

Ю. И. Першина, А. В. Шилин

Украинская инженерно-педагогическая академия, Харьков, Украина

РЕШЕНИЕ 3D-ЗАДАЧИ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ ПО ИЗВЕСТНЫМ ТОМОГРАММАМ НА СИСТЕМЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

Аннотация. Построена и исследована математическая модель двумерной компьютерной томографии с использованием интерфлетации функций трех переменных по известным томограммам исследуемого тела. Дается понятие томограммы в математическом смысле как след от функции трех переменных на заданной плоскости, построен алгоритм перевода изображения томограмм в функциональную зависимость, аргументами которой являются номер рисунка и координаты точек. Это дает возможность работать с томограммами как с функциями, то есть позволяет по номеру рисунка получать его изображения и выделять компонент цвета в указанной точке рисунка.

Строится и исследуется оператор интерфлетации функции трех переменных по известным следам функции на системе произвольных плоскостей. Приводится теорема об общем виде погрешности приближения функции трех переменных, построенного оператором интерфлетации в интегральном виде. Также приведена оценка неустранимой погрешности экспериментальных данных. Продемонстрирован пример восстановления функции трех переменных с помощью оператора интерфлетации по ее известным следам на системе произвольно расположенных плоскостей. Проведен численный эксперимент для заранее заданного тела, для этого был разработан комплекс программ в системе компьютерной математики MathCad. Численный эксперимент дает результаты визуализации точного решения и решения, полученного экспериментально, для случая, когда известна точная функция.

Предложенный метод восстановления существенно отличается от существующих тем, что в нем может проводиться обработка томограмм, которые не лежат в параллельных плоскостях (например, в простейшем случае томограммы могут располагаться в системе трех групп плоскостей, параллельных координатным плоскостям).

Ключевые слова: компьютерная томография, интерфлетация, восстановление, томограмма, математическая модель, погрешность восстановления, численный эксперимент

Для цитирования: Першина, Ю. И. Решение 3D-задачи компьютерной томографии по известным томограммам на системе произвольных плоскостей / Ю. И. Першина, А. В. Шилин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2017. – №4. – С. 112–121.

Iu. I. Pershyna, O. V. Shylin

Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov, Ukraine

THE SOLUTION TO THE 3D PROBLEM OF COMPUTER TOMOGRAPHY WITH KNOWN TOMOGRAMS ON THE SYSTEM OF ARBITRARY PLANES

Abstract. The article is based on restoration method for the internal structure of a three-dimensional body using polynomial interflatation based on known tomograms (traces) lying on a system of arbitrary planes, which is a generalization of the method of body restoration with its known tomograms on a system of three groups of parallel planes. A definition of tomograms in the mathematical sense has been provided and the algorithm of transition of tomogram images into the functional dependence has been outlined.

Theorems on interflatation properties and errors of the built operator have been formulated and proved. A test case for the construction of the interflatation operator for the quadratic function has been demonstrated, and the computational experiment involved the development of a number of programs in MathCad. The experiment has provided visualization results for an exact solution and a solution obtained experimentally for the case when the exact function is known. It has been shown that the constructed structure approximates this function exactly, which is not the case of classic interpolation operators.

The suggested method makes it possible to solve the problem of three-dimensional computer tomography for a fundamentally new data collection scheme. For example, it permits the use of the fan scheme for data collection in each of the planes in which the tomograms lie.

Keywords: computer tomography, interflatation, restoration, tomogram, mathematical model, restoration error, computational experiment

For citation. Pershyna Iu. I., Shylin O. V. The solution to the 3D problem of computer tomography with known tomograms on the system of arbitrary planes. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2017, no. 4, pp. 112–121 (in Russian).

Введение. В последней четверти XX в. в практике медицинских исследований, а также при неразрушающем контроле трехмерных объектов и проведении научных исследований в различных областях науки и техники нашли широкое применение компьютерные томографы [1–3], которые позволяют восстанавливать внутреннюю структуру тела, не разрезая его. При этом возник новый класс задач – задачи восстановления внутренней структуры трехмерного тела по его известным томограммам на нескольких плоскостях.

В работах [4, 5] построены и исследованы операторы полиномиальной и сплайн-интерфлетиции [6] функции трех переменных по известным следам на системе трех групп плоскостей (в каждой группе плоскости параллельны), и на основе этих операторов решена задача трехмерной компьютерной томографии в случае, когда известны томограммы в системе трех групп перерезанных плоскостей (параллельная схема сканирования). Доказана высокая точность разработанных методов. Известны также методы решения 3D-задачи компьютерной томографии с помощью конусообразной и спиральной схем сканирования, в которых заданные плоскости не являются параллельными [7–9].

Целью данной работы явилось решение задачи восстановления внутренней структуры трехмерного тела по известным томограммам, лежащим на системе произвольно расположенных плоскостей. Разработанный в статье метод является обобщением методов, изложенных авторами в [4, 5], и является более точным, чем известные методы авторов [7–9].

Построение оператора интерфлетиции на системе произвольно расположенных плоскостей. Пусть скалярно-значная функция $f(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $x \in R^3$ описывает некоторую физическую характеристику внутренней структуры (например, плотность, коэффициент поглощения и пр.). Источником информации о функции $f(x)$, то есть о внутренней структуре трехмерного тела, будем считать набор любых N перерезанных плоскостей, а также набор томограмм $T_k(x)$, лежащих на этих плоскостях, которые задаются следующими уравнениями:

$$\Pi_k : \omega_k(x) = \sum_{p=1}^3 a_{kp} x_p - \gamma_k = 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad \sqrt{\sum_{p=1}^3 a_{kp}^2} = 1.$$

Предположим, что в одной точке пересекается не более трех плоскостей.

Введем следующие обозначения:

$$1) \tau_{ik} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{vmatrix} \quad - \text{ вектор, направленный вдоль линии пересечения плоскостей}$$

$$\omega_i = 0, \quad \omega_k = 0;$$

2) $M = \{(i, k, l) | \Pi_i \cap \Pi_k \cap \Pi_l = V_{ikl} = (x_{ikl1}, x_{ikl2}, x_{ikl3}) \neq \emptyset, i \neq k \neq l\}$, где V_{ikl} – точка пересечения трех плоскостей, M – множество точек пересечения;

3) $\Gamma_{ik} = \Pi_i \cap \Pi_k \neq \emptyset$ – ребра, по которым пересекаются две плоскости, на которых лежат соответствующие томограммы;

$$4) \Delta_{ikl} = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \\ a_{l1} & a_{l2} & a_{l3} \end{vmatrix} \quad - \text{ определитель, составленный из коэффициентов уравнения заданных}$$

плоскостей;

5) $T_k(\bar{x})$ – томограмма, которая лежит на плоскости Π_k .

Определение 1 [4]. Томограммой $T_k(\bar{x})$ (следом функции $f(x)$ на плоскости $\omega_k(x) = 0$ при условии, что коэффициенты $a_{ki}, i = \overline{1, 3}$ не равны нулю) будем называть одну из трех функций:

$$T_k(\bar{x}) = \begin{cases} f(x_{1k}(x_2, x_3), x_2, x_3) \\ f(x_1, x_{2k}(x_1, x_3), x_3) \\ f(x_1, x_2, x_{3k}(x_1, x_2)) \end{cases} = \begin{cases} f((\gamma_k - a_{k2}x_2 - a_{k3}x_3) / a_{k1}, x_2, x_3), a_{k1} \neq 0 \\ f(x_1, (\gamma_k - a_{k1}x_1 - a_{k3}x_3) / a_{k2}, x_3), a_{k2} \neq 0 \\ f(x_1, x_2, (\gamma_k - a_{k1}x_1 - a_{k2}x_2) / a_{k3}), a_{k3} \neq 0 \end{cases}, \quad \bar{x} = \begin{cases} (x_1, x_2), x_3 = 0 \\ (x_1, x_3), x_2 = 0 \\ (x_2, x_3), x_1 = 0 \end{cases}$$

где $x_k = x_{kp}$, $k = \overline{1, 3}$ – выражения, получаемые решением уравнения $\omega_k(x) = 0$ относительно переменной x_p .

Пусть томограммы $T_i(\bar{x})$, $T_k(\bar{x})$, $T_l(\bar{x})$ пересекаются в точке V_{ikl} . Обозначим: $u_{il}^k(x) = V_{ikl} + \frac{\tau_{ik}}{\Delta_{ikl}} \omega_l(x) + \frac{\tau_{kl}}{\Delta_{kli}} \omega_i(x)$, $w_i(x) = V_{ikl} + \frac{\tau_{kl}}{\Delta_{kli}} \omega_i(x)$.

Теорема 1. Для существования функции $L_{ikl}(x) \in C^r(\Omega)$ с заданными томограммами $T_{1,i}(\bar{x})$, $i = \overline{1, n}$, $T_{2,k}(\bar{x})$, $k = \overline{1, m}$, $T_{3,l}(\bar{x})$, $l = \overline{1, s}$, для которой выполняются условия:

$$L_{ikl}(x)|_{\Pi_i} = T_{1,i}(\bar{x})|_{\Pi_i}, L_{ikl}(x)|_{\Pi_k} = T_{2,k}(\bar{x})|_{\Pi_k}, L_{ikl}(x)|_{\Pi_l} = T_{3,l}(\bar{x})|_{\Pi_l}, \quad (1)$$

необходимо и достаточно, чтобы следы $T_{q,d}(\bar{x})$, $q = 1, 2, 3$, $d = i, k, l$, $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, m}$, $l = \overline{1, s}$ удовлетворяли условию $T_{q,d}(\bar{x}) \in C^r(R^2)$, $r \geq 0$ и условиям С. М. Никольского, которые на ребре Γ_{kl} сводятся к проверке равенств:

$$T_{2,k}(u_{il}^k(x))|_{\omega_{3l}(x)=0} = T_{3,l}(u_{il}^l(x))|_{\omega_{2k}(x)=0},$$

то есть значения томограмм на линии пересечения должны совпадать для всех пересекающихся томограмм. Аналогичный вид имеют эти условия на ребрах Γ_{ik} , Γ_{li} .

В точке V_{ikl} условия Никольского сводятся к проверке равенств:

$$T_{3,l}(u_{il}^l(x))|_{\omega_{1i}(x)=0, \omega_{2k}(x)=0} = T_{2,k}(u_{il}^k(x))|_{\omega_{3l}(x)=0, \omega_{1i}(x)=0} = T_{1,i}(u_{kl}^i(x))|_{\omega_{2k}(x)=0, \omega_{3l}(x)=0},$$

то есть, значения томограмм в точке пересечения должны совпадать для всех пересекающихся томограмм.

Доказательство. Оператор $L_{ikl}(x)$ построим в виде:

$$L_{ikl}(x) = L_{ikl}(\{T_{q,d}\}, x) = \left[L_{ik}^l + L_{kl}^i + L_{li}^k - L_{li}^k L_{kl}^i - L_{kl}^i L_{ik}^l - L_{li}^k L_{ik}^l + L_{ik}^l L_{kl}^i L_{li}^k \right] (\{T_{q,d}\}, x) \quad (2)$$

$$L_{ik}^l(\{T_{q,d}\}, x) = T_{3,l}(u_{ik}^l(x)) = f(u_{ik}^l(x)), L_{kl}^i L_{li}^k(\{T_{q,d}\}, x) = f(w_k(x)),$$

$$L_{ik}^l L_{kl}^i L_{li}^k(\{T_{q,d}\}, x) = f(V_{ikl}), q = 1, 2, 3, d = i, k, l.$$

Аналогично определяются операторы L_{kl}^i , L_{li}^k , $L_{kl}^i L_{li}^k$, $L_{li}^k L_{ik}^l$.

В работе С. М. Никольского [10] доказано, что для того, чтобы существовала функция $f(x_1, x_2, x_3) \in C^r(\Omega)$, имеющая следы

$$\left. \frac{\partial^\beta f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_s^p} \right|_{x_s=0} = \phi_{s,p} \Big|_{x_s=0}, s = 1, 2, 3, p = \overline{0, r},$$

необходимо и достаточно, чтобы граничные функции $\phi_{s,p}(\bar{x})$ удовлетворяли в точке $(0, 0, 0)$ условиям вида

$$\left. \frac{\partial^\beta \phi_{s,\alpha}(\bar{x})}{\partial x_p^\beta} \right|_{x_p=0} = \left. \frac{\partial^\alpha \phi_{s,\beta}(\bar{x})}{\partial x_s^\alpha} \right|_{x_s=0}, s, p = 1, 2, 3, \alpha, \beta = \overline{0, r}.$$

Этот факт позволяет строить операторы $L_{ikl}(x)$ в виде (2).

Теорема 1 доказана.

(Распространение результатов на случай большего количества плоскостей, чем три, приводится в теореме 4 благодаря использованию разложения единицы.)

Теорема 2. Пусть внутренняя структура трехмерного тела описывается функцией $f(x) \in C^r(\Omega)$ ($r \geq 3$), которая имеет томограммы $T_k(\bar{x})$, $k = \overline{1, N}$, заданные на плоскостях Π_k соответственно, и удовлетворяет условиям $f(x)|_{\Pi_s} = T_s(\bar{x})$. Тогда для погрешности $R_{ikl}f(x) = (I - L_{ikl})f(x)$ приближенного восстановления внутренней структуры $f(x)$ операторо-

ром $L_{ikl}(x)$, построенным с помощью данного набора плоскостей и томограмм, выполняется равенство

$$R_{ikl}f(x) = \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \int_0^{\omega_3} \frac{\partial^3}{\partial t_i \partial t_k \partial t_l} f \left(V_{ikl} + \frac{\tau_{kl}}{\Delta_{kli}} t_i + \frac{\tau_{li}}{\Delta_{lik}} t_k + \frac{\tau_{ik}}{\Delta_{ikl}} t_l \right) dt_i dt_k dt_l. \quad (3)$$

Доказательство. Примем во внимание тождества:

$$\begin{aligned} (I - L_{ikl})f(x) &= (I - L_{ik}^l - L_{kl}^i - L_{li}^k + L_{li}^i L_{kl}^k + L_{kl}^k L_{li}^l + L_{li}^l L_{ik}^i + L_{ik}^i L_{kl}^k L_{li}^l) f(x) = \\ &= (I - L_{kl}^i)(I - L_{li}^k)(I - L_{ik}^l) f(x), \end{aligned}$$

$$(I - L_{kl}^i) f(x) = \int_0^{\omega_i(x)} \frac{\partial f}{\partial t_i} \left(V_{ikl} + \frac{\tau_{kl}^{\omega_2, \omega_3}}{\Delta_{kli}} t_i + \frac{\tau_{li}^{\omega_3, \omega_1}}{\Delta_{lik}} \omega_k(x) + \frac{\tau_{ik}^{\omega_1, \omega_2}}{\Delta_{ikl}} \omega_l(x) \right) dt_i.$$

Подставим это интегральное выражение, а также аналогичные выражения для $(I - L_{li}^k) f(x)$, $(I - L_{ik}^l) f(x)$ в формулу (3):

$$\begin{aligned} R_{ikl}f(x) &= (I - L_{ikl})f(x) = (I - L_{kl}^i)(I - L_{li}^k)(I - L_{ik}^l) f(x) = \\ &= \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \int_0^{\omega_3} \frac{\partial^3}{\partial t_i \partial t_k \partial t_l} f \left(V_{ikl} + \frac{\tau_{kl}^{\omega_2, \omega_3}}{\Delta_{kli}} t_i + \frac{\tau_{li}^{\omega_3, \omega_1}}{\Delta_{lik}} t_k + \frac{\tau_{ik}^{\omega_1, \omega_2}}{\Delta_{ikl}} t_l \right) dt_i dt_k dt_l. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть множество произвольных томограмм, которые находятся на плоскостях, задаваемых уравнениями $\Pi_k : \omega_k(x) = 0, k = \overline{1, N}$, удовлетворяет условию: в одной точке $V_{ikl} = \Pi_i \cap \Pi_k \cap \Pi_l$ пересекаются не более трех томограмм.

Тогда система функций

$$h_{ikl}(x) = \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i, k, l}}^N \omega_j(x)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i, k, l}}^N \omega_j(V_{ikl})}$$

имеет свойства $h_{ikl}(V_{i'k'l'}) = \delta_{i,i'} \delta_{k,k'} \delta_{l,l'}$, $i, i' = \overline{1, n}$, $k, k' = \overline{1, m}$, $l, l' = \overline{1, s}$ и является разложением единицы, то есть $\sum_{\substack{i, k, l \in M \\ i \neq k \neq l}}^m h_{ikl}(x) = 1$.

Доказательство. Учтем, что $V_{i'k'l'} = \Pi_{i'} \cap \Pi_{k'} \cap \Pi_{l'}$, то есть $\omega_{l'}(V_{i'k'l'}) = 0$, $\omega_{k'}(V_{i'k'l'}) = 0$, $\omega_{i'}(V_{i'k'l'}) = 0$.

$$\begin{aligned} h_{ikl}(V_{i'k'l'}) &= \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i,}}^m \omega_j(V_{i'k'l'}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k,}}^n \omega_2(V_{i'k'l'}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l,}}^s \omega_3(V_{i'k'l'})}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i,}}^m \omega_j(V_{i'k'l'}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k,}}^n \omega_2(V_{i'k'l'}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l,}}^s \omega_3(V_{i'k'l'})} = \begin{cases} 1, & i=i', k=k', l=l' \\ 0, & \text{в других случаях} \end{cases} = \\ &= \delta_{i,i'} \delta_{k,k'} \delta_{l,l'}, \quad i, i' = \overline{1, m}, \quad k, k' = \overline{1, n}, \quad l, l' = \overline{1, s}. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

Лемма 1. Пусть томограммы $T_{1,i}(\bar{x})$, $i = \overline{1, n}$, $T_{2,k}(\bar{x})$, $k = \overline{1, m}$, $T_{3,l}(\bar{x})$, $l = \overline{1, s}$ удовлетворяют условиям теоремы 2, тогда система функций $h_{ikl}(x)$ является разложением единицы:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k, l}}^m \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, l}}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i, k}}^s h_{ikl}(x) = 1.$$

Доказательство. Равенство для $h_{ikl}(x)$ можно записать в виде

$$h_{ikl}(x) = \frac{\prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^n \omega_{1\Pi\mu}(x) \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^m \omega_{2\Pi 2v}(x) \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq l}}^s \omega_{3\Pi 3\beta}(x)}{\prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^n \omega_{1\Pi\mu}(V_{ikl}) \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^m \omega_{2\Pi 2v}(V_{ikl}) \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq l}}^s \omega_{3\Pi 3\beta}(V_{ikl})} = \\ = \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^n \frac{\omega_{1\Pi\mu}(x)}{\omega_{1\Pi\mu}(V_{ikl})} \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^m \frac{\omega_{2\Pi 2v}(x)}{\omega_{2\Pi 2v}(V_{ikl})} \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq l}}^s \frac{\omega_{3\Pi 3\beta}(x)}{\omega_{3\Pi 3\beta}(V_{ikl})}.$$

Теперь просуммируем это выражение:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \neq l}}^m \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \neq l}}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k \neq i}}^s h_{ikl}(x) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \neq l}}^m \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \neq l}}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k \neq i}}^s \left[\prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^n \frac{\omega_{1\Pi\mu}(x)}{\omega_{1\Pi\mu}(V_{ikl})} \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^m \frac{\omega_{2\Pi 2v}(x)}{\omega_{2\Pi 2v}(V_{ikl})} \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq l}}^s \frac{\omega_{3\Pi 3\beta}(x)}{\omega_{3\Pi 3\beta}(V_{ikl})} \right] = \\ = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \neq l}}^n \left[\prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^n \frac{\omega_{1\Pi\mu}(x)}{\omega_{1\Pi\mu}(V_{ikl})} \right] \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \neq l}}^m \left[\prod_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^m \frac{\omega_{2\Pi 2v}(x)}{\omega_{2\Pi 2v}(V_{ikl})} \right] \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k \neq i}}^s \left[\prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq l}}^s \frac{\omega_{3\Pi 3\beta}(x)}{\omega_{3\Pi 3\beta}(V_{ikl})} \right] \equiv 1.$$

Здесь учитывается, что

$$\prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^n \frac{\omega_{1\Pi\mu}(x)}{\omega_{1\Pi\mu}(V_{\mu\nu\beta})}, \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^m \frac{\omega_{2\Pi 2v}(x)}{\omega_{2\Pi 2v}(V_{\mu\nu\beta})}, \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq l}}^s \frac{\omega_{3\Pi 3\beta}(x)}{\omega_{3\Pi 3\beta}(V_{\mu\nu\beta})}$$

являются базисными полиномами Лагранжа. Из этого следует, что

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \neq l}}^n \left[\prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^n \frac{\omega_{1\Pi\mu}(x)}{\omega_{1\Pi\mu}(V_{ikl})} \right] \equiv 1, \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \neq l}}^m \left[\prod_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^m \frac{\omega_{2\Pi 2v}(x)}{\omega_{2\Pi 2v}(V_{ikl})} \right] \equiv 1, \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k \neq i}}^s \left[\prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq l}}^s \frac{\omega_{3\Pi 3\beta}(x)}{\omega_{3\Pi 3\beta}(V_{ikl})} \right] \equiv 1.$$

Лемма доказана.

Теорема 4. Пусть томограммы $T_k(\bar{x}) \in C^r(R^2)$, $r \geq 3$ удовлетворяют условиям С. М. Никольского на ребрах и в точке пересечения плоскостей. Тогда функция $L(x) = \sum_{(i,k,l) \in M} h_{ikl}(x)L_{ikl}(x)$ является полиномиальным интерфлетантом со свойствами:

$$L(x) \in C^r(\Omega), \quad L(x)|_{\Pi_s} = T_s(\bar{x}), \quad s = \overline{1, N}. \quad (4)$$

При этом $\forall f(x) \in C^r(\Omega)$, $r \geq 3$, что удовлетворяет условиям теоремы 3, выполняется равенство

$$L(x) = Lf(x), \quad f(x) = Lf(x) + Rf(x), \quad R(x)f(x) = \sum_{(i,k,l) \in M} h_{ikl}(x)R_{ikl}f(x),$$

где $R_{ikl}f(x)$ определяется формулой (3), а $h_{ikl}(x)$ – вспомогательные полиномы, которые устанавливаются в теореме 3.

Доказательство. Согласно формуле (2) при построении операторов $L_{ikl}(x)$ используются функции $T_{1,i}(\bar{x})$, $T_{2,k}(\bar{x})$, $T_{3,l}(\bar{x}) \in C^r(R^2)$, $r \geq 3$.

Поэтому $L(x) \in C^r(R^3)$, или, если $\Omega \subset R^3$, то $L(x) \in C^r(\Omega)$. Доказательство соотношений (4) с использованием условия теоремы 1 и то, что система функций $h_{ikl}(x)$ является разложением единицы, проводится так:

$$L(x) \Big|_{\Pi_i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^s h_{ikl}(x)L_{ikl}(x) \Big|_{\Pi_i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^s h_{ikl}(x) \Big|_{\Pi_i} L_{ikl}(x) \Big|_{\Pi_i} = T_i(x) \Big|_{\Pi_i}.$$

Учитывая, что $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \neq l}}^m \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \neq l}}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k \neq i}}^s h_{ikl}(x) = 1$, формула $L_{ikl}f(x) + R_{ikl}f(x) = f(x)$ переписывается следующим образом:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^s h_{ikl}(x) [L_{ikl}f(x) + R_{ikl}f(x)].$$

Отсюда получаем

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^s h_{ikl}(x) L_{ikl}f(x) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^s h_{ikl}(x) R_{ikl}f(x) = (L(x) + R(x))f(x).$$

Теорема 4 доказана.

Теорема 5. Абсолютная неустранимая погрешность E построенного интерфлетанта в допущении, что $f(x, y, z)$ на плоскостях Π_k , соответствующие томограммы заданы приближенно к δ_k , то есть $|T_k(\bar{x}) - \tilde{T}_k(\bar{x})| \leq \delta_k$, $k = \overline{1, n}$, а также $|T_k(\bar{x})|_{\Pi_i} - \tilde{T}_k(\bar{x})|_{\Pi_i}| \leq \delta_{ki}$, $k = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, m}$, $|T_k(\bar{x})|_{\omega_i(x)=0, \omega_l(x)=0} - \tilde{T}_k(\bar{x})|_{\omega_i(x)=0, \omega_l(x)=0}| \leq \delta_{kil}$, равняется

$$E \leq \sum_{(i,k,l) \in M} \delta_i + \delta_k + \delta_l + \delta_i \delta_k + \delta_i \delta_l + \delta_k \delta_l + \delta_i \delta_k \delta_l.$$

Тестовый пример восстановления функции трех переменных с помощью оператора интерфлетации по ее известным следам на системе произвольно расположенных плоскостей. По изложенной методике был разработан комплекс программ в системе компьютерной математики MathCad. Результаты тестирования показывают высокую точность.

Продемонстрируем результаты работы программы.

Пусть заданы четыре плоскости $\Pi_k : \omega_k(x) = 0$:

$$\omega_1 = \frac{x+y+z-1}{\sqrt{3}}, \quad \omega_2 = \frac{-x+y+z-1}{\sqrt{3}}, \quad \omega_3 = \frac{x-y+z-1}{\sqrt{3}}, \quad \omega_4 = \frac{-x-y+z-4}{\sqrt{3}},$$

которые пересекаются в четырех точках:

$$V_{123} = (0, 0, 1), V_{124} = (0, -1, 5, 2, 5), V_{134} = (-1, 5, 0, 2, 5), V_{234} = (-1, 5, -1, 5, 1).$$

Наблюдаем, что в одной точке не пересекается больше трех плоскостей.

О функции $F(x) = x_1^2 + 10x_2 + 5x_3$ известны ее следы на заданных плоскостях, то есть томограммы:

$$T_1(\bar{x}) = F(x)|_{\omega_1(x)=0} = x_1^2 - 5x_1 + 5x_2 + 5, \quad T_2(\bar{x}) = F(x)|_{\omega_2(x)=0} = x_1^2 - 5x_1 + 15x_2 + 5,$$

$$T_3(\bar{x}) = F(x)|_{\omega_3(x)=0} = x_1^2 + 5x_1 + 5x_2 + 5, \quad T_4(\bar{x}) = F(x)|_{\omega_4(x)=0} = x_1^2 + 5x_1 + 15x_2 + 5.$$

По теореме 4 был построен оператор интерфлетации, использующий только заданные томограммы и уравнения плоскостей, на которых лежат томограммы. После упрощения построенный оператор приобретает следующий вид:

$$L(x) = x_1^2 + 10x_2 + 5x_3.$$

Численный эксперимент. По теореме 4 был проведен численный эксперимент для заранее заданного тела, для чего разработан комплекс программ в системе компьютерной математики MathCad. Результаты эксперимента показывают высокую точность восстановления.

Продемонстрируем результаты работы программы (circle), которая изображает численную реализацию метода восстановления. Программа построена на основе оператора сплайн-интерфлетации.

Предлагаются результаты визуализации точного решения и решения, полученного экспериментально, для случая, когда известна точная функция. В случае, который рассматривается в примере, функция $f_1(x, y, z)$ является томограммой.

Пусть есть функция, например, такого вида:

$$f_1(x, y, z) := \begin{cases} 0 & \text{if } (x-0,5)^2 + (y-0,5)^2 + (z-0,5)^2 \leq 0,2^2 \\ 2 & \text{if } (x-0,5)^2 + (y-0,5)^2 + (z-0,5)^2 > 0,2^2 \wedge (x-0,5)^2 + (y-0,5)^2 + (z-0,5)^2 \leq 0,2^2 \\ 3 & \text{if } (x-0,5)^2 + (y-0,5)^2 + (z-0,5)^2 > 0,5^2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

Функция (5) задана в области восстановления от 0 до 1 с шагом 0,1. На рис. 1 представлены графики функции $f_1(x, y, z)$, которая лежит на плоскостях.

Строим оператор сплайн-интерфлетации на взаимно перпендикулярных линиях ($LLL(x, y, z)$), $H(k, t)$ – вспомогательный полином Лагранжа (рис. 2).

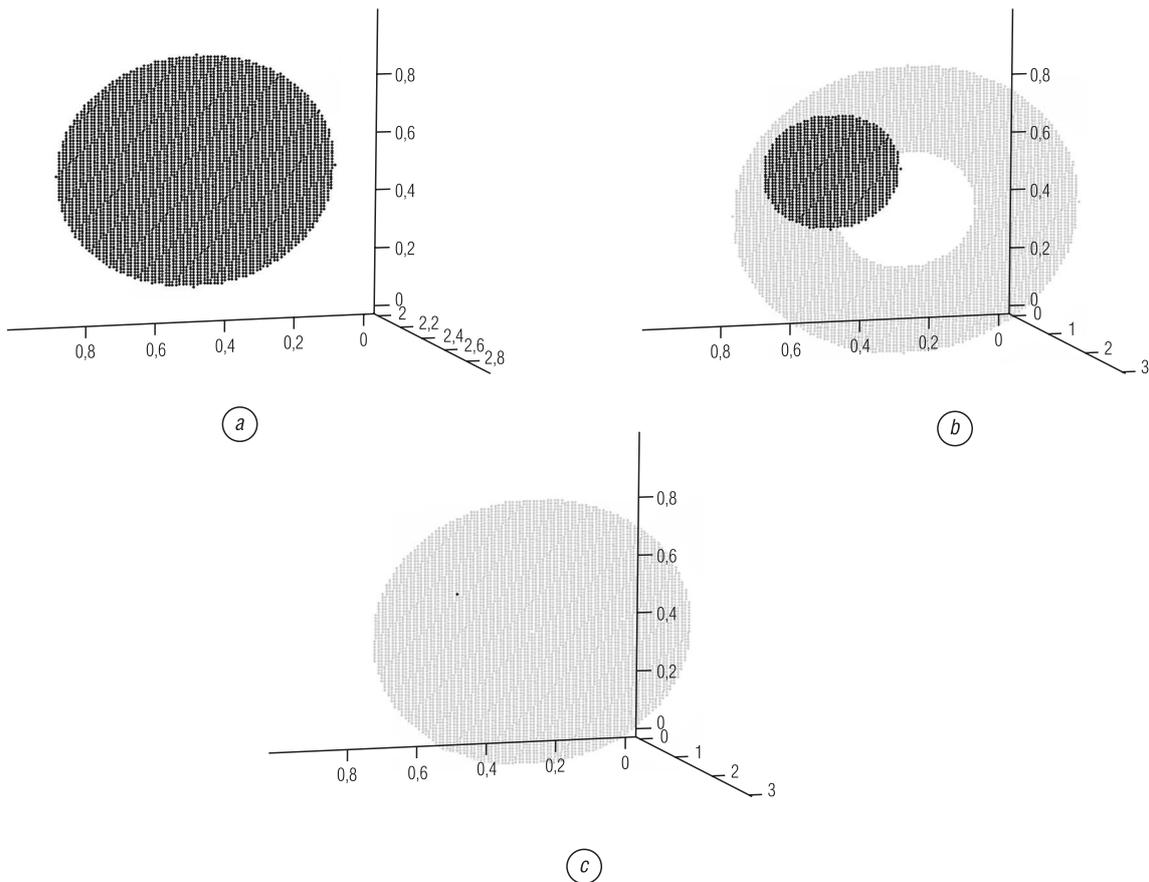


Рис. 1. Графики функции $f_1(x, y, z)$: $a - f_1(x, y, 0,1)$, $b - f_1(x, y, 0,5)$, $c - f_1(x, y, 0,7)$
 Fig. 1. Graphs of the function $f_1(x, y, z)$: $a - f_1(x, y, 0,1)$, $b - f_1(x, y, 0,5)$, $c - f_1(x, y, 0,7)$

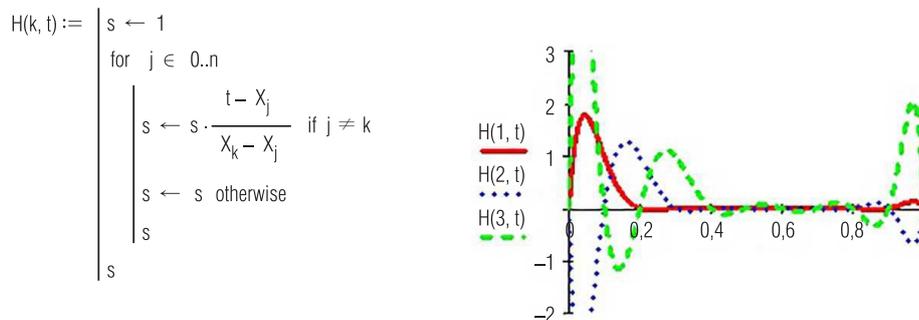


Рис. 2. Вспомогательный полином Лагранжа и его график в трех плоскостях
 Fig. 2. Lagrange preparatory polynomial and its graph in three dimensions

Результаты работы оператора LLL представлены на рис. 3.

Выполним проверку точности восстановления функции. Для этого сравним матрицы значений базовой функции и построенного оператора сплайн-интерфлетации (рис. 4).

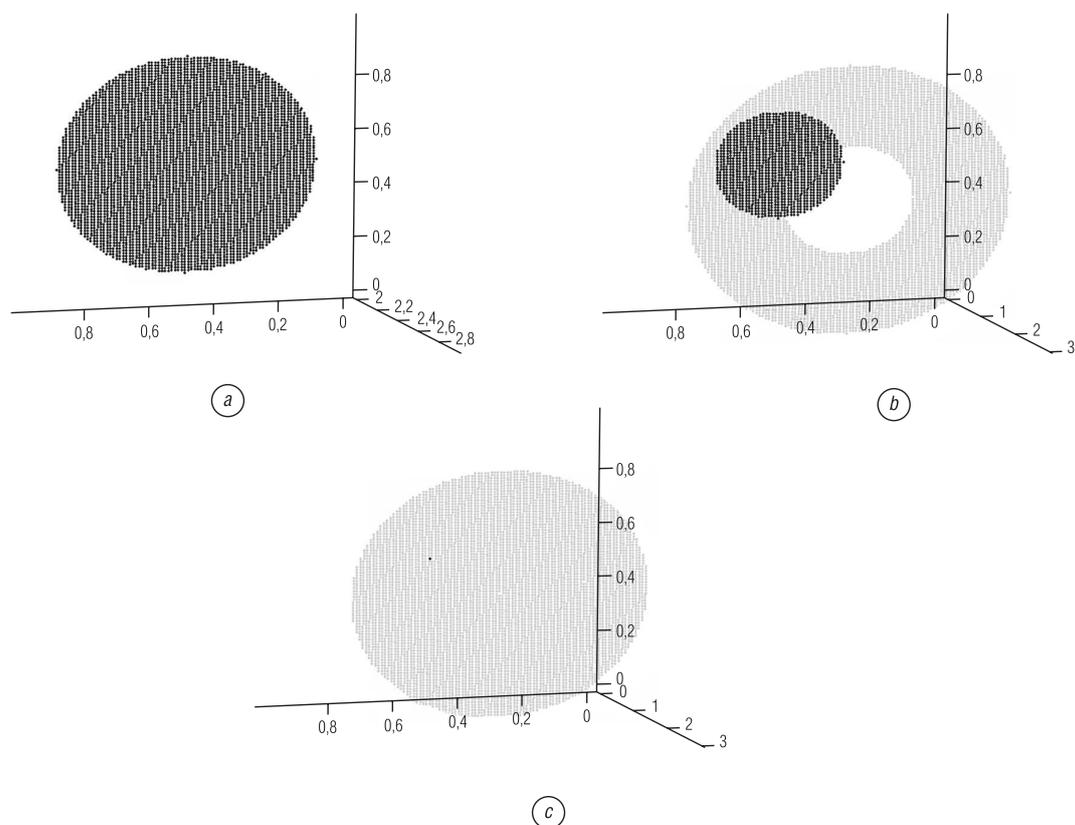


Рис. 3. Результаты работы оператора LLL : $a - LLL(x, y, 0,1)$, $b - LLL(x, y, 0,5)$, $c - LLL(x, y, 0,7)$
 Fig. 3. The results of the operator LLL work: $a - LLL(x, y, 0,1)$, $b - LLL(x, y, 0,5)$, $c - LLL(x, y, 0,7)$

$$L_2(x) := \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..10 \\ \quad \text{for } j \in 0..10 \\ \quad \quad y \leftarrow \frac{i}{10} \\ \quad \quad z \leftarrow \frac{j}{10} \\ \quad \quad AA_{i,j} \leftarrow f_1(x, y, z) \end{array} \quad L_3(x) := \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..10 \\ \quad \text{for } j \in 0..10 \\ \quad \quad y \leftarrow \frac{i}{10} \\ \quad \quad z \leftarrow \frac{j}{10} \\ \quad \quad AA_{i,j} \leftarrow LLL(x, y, z) \end{array}$$

$L_2(0.5) - L_3(0.5) =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 4. Проверка точности восстановления функции
 Fig. 4. Checking the accuracy of the function restoration

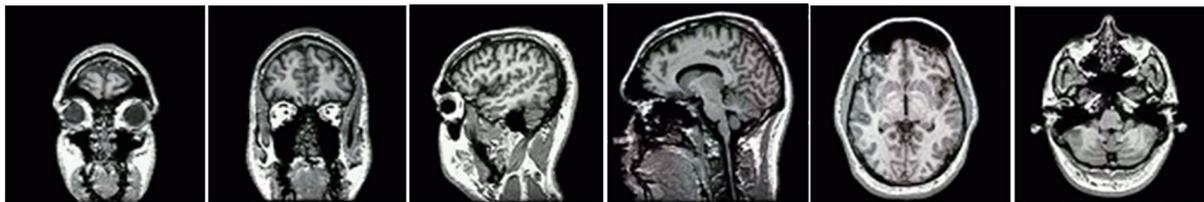
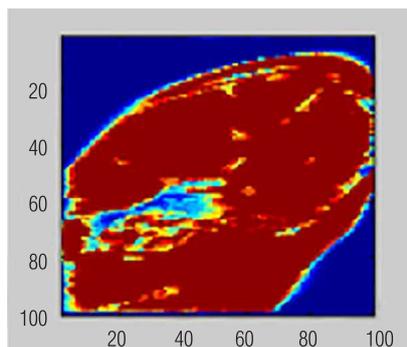


Рис. 5. Примеры томограмм, которые используются для восстановления

Fig. 5. Examples of tomograms used for restoration

Рис. 6. Результаты восстановления плотности $f(x, y, z)$ предложенным методом в плоскости $x + y + 10z = 0$ Fig. 6. The results of $f(x, y, z)$ density restoration with the use of the suggested method in the plane $x + y + 10z = 0$

Также проверим максимумы и минимумы базовой функции и построенного оператора сплайн-интерфлетации: $\max(L_2(0,45)) = 3$, $\max(L_3(0,45)) = 3$, $\min(L_2(0,45)) = 0$, $\min(L_3(0,45)) = 0$. Построенный оператор сплайн-интерфлетации точно приближает заданную функцию. Также возможно использование томограммы вместо функции. Результаты отражены на рис. 5, 6.

Вывод. Из тестового примера и численной реализации делаем вывод, что построенный оператор интерфлетации по известным томограммам (следам) на системе произвольно расположенных плоскостей точно восстановил квадратичную функцию, чего невозможно достичь с помощью операторов интерполяции, которые используются в современных методах компьютерной томографии. Но для предотвращения погрешности (шумов) надо более точно фиксировать объект и задавать более редкий интервал между проекциями.

Изложенный метод восстановления внутренней структуры трехмерного тела с помощью операторов интерфлетации в случае известных томограмм, лежащих на системе любых плоскостей, является обобщением разработанного авторами метода восстановления с известными томограммами на системе трех групп перерезанных плоскостей и имеет такую же высокую точность.

Список использованных источников

1. Наттерер, Ф. Математические аспекты компьютерной томографии / Ф. Наттерер; пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 279 с.
2. Хермен, Г. Восстановление изображений по проекциям: основы реконструктивной томографии / Г. Хермен; пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 350 с.
3. Хелгасон, С. Преобразование Радона / С. Хелгасон; пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 152 с.
4. Сергієнко, І. В. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням інтерфлетатії функцій / І. В. Сергієнко, О. М. Литвин, Ю. І. Першина. – Харків: [б. в.], 2008. – 160 с.
5. Литвин, О. М. Математична модель відновлення внутрішньої структури тривимірного об'єкта за відомими його томограмами з використанням інтерфлетатії функцій / О. М. Литвин, Ю. І. Першина // Допов. Нац. акад. наук України. – 2005. – № 1. – С. 20–24.
6. Литвин, О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування / О. М. Литвин. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
7. Likhachev, A. V. A new method for deriving unknown additive background in projection in three-dimensional tomography / A. V. Likhachev, V. V. Pickalov // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2002. – Vol. 42, № 3. – P. 341–352.
8. Трофимов, О. Е. Об одном способе восстановления изображения по многоакурсной томограмме / О. Е. Трофимов, Л. В. Тюренкова. – Новосибирск: ИАЭ СО АН СССР, 1989. – 28 с.
9. Пикалов, В. В. Сравнение алгоритмов спиральной томографии / В. В. Пикалов, А. В. Лихачев // Вычислительные методы и программирование. – 2004. – № 5. – С. 170–183.
10. Никольский, С. М. Граничные свойства функций, определенных на области с угловыми точками / С. М. Никольский // Математический сб. – 1958. – Т. 45 (87), № 2. – С. 181–194.

References

1. Natterer F. *Mathematical aspects of computerized tomography*. New York, Wiley, 1986. 221 p.
2. Herman, G. T. *Image Reconstruction from Projections. The Fundamentals of Computerized Tomography*. New York – London, Academic Press, 1980. 316 p.

3. Helgason S. *The Radon Transform*. Boston, Birkhäuser, 1980. 195 p. Doi: 10.1007/978-1-4899-6765-7
4. Sergienko I. V., Litvin O. M., Pershina Yu. I. *Mathematical modeling in computer tomography with the use of function interflatation*. Kharkiv, 2008. 160 p. (in Ukrainian).
5. Litvin O. M., Pershina Yu. I. Mathematical model of internal structure restoration for a 3D object with the use of function interflatation. *Dopovidi Nacional'noi' akademii' nauk Ukrai'ny = Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, 2005, no. 1, pp. 20–24 (in Ukrainian).
6. Litvin O. M. *Function interlination and some of its applications*. Kharkiv, Basis Publ., 2002. 544 p. (in Ukrainian).
7. Likhachev A. V., Pickalov V. V. A new method for deriving unknown additive background in projection in three-dimensional tomography. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2002, vol. 42, no. 3, pp. 341–352.
8. Trofimov O. E., Tyurenkova L. V. *On one method for image restoration based on multiangle tomogram*. Novosibirsk, IAE SO AN SSSR, 1989. 28 p. (in Russian).
9. Pikalov V. V., Lihachev A. V. Comparison of spiral tomography methods. *Vychislitelnyie metody i programmirovaniya = Numerical Methods and Programming*, 2004, no. 5, pp. 170–183 (in Russian).
10. Nikolskii S. M. Boundary properties of functions determined on the angular point domain. *Matematicheskii sbornik = Sbornik: Mathematics*, 1958, vol. 45 (87), no. 2, pp. 181–194 (in Russian).

Информация об авторах

Першина Юлия Игоревна – доктор физико-математических наук, профессор, Украинская инженерно-педагогическая академия (ул. Университетская, 16, 61003, Харьков, Украина). E-mail: yulia_pershyna@ukr.net

Шилин Александр Викторович – аспирант, Украинская инженерно-педагогическая академия (ул. Университетская, 16, 61003, Харьков, Украина). E-mail: sh.aleks783@gmail.com

Information about authors

Iuliia I. Pershyna – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy (16, Universitetskaya Str., 61003, Kharkov, Ukraine). E-mail: yulia_pershyna@ukr.net.

Oleksandr V. Shylin – Postgraduate Student, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy (16, Universitetskaya Str., 61003, Kharkov, Ukraine). E-mail: sh.aleks783@gmail.com.