $R_{[A/B]}(s)$. В последующем, $\mathcal{M}_{q_{\text{вых}}}(s)$ аппроксимируется, используя аппроксимирующие функции Паде $R_{[A/B]}(s)$ под диагональю матрицы, поскольку только в этом случае гарантируется сходимость и однозначность $\mathcal{M}_{q_{\text{вых}}}(s)$ [14, 21]. С помощью аппроксимирующих функций Паде выражения для коэффициента или частоты ошибок могут быть получены непосредственно для некогерентных и дифференциальных методов передачи двоичных данных, например, некогерентная двоичная фазовая модуляция, дифференциальная двоичная фазовая модуляция, поскольку для остальных случаев обычные интегралы с конечными пределами интегрирования и подынтегральные выражения, составленные из элементарных функций, должны без труда вычисляться с использованием численного интегрирования.

Вероятность нарушения связи. В дополнение к среднему значению коэффициента или частоты ошибок вероятность нарушения связи является другим стандартным критерием характеристики вероятности ошибок на бит или символ для систем телекоммуникации и связи, функционирующих в условиях замираний в канале связи. Эта вероятность определяется как вероятность события того, что суммарное отношение сигнал/помеха $q_{\text{вых}}$ по своему значению меньше $q_{\text{пор}}$, то есть [20]

$$P^{\text{outage}} = F_{q_{\text{вых}}}(q_{\text{пор}}) = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{M}_{q_{\text{вых}}}(s)/s] \Big|_{q_{\text{пор}}}, \quad (20)$$

где $F_{q_{\text{вых}}}(\cdot)$ – функция распределения вероятностей отношения сигнал/помеха на выходе приемного устройства с линейным суммированием сигналов равной мощности; $\mathcal{L}^{-1}(\cdot)$ – инверсное преобразование Лапласа.

Согласно рациональной аппроксимации Паде,

$$\mathcal{M}_{q_{\text{ВЫХ}}}(s) \cong \frac{\sum_{i=0}^A a_i s^i}{1 + \sum_{i=1}^B b_i s^i} = \sum_{i=0}^B \frac{\lambda_i}{s + p_i}. \quad (21)$$

Используя остаточную инверсию, вероятность нарушения связи может быть без труда определена из (20) как

$$P_{\text{outage}} = \sum_{i=1}^B \frac{\lambda_i}{p_i} \exp\{-p_i q_{\text{пор}}\}, \quad (22)$$

где p_i и λ_i – полюса и остатки (бесконечно малые числа, которые могут рассматриваться как 0) соответственно.

Более подробная и детальная информация о том, каким образом осуществляется аппроксимация функции распределения вероятностей и плотности распределения вероятностей, представлена в [28, 29].

Численный анализ. Представим некоторые численные результаты для иллюстрации предлагаемого математического анализа.

Рис. 4, *a* представляет среднюю вероятность ошибок на символ для 4-, 8- и 16-битовой дифференциальной двоичной фазовой модуляции, используемой при линейном суммировании сигналов равной мощности в условиях замираний в канале связи, распределенных согласно закону распределения Райса при $K = 7$ дБ и $L = 2, 3$. На рис. 4, *a* также представлены результаты компьютерного моделирования с целью проверки точности предлагаемой аппроксимации Паде. Наблюдается очень хорошее совпадение между результатами математического анализа и компьютерного моделирования.

Средние значения вероятности ошибок на символ для двоичной фазовой модуляции, квадратичной фазовой модуляции, 8- и 16-битовой двоичной фазовой модуляции, используемой при

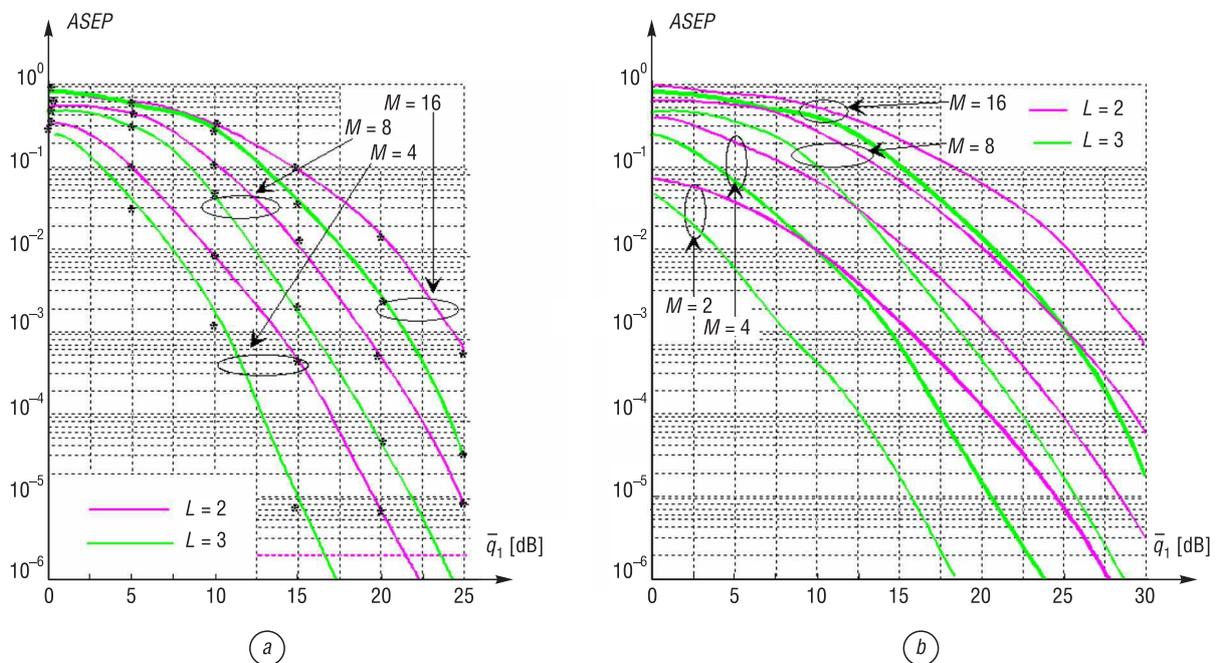


Рис. 4. Средняя вероятность ошибок на символ как функция отношения сигнал/помеха: *a* – M -битовая дифференциальная фазовая модуляция при замираниях Райса в канале связи, $K = 7$ дБ, * – компьютерное моделирование; *b* – M -битовая фазовая модуляция при замираниях Хойта в канале связи, $\gamma = 0,5$

Fig. 4. Average symbol error rate versus SNR: *a* – M -BDPSK in Rice fading channel, $K = 7$ dB, * – simulation; *b* – M -BPSK in Hoyt fading channel, $\gamma = 0.5$

линейном суммировании сигналов равной мощности в условиях замираний в канале связи, распределенных в соответствии с законом распределения Хойта при $\gamma = 0,5$ и $L = 2, 3$, демонстрируются на рис. 4, *b*.

На рис. 5 представлена вероятность нарушения связи, или вероятность отказа, для приемного устройства с удвоенным и утроенным линейным суммированием сигналов равной мощности в условиях независимых замираний в канале связи, идентично распределенных в соответствии с законами распределения Райса и Хойта соответственно, как функция от инверсного нормализованного порога нарушения связи $\bar{q}_1/q_{\text{пор}}$ для нескольких параметров замирания в канале связи. Как и вероятность ошибок на символ на выходе приемного устройства с линейным суммированием сигналов равной мощности, вероятность нарушения или отказа связи уменьшается при возрастании каналов приема сигналов и низких значениях параметров замираний в канале связи, то есть K и γ .

Аппроксимация модели Хойта моделью Накагами. Рассмотрим возможность аппроксимации закона распределения Хойта законом распределения Накагами- m , поскольку это касается анализа вероятности ошибок на символ при линейном суммировании сигналов равной мощности. Соответствие требованиям для параметров замираний в канале связи, распределенных согласно закону распределения Райса, было изложено в [26], используя простую форму математического представления закона распределения Накагами- m , что позволило представить несколько областей интерполяции параметров, в которых наблюдалась как удовлетворительная, так и неудовлетворительная совместимость.

Аппроксимация закона распределения Хойта соответствующим законом распределения Накагами- m была предложена в [2]. Отношение между параметром замирания m в канале связи закона распределения Накагами- m и параметром замирания γ закона распределения Хойта представлено как

$$m = \frac{(1 + \gamma^2)}{2(1 + 2\gamma^4)}, m \leq 1. \tag{23}$$

Для полноты исследования возможности аппроксимации замираний в канале связи, распределенных в соответствии с законом распределения Хойта, законом распределения Накагами- m , используя (23), на рис. 6 представлена средняя вероятность ошибок на бит как функция среднего значения отношения сигнал/помеха на символ для двоичной фазовой модуляции при линейном суммировании сигналов равной мощности в условиях замираний в канале связи, распределенных как в соответствии с законом распределения Хойта, так и согласно закону распределения Накагами- m .

Используется закон распределения Накагами- m при $m = 0,75$, который аппроксимирует замирания в канале связи, распределенные в соответствии с законом распределения Хойта при параметре замираний $\gamma = 0,7$.

Полученные результаты показывают, что эквивалентность двух законов распределения тем выше, чем меньше среднее значение отношения сигнал/помеха на бит (среднее значение вероятности ошибок на бит увеличивается) и чем больше число каналов приема сигналов L . Например, при $BER^{av} = 10^{-3}$ закон распределения Хойта превосходит эквивалентное распределение Накагами- m на 3 дБ, 1,68 и 1,4 дБ при $L = 2, 3, 4$ соответственно.

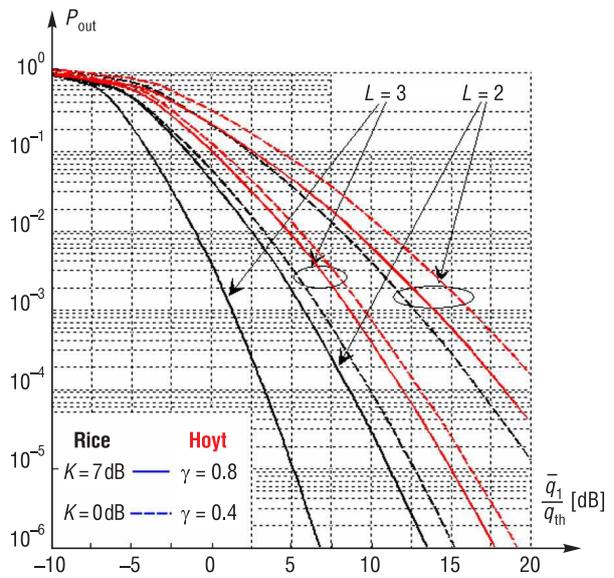


Рис. 5. Вероятность отказа связи как функция порога нарушения связи $\bar{q}_1/q_{\text{пор}}$ при замираниях Райса и Хойта в канале связи

Fig. 5. Outage probability versus threshold \bar{q}_1/q_{th} in Rice and Hoyt fading channels

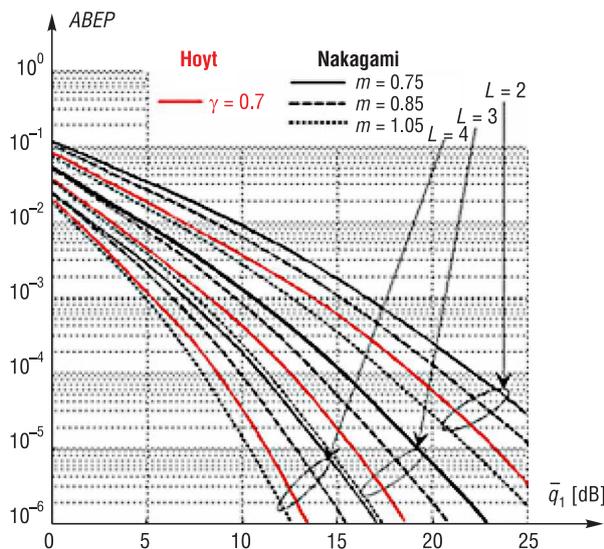


Рис. 6. Аппроксимация вероятности ошибок для двоичной фазовой модуляции при замираниях Хойта и модели распределения Накагами- m

Fig. 6. Average BER approximation in the case of BPSK in Hoyt fading channel and Nakagami- m modeling

чающуюся при законе распределения Хойта, и позволяет определить только верхнюю границу. Эмпирическим путем было установлено, что лучшая верхняя граница для модели закона распределения Хойта получается прибавлением 0,1 к эквивалентному параметру замираний m . Кроме того, прибавление 0,3 к эквивалентному параметру замираний в канале связи m позволяет нам зафиксировать нижнюю границу вероятности ошибок на бит при моделировании распределения замираний в канале связи законом распределения Хойта.

Заключение. Исследована характеристика вероятности ошибок приемных устройств додетекторного линейного суммирования сигналов равной мощности в условиях замираний в канале связи, распределенных в соответствии с законами распределения Райса и Хойта. В ходе анализа предполагалось, что замирания в канале связи являются независимыми и обладают неидентичным распределением в каждом канале приемного устройства.

При выводе точных математических выражений для моментов отношения сигнал/помеха на выходе многоканального приемного устройства оценивались важные параметры вероятности ошибок, такие как среднее значение отношения сигнал/помеха на выходе многоканального приемного устройства, степень замирания в канале связи, спектральная эффективность в области очень слабых сигналов по мощности.

Среднее значение вероятности ошибок на символ и вероятность нарушения (отказа) связи были строго аппроксимированы с использованием метода производящей функции моментов и теории аппроксимации Паде. Впервые проводилось исследование на соответствие моделирования замираний в канале связи, распределенных согласно закону распределения Хойта, с помощью строго выбранной модели закона распределения Накагами- m , поскольку рассматривалась вероятность ошибок при линейном суммировании сигналов равной мощности. Данные о подобных исследованиях отсутствуют в открытых источниках печати. Проведенный в настоящей работе анализ показал, что аппроксимация замираний в канале связи, распределенных в соответствии с законом распределения Хойта, моделью закона распределения Накагами- m всегда ухудшает вероятность ошибок, характерную для модели закона распределения Хойта.

Список использованных источников

1. Rice, S.O. Statistical properties of a sine wave plus random noise / S.O. Rice // Bell System Technol. J. – 1948. – №1 (27). – P. 109–157.
2. Nakagami, M. The m -distribution – a general formula if intensity distribution of rapid fading / M. Nakagami // Statistical Methods in Radio Wave Propagation / ed. W.G. Hoffman. – Pergamon, Oxford, U. K., 1960. – P. 3–36.

Для более худших условий в канале связи, когда параметр замираний в канале связи, распределенных в соответствии с законом распределения Хойта, равен $\gamma = 0,3$, легко заметить, что при $BER^{av} = 10^{-3}$ превосходство распределения Хойта по сравнению с распределением Накагами- m равно 4,13 дБ, 2,48 и 1,45 дБ при $m = 0,585$ и $L = 2, 3, 4$ соответственно. При $BER^{av} = 10^{-4}$ преимущество составляет 5,51 дБ, 4,14 и 2,66 дБ соответственно.

При сравнении результатов аппроксимации замираний в канале связи, распределенных в соответствии с законом распределения Хойта и эквивалентным законом распределения Накагами- m , видно, что совпадение между распределениями улучшается по мере ослабления замираний в канале связи.

Из рис. 6 также можно заметить, что аппроксимация закона распределения Хойта эквивалентной моделью закона распределения Накагами- m , как предлагается в (23), не улучшает вероятность ошибок на бит, получающуюся при законе распределения Хойта, и позволяет определить только верхнюю границу.

3. Kaur, N. SNR and BER performance analysis of MRC and EGC receivers over Rayleigh fading channel / N. Kaur // *Int. J. Computer Applications*. – 2015. – Vol. 132, №9. – P. 12–17.
4. Wijk, F. Assessment of a pico-cellular system using propagation measurements at 1.9 GHz for indoor wireless communications / F. Wijk, F. Kegel, R. Prasad // *IEEE Transactions on Vehicular Technology*. – 1995. – Vol. 44, №1. – P. 155–162.
5. Rappaport, T. Multipath propagation models for in-building communications / T. Rappaport, Y. Seidel // *IEEE 5th International Conference on Mobile Radio Personal Communications*. – 1989. – P. 69–74.
6. Parsons, J.D. *The Mobile Radio Propagation Channel* / J.D. Parsons. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 2000. – 436 p.
7. Adeyemo, Z.K. Symbol error rate analysis of M-QAM with equal gain combining over a mobile satellite channel / Z.K. Adeyemo, I.A. Ojedokun, D.O. Akande // *Int. J. of Electrical and Computer Engineering*. – 2013. – Vol. 3, №6. – P. 849–856.
8. Hamza, D.R. Equal gain combining for cooperative spectrum sensing in cognitive radio networks / D.R. Hamza, S. Aissa, G. Anipa // *IEEE Transactions on Wireless Communications*. – 2014. – Vol. 13, №8. – P. 4334–4345.
9. Wu, W. *Satellite communications* / W. Wu // *Proc. IEEE*. – 1995. – Vol. 85, №6. – P. 998–1010.
10. Chytil, B. The distribution of amplitude scintillation and the conversion of scintillation indices / B. Chytil // *J. of Atmospheric and Terrestrial Phys.* – 1967. – Vol. 29, №9. – P. 1175–1177.
11. Bischoff, K. A note on scintillation indices / K. Bischoff, B. Chytil // *Planetary and Space Science*. – 1969. – Vol. 17, №8. – P. 463–467.
12. Abu-Dayya, A. Macrodiversity on Rician fading channels / A. Abu-Dayya, C. Beaulieu // *IEEE Transactions on Communications*. – 1994. – Vol. 42, №6. – P. 2258–2267.
13. Vitetta, G.M. An error probability formula for non-coherent orthogonal binary FSK with dual diversity on correlated Rician channels / G.M. Vitetta, U. Mengali, D.P. Taylor // *IEEE Communications Lett.* – 1999. – Vol. 3, №2. – P. 43–45.
14. Karagiannidis, G.R. Outage probability analysis for a Rician signal in L Nakagami interferers with arbitrary parameters / G.R. Karagiannidis, C.J. Georgopoulos, S.A. Kotsopoulos // *KICS J. on Communications Networks*. – 1999. – Vol. 1, №1. – P. 26–30.
15. Ekanayake, N. Equal-gain combining diversity reception of M -ary CPSK signals in Nakagami fading / N. Ekanayake // *IEEE Communications Lett.* – 2010. – Vol. 14, №4. – P. 285–287.
16. Annamalai, A. Equal-gain diversity receiver performance in wireless channels / A. Annamalai, C. Tellambura, V.K. Bhargava // *IEEE Transactions on Communications*. – 2000. – Vol. 48, №10. – P. 1732–1745.
17. Rohilla, S. Comparative analysis of maximum ratio combining and equal gain combining diversity techniques for WCDMA: a survey / S. Rohilla, D.K. Patidar, N.K. Soni // *Int. J. of Engineering Inventions*. – 2013. – Vol. 3, №1. – P. 72–77.
18. Helstrom, C.W. Computing the distribution of sums of random sine waves and of Rayleigh-distributed random variables by saddle-point integration / C.W. Helstrom // *IEEE Transactions on Communications*. – 1997. – Vol. 45, №11. – P. 1487–1494.
19. Baker, G.A. *Pade Approximation* / G.A. Baker, P. Graves-Morris. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996. – 746 p.
20. Tuzlukov, V.P. *Signal Processing in Radar Systems* / V.P. Tuzlukov. – Boca Raton: CRC Press, 2013. – 632 p.
21. Abramovitz, M. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* / M. Abramovitz, A. Stegun. – New York: Dover, 1972. – 1061 p.
22. Попов, В.Ф. Оценка помехоустойчивости при разнесенном приеме в канале с замираниями по закону Накагами и когерентно-весовом сложении сигналов / В.Ф. Попов // *Омск. науч. вестн. Сер. Приборы, машины и технологии*. – 2012. – Т. 113, №3. – С. 309–313.
23. Win, M.Z. Higher order statistics of antenna subset diversity / M.Z. Win, R.K. Mallik, G. Chrisikos // *IEEE Transaction on Wireless Communications*. – 2003. – Vol. 2, №5. – P. 871–875.
24. Быховский, М.А. Оптимальная линейная коррекция многолучевого канала связи при разнесенном приеме сигналов / М.А. Быховский // *Электросвязь*. – 2011. – №12. – С. 36–41.
25. *Communications Systems: New Research* / ed. V.P. Tuzlukov. – New York: NOVA Science Publishers Inc., 2013. – 423 p.
26. Charash, U. Reception through Nakagami fading multipath channels with random delays / U. Charash // *IEEE Transactions on Communications*. – 1979. – Vol. 27, №4. – P. 657–670.
27. Shamai, S. The impact of frequency-flat fading on the spectral efficiency of CDMA / S. Shamai, S. Verdú // *IEEE Transactions on Information Theory*. – 2001. – Vol. 47, №4. – P. 1302–1327.
28. Papoulis, A. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes* / A. Papoulis. – New York: McGraw-Hill, 2002. – 852 p.
29. Amindavar, H. Rade approximation of probability density functions / H. Amindavar, J.A. Ritcey // *IEEE Transactions on Aerospace and Electronics Systems*. – 1994. – Vol. 30, №2. – P. 416–424.
30. Метод комбинированной обработки цифровых сигналов при разнесенном приеме / О.Р. Никитин [и др.] // *Вестн. Рязан. гос. радиотехн. ун-та*. – 2009. – Т. 27, №1. – С. 27–32.

References

1. Rice S. O. Statistical properties of a sine wave plus random noise. *Bell System Technology Journal*, 1948, no. 1 (27), pp.109–157. Doi: 10.1002/j.1538-7305.1948.tb01334.x
2. Nakagami M. The m -distribution – a general formula if intensity distribution of rapid fading. Hoffman W. G. (ed.). *Statistical Methods in Radio Wave Propagation*. Pergamon, Oxford, U.K., 1960, pp. 3–36. Doi: 10.1016/B978-0-08-009306-2.50005-4
3. Kaur N. SNR and BER performance analysis of MRC and EGC receivers over Rayleigh fading channel. *International Journal of Computer Applications*, 2015, vol. 132, no. 9, pp. 12–17. Doi: 10.5120/ijca2015907520
4. Wijk F., Kegel F., Prasad R. Assessment of a pico-cellular system using propagation measurements at 1.9 GHz for indoor wireless communications. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 1995, vol. 44, no. 1, pp. 155–162. Doi: 10.1109/25.350281

5. Rappaport T., Seidel Y. Multipath propagation models for in-building communications. *IEEE 5th International Conference on Mobile Radio Personal Communications*. 1989, pp. 69–74.
6. Parsons J. D. *The Mobile Radio Propagation Channel*. New York, John Wiley & Sons, Inc., 2000. 436 p. Doi: 10.1002/0470841524
7. Adeyemo Z. K., Ojedokun I. A., Akande D. O. Symbol error rate analysis of M-QAM with equal gain combining over a mobile satellite channel. *International Journal of Electrical and Computer Engineering*, 2013, vol. 3, no. 6, pp. 849–856. Doi: 10.11591/ijece.v3i6.4343
8. Hamza D. R., Aissa S., Anipa G. Equal gain combining for cooperative spectrum sensing in cognitive radio networks. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2014, vol. 13, no. 8, pp. 4334–4345. Doi: 10.1109/twc.2014.2317788
9. Wu W. Satellite communications. *Proceedings IEEE*, 1995, vol. 85, no. 6, pp. 998–1010. Doi: 10.1109/5.598421
10. Chytil, B. The distribution of amplitude scintillation and the conversion of scintillation indices. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, 1967, vol. 29, no. 9, pp. 1175–1177. Doi: 10.1016/0021-9169(67)90151-1
11. Bischoff K., Chytil B. A note on scintillation indices. *Planetary and Space Science*, 1969, vol. 17, no. 8, pp. 463–467. Doi: 10.1016/0032-0633(69)90112-3
12. Abu-Dayya A., Beaulieu C. Macrodiversity on Rician fading channels. *IEEE Transactions on Communications*, 1994, vol. 42, no. 6, pp. 2258–2267. Doi: 10.1109/26.293677
13. Vitetta G. M., Mengali U., Taylor D. P. An error probability formula for non-coherent orthogonal binary FSK with dual diversity on correlated Rician channels. *IEEE Communications Letters*, 1999, vol. 3, no. 2, pp. 43–45. Doi: 10.1109/4234.749357
14. Karagiannidis G. R., Georgopoulos C. J., Kotsopoulos S. A. Outage probability analysis for a Rician signal in L Nakagami interferers with arbitrary parameters. *KICS Journal on Communications Networks*, 1999, vol. 1, no. 1, pp. 26–30. Doi: 10.1109/jcn.1999.6596695
15. Ekanayake N. Equal-gain combining diversity reception of M -ary CPSK signals in Nakagami fading. *IEEE Communications Letters*, 2010, vol. 14, no. 4, pp. 285–287. Doi: 10.1109/lcomm.2010.04.092491
16. Annamalai A., Tellambura C., Bhargava V. K. Equal-gain diversity receiver performance in wireless channels. *IEEE Transactions on Communications*, 2000, vol. 48, no. 10, pp. 1732–1745. Doi: 10.1109/26.871398
17. Rohilla S., Patidar D. K., Soni N. K. Comparative analysis of maximum ratio combining and equal gain combining diversity techniques for WCDMA: a survey. *International Journal of Engineering Inventions*, 2013, vol. 3, no. 1, pp. 72–77.
18. Helstrom C. W. Computing the distribution of sums of random sine waves and of Rayleigh-distributed random variables by saddle-point integration. *IEEE Transactions on Communications*, 1997, vol. 45, no. 11, pp. 1487–1494. Doi: 10.1109/26.649781
19. Baker G. A., Graves-Morris P. *Pade Approximation*. Cambridge, Cambridge University Press, 1996. 746 p. Doi: 10.1017/cbo9780511530074
20. Tuzlukov V. P. *Signal Processing in Radar Systems*. Boca Raton, CRC Press, 2013. 632 p.
21. Abramovitz M., Stegun A. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York, Dover, 1972. 1061 p.
22. Popov V. F. Noise immunity evaluation at diversity Nakagami fading and coherent weight combining. *Omskii nauchnyi vestnik Ser. Pribory, mashiny i tekhnologii* [Scientific Vestnik of the Omsk State University. Series: Equipment, Machinery and Technologies], 2012, vol. 113, no. 3, pp. 309–313 (in Russian).
23. Win M. Z., Mallik R. K., Chrisikos G. Higher order statistics of antenna subset diversity. *IEEE Transaction on Wireless Communications*, 2003, vol. 2, no. 5, pp. 871–875. Doi: 10.1109/twc.2003.816774
24. Bykhovskii M. A. Optimal linear correction of multipath diversity channel. *Elektrosviaz' = Telecommunications and Radio Engineering*, 2011, no. 12, pp. 36–41 (in Russian).
25. Tuzlukov V. P. (ed.). *Communications Systems: New Research*. New York, NOVA Science Publishers Inc., 2013. 423 p.
26. Charash U. Reception through Nakagami fading multipath channels with random delays. *IEEE Transactions on Communications*. 1979, vol. 27, no. 4, pp. 657–670. Doi: 10.1109/tcom.1979.1094444
27. Shamai S., Verdú S. The impact of frequency-flat fading on the spectral efficiency of CDMA. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2001, vol. 47, no. 4, pp. 1302–1327. Doi: 10.1109/18.923717
28. Papoulis A. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. New York, McGraw-Hill, 2002. 852 p.
29. Amindavar H., Ritcey J. A. Rade approximation of probability density functions. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronics Systems*. 1994, vol. 30, no. 2, pp. 416–424. Doi: 10.1109/7.272264
30. Nikitin O. R., Polushin P. A., Girshevich M. V., Piatov V. A. Diversity combining digital signal processing procedure. *Vestnik Riazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta = Vestnik of Ryazan State Radio Engineering University*, 2009, vol. 27, no. 1, pp. 27–32 (in Russian).

Информация об авторе

Тузлуков Вячеслав Петрович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой технической эксплуатации авиационного и радиоэлектронного оборудования, Белорусская государственная академия авиации (ул. Уборевича, 77, 220096, Минск, Республика Беларусь). E-mail: slava.tuzlukov@mail.ru

Information about the author

Tuzlukov P. Vyacheslav – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Technical Maintenance of Aviation and Radio Electronic Equipment, Belarusian State Aviation Academy (77, Ubovich Str., 220096, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: slava.tuzlukov@mail.ru