

УДК 621.396.96

П. А. ХМАРСКИЙ, А. С. СОЛОНАР

**ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ НАБЛЮДЕНИЯ НА ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА
ДИСКРЕТНЫХ ФИЛЬТРОВ КАЛМАНА ПРИ НАБЛЮДЕНИИ
ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ**

Военная академия Республики Беларусь

(Поступила в редакцию 16.01.2014)

Введение. В современных радиолокаторах сопровождение воздушных объектов, как правило, осуществляется в прямоугольных координатах при наблюдении полярных координат. Переход от прямоугольных координат к полярным и (или) обратно выполняется при помощи нелинейных функциональных преобразований. В этом случае использование напрямую уравнений дискретного линейного фильтра Калмана для сопровождения объектов невозможно. Известен целый ряд модификаций фильтра Калмана, позволяющих обойти эту проблему [1–4]. В основе данных модификаций лежит метод линеаризации, позволяющий заменить нелинейные преобразования на линейные в окрестности оценки (разовой или экстраполированной). Для этого нелинейные функции раскладываются в ряд Тейлора, из которого используется только первый член [5–7].

При проведении радиолокационных наблюдений широкое распространение получили три модификации фильтра Калмана [4, 8]: при косвенном измерении; при наблюдении коррелированных прямоугольных координат; при наблюдении независимых прямоугольных координат. В первой модификации используется переход из прямоугольных координат в полярные, в остальных – переход из полярных в прямоугольные координаты. Однако для некоторых условий наблюдений метод линеаризации не подходит, так как его использование может привести к возникновению значительных ошибок сопровождения в модификациях фильтра Калмана [9, 10]. В известной литературе эти условия не конкретизированы.

В данной статье приводится лишь первая часть результатов исследований. Она посвящена анализу влияния условий наблюдений на точность измерения дискретных фильтров Калмана при наблюдении коррелированных и независимых прямоугольных координат методом математического моделирования Монте-Карло.

Цель настоящей статьи – выявление условий наблюдений, которые будут оказывать существенное влияние на точность измерения дискретных фильтров Калмана при наблюдении прямоугольных координат.

Постановка задачи. Начальные условия. Будем считать, что с выхода устройства обработки радиолокационной информации поступают разовые оценки полярных координат $\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix}^T$ радиальной дальности r и азимута β от двухкоординатной радиолокационной станции (РЛС) кругового обзора. Над этими оценками осуществляется преобразование с целью перехода к разовым оценкам в прямоугольных координатах $\hat{\theta}_{xz} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{z} \end{bmatrix}^T$ (x соответствует направлению на север, z – направлению на восток). Взаимосвязь между координатами осуществлялась при помощи нелинейной вектор-функции $\mathbf{h}(\cdot)$, которая при преобразовании из полярной системы координат в прямоугольную равнялась

$$\theta_{xz} = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{h}(\theta) = \mathbf{h} \left(\begin{bmatrix} r \\ \beta \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} r \cos \beta \\ r \sin \beta \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Ошибки наблюдения $\hat{\theta}$ некоррелированные и характеризуются корреляционной матрицей ошибок измерения [11]:

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix},$$

где σ_r, σ_β – СКО гауссовых ошибок наблюдения радиальной дальности и азимута.

Интервал обновления данных считается постоянным и равен T . Наблюдается аэродинамический летательный аппарат, летящий с постоянной скоростью. В вектор состояния \mathbf{a} входят разовые оценки прямоугольных координат x, z и скоростей их изменения.

В рассматриваемых модификациях фильтра Калмана при наблюдении коррелированных и независимых прямоугольных координат фильтрация производится по $\hat{\theta}_{xz}$.

Задачи: 1) рассмотреть особенности метода линеаризации; 2) представить методику анализа влияния условий наблюдения на показатели качества двух модификаций фильтра Калмана; 3) методом математического моделирования оценить точность аппроксимации гауссовой плотности вероятности при переходе из полярных в прямоугольные координаты; 4) провести сопоставительный анализ результатов фильтрации модификаций фильтра Калмана.

Ошибки аппроксимации разовых оценок методом линеаризации. Метод линеаризации является одним из способов аппроксимации нелинейного преобразования в некоторой дельта-окрестности точки. Применительно к регулярным радиолокационным наблюдениям (когда оценка вектора наблюдения $\hat{\theta}$ состоятельная, эффективная и несмещенная) он подразумевает разложение в ряд Тейлора нелинейного преобразования (1) в окрестности $\hat{\theta}$ [5]:

$$\mathbf{h}(\theta) = \mathbf{h}(\bar{\theta} + \delta\theta) = \mathbf{h}(\bar{\theta}) + \nabla\mathbf{h}\delta\theta + \frac{1}{2}\nabla^2\mathbf{h}\delta\theta^2 + \frac{1}{3!}\nabla^3\mathbf{h}\delta\theta^3 + \dots + \frac{1}{n!}\nabla^n\mathbf{h}\delta\theta^n,$$

где $\hat{\theta}$ – математическое ожидание θ , $\delta\theta$ – дифференциал, который в данном случае может быть заменен случайной переменной, распределенной по нормальному закону распределения с нулевым математическим ожиданием, $\nabla\mathbf{h}$ – матрица частных производных Якоби, $\nabla^n\mathbf{h}\delta\theta^n$ – соответствующий n -й член многомерного ряда Тейлора. Можно показать, что значения математического ожидания $\bar{\theta}_{xz}$ и корреляционной матрицы ошибок \mathbf{R}_{xz} в прямоугольной системе координат будут равны [5, 6]:

$$\bar{\theta}_{xz} = E[\mathbf{h}(\bar{\theta} + \delta\theta)] = \mathbf{h}(\bar{\theta}) + E\left[\nabla\mathbf{h}\delta\theta + \frac{1}{2!}\nabla^2\mathbf{h}\delta\theta^2 + \frac{1}{3!}\nabla^3\mathbf{h}\delta\theta^3 + \dots\right] = \mathbf{h}(\bar{\theta}) + \frac{1}{2!}\nabla^2\mathbf{h}\delta\theta^2 + \frac{1}{4!}\nabla^4\mathbf{h}\delta\theta^4 + \dots, \quad (2)$$

$$\mathbf{R}_{xz} = E\left[(\theta_{xz} - \bar{\theta}_{xz})(\theta_{xz} - \bar{\theta}_{xz})^T\right],$$

где

$$\theta_{xz} - \bar{\theta}_{xz} = \mathbf{h}(\bar{\theta} + \delta\theta) - \bar{\theta}_{xz} = \left(\nabla\mathbf{h}\delta\theta + \frac{1}{2!}\nabla^2\mathbf{h}\delta\theta^2 + \frac{1}{3!}\nabla^3\mathbf{h}\delta\theta^3 + \dots\right) - E\left[\nabla\mathbf{h}\delta\theta + \frac{1}{2!}\nabla^2\mathbf{h}\delta\theta^2 + \frac{1}{3!}\nabla^3\mathbf{h}\delta\theta^3 + \dots\right].$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{xz} = E & \left[\nabla\mathbf{h}\delta\theta(\nabla\mathbf{h}\delta\theta)^T + \frac{\nabla\mathbf{h}\delta\theta(\nabla\mathbf{h}^3\delta\theta)^T}{3!} + \frac{\nabla\mathbf{h}^2\delta\theta(\nabla\mathbf{h}^2\delta\theta)^T}{2 \times 2!} + \frac{\nabla\mathbf{h}^3\delta\theta(\nabla\mathbf{h}\delta\theta)^T}{3!} \right] - \\ & - E \left[\frac{\nabla\mathbf{h}^2\delta\theta}{2!} \right] \left[\frac{\nabla\mathbf{h}^2\delta\theta}{2!} \right]^T + \dots = \nabla\mathbf{h}\mathbf{R}_\theta(\nabla\mathbf{h})^T + E \left[\frac{\nabla\mathbf{h}\delta\theta(\nabla\mathbf{h}^3\delta\theta)^T}{3!} + \frac{\nabla\mathbf{h}^2\delta\theta(\nabla\mathbf{h}^2\delta\theta)^T}{2 \times 2!} + \frac{\nabla\mathbf{h}^3\delta\theta(\nabla\mathbf{h}\delta\theta)^T}{3!} \right] - \\ & - \left[\frac{(\nabla\mathbf{h})^T \mathbf{R}_\theta \nabla\mathbf{h}}{2!} \right] \left[\frac{(\nabla\mathbf{h})^T \mathbf{R}_\theta \nabla\mathbf{h}}{2!} \right]^T + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

При использовании метода линеаризации для аппроксимации математического ожидания предполагается, что влиянием второго и более высоких порядков можно пренебречь; для аппроксимации корреляционной матрицы предполагается, что все нечетные члены ряда Тейлора будут равны нулю, а влиянием четвертого и более высоких порядков можно пренебречь. Тогда из выражений (2) и (3) получим требуемые значения математического ожидания и корреляционной матрицы [6, 8]:

$$\bar{\theta}_{xz} = \mathbf{h}(\bar{\theta}), \quad \mathbf{R}_{xz} = \nabla \mathbf{h} \mathbf{R}_{\theta} (\nabla \mathbf{h})^T.$$

Показатели качества при оценке точности аппроксимации гауссовой плотности вероятности. В качестве выбранных показателей качества рассматривались: суммарная ошибка пересчета математического ожидания; ошибки пересчета математического ожидания методом линеаризации; ошибки пересчета элементов корреляционной матрицы экстраполяции методом линеаризации; состоятельность преобразования η (характеризует сходимость оценки к истинному значению [1]).

Устройство сопоставительного моделирования. При проведении исследований оценка точности аппроксимации гауссовой плотности вероятности осуществлялась методом математического моделирования на ЭВМ. Для этого разработан комплекс моделирования, позволяющий устанавливать начальные значения; оценивать выбранные показатели качества для различных условий наблюдений; усреднять значения показателей качества; отображать результаты преобразований; сохранять в файл результаты проведенных модельных экспериментов; анализировать показатели качества по записанным смоделированным данным.

При помощи интерфейса пользователь может выбрать требуемые начальные значения, а также используемые для сравнения методы преобразования плотности вероятности. Сравнение производится по вычисленным показателям качества, значения которых усредняются по выбранному числу реализаций для каждого метода преобразования.

Оценка точности аппроксимации гауссовой плотности вероятности при переходе из полярных в прямоугольные координаты. При данном переходе оценку точности аппроксимации гауссовой плотности вероятности можно разбить на два случая – с учетом и без учета взаимной корреляции прямоугольных координат.

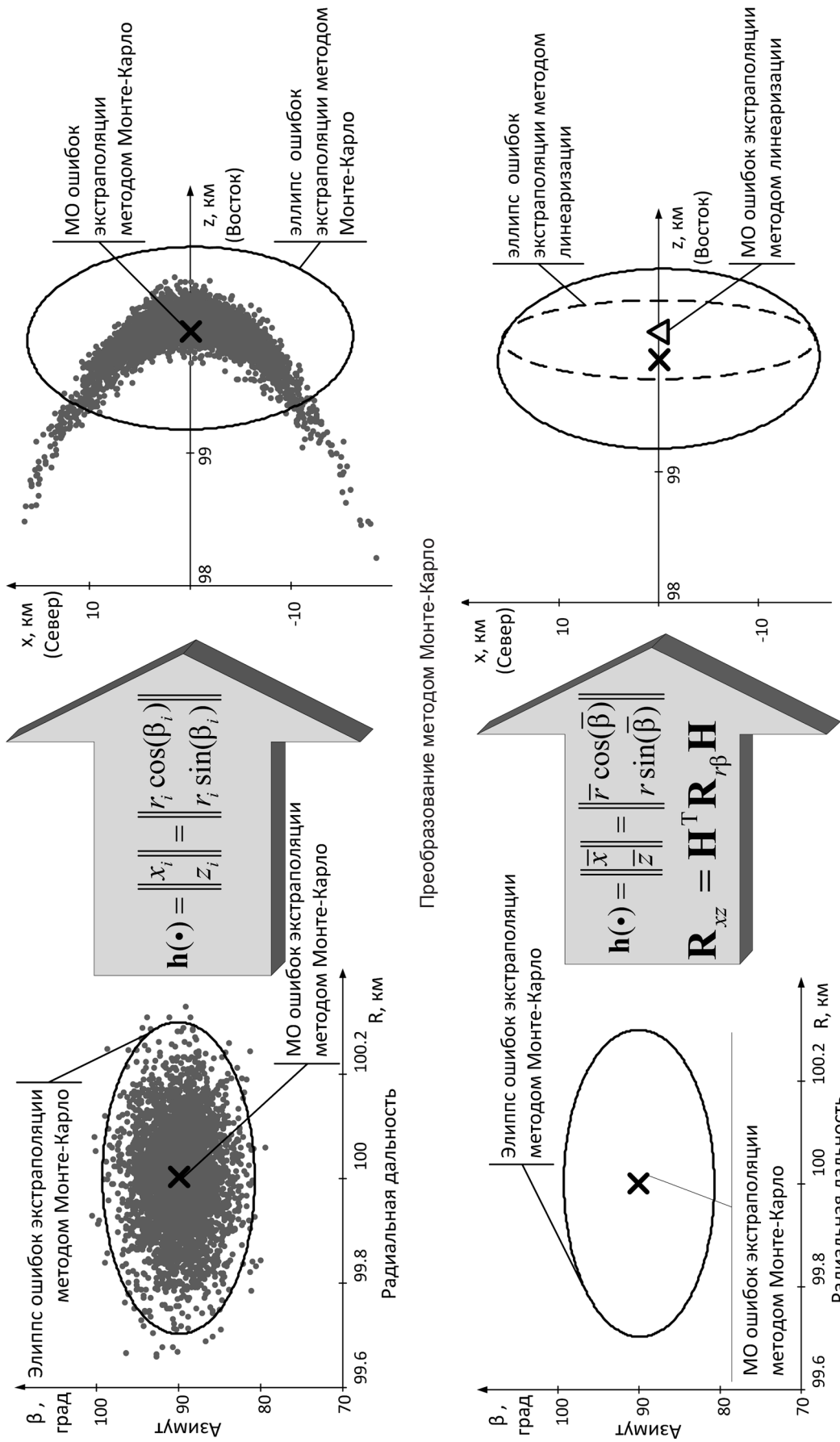
Переход с учетом взаимной корреляции прямоугольных координат. Неискаженная оценка математического ожидания и корреляционной матрицы преобразованной плотности вероятности производится методом Монте-Карло. Для этого генерируется 40 000 случайных отсчетов в полярной системе координат, распределенных по гауссовому закону с заданными математическим ожиданием и корреляционной матрицей. После генерации производится нелинейное преобразование (4) над каждым отсчетом. По полученной выборке Монте-Карло в прямоугольной системе координат оцениваются параметры преобразованной плотности вероятности. Данный подход демонстрируется в верхней части рис. 1, где наблюдается явное искажение исходной плотности вероятности при переходе в прямоугольную систему координат.

Одновременно с методом Монте-Карло параметры преобразованной плотности вероятности (математическое ожидание $\mathbf{m}_{Lr\beta}$ и корреляционная матрица $\mathbf{R}_{Lr\beta}$) оценивались при помощи метода линеаризации [6]:

$$\mathbf{m}_{Lr\beta} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \mathbf{h}(\bar{\alpha}) = \mathbf{h} \left(\begin{pmatrix} \bar{r} \\ \bar{\beta} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \bar{r} \cos \bar{\beta} \\ \bar{r} \sin \bar{\beta} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_{Lr\beta} = \begin{pmatrix} \sigma_r^2 \cos^2 \bar{\beta} + r^2 \sigma_\beta^2 \sin^2 \bar{\beta} & (\sigma_r^2 - r^2 \sigma_\beta^2) \sin \bar{\beta} \cos \bar{\beta} \\ (\sigma_r^2 - r^2 \sigma_\beta^2) \sin \bar{\beta} \cos \bar{\beta} & \sigma_r^2 \sin^2 \bar{\beta} + r^2 \sigma_\beta^2 \cos^2 \bar{\beta} \end{pmatrix}.$$

В нижней части рис. 1 продемонстрирована работа метода линеаризации. Здесь заметно явное отклонение оценки математического ожидания и значительное искажение эллипса ошибок экстраполяции (который описывается соответствующей корреляционной матрицей) от истинного значения.

Переход без учета взаимной корреляции прямоугольных координат. Вычисление значения математического ожидания не изменилось, отказ от учета взаимной корреляции приводит



Преобразование методом линейаризации

Рис. 1. Преобразование плотности вероятности при наблюдении и фильтрации прямоугольных координат методами Монте-Карло и линейаризации; МО – математическое ожидание

к тому, что элементы неглавной диагонали корреляционной матрицы считаются равными нулю [2–4]:

$$\mathbf{R}_{Lr\beta} = \begin{vmatrix} \sigma_r^2 \cos^2 \bar{\beta} + r^2 \sigma_\beta^2 \sin^2 \bar{\beta} & 0 \\ 0 & \sigma_r^2 \sin^2 \bar{\beta} + r^2 \sigma_\beta^2 \cos^2 \bar{\beta} \end{vmatrix}.$$

Выражения для определения показателей качества. Абсолютная ошибка пересчета математического ожидания:

$$\Sigma = \sqrt{(r_M \cos \beta_M - x_0)^2 + (r_M \sin \beta_M - z_0)^2};$$

Ошибки пересчета математического ожидания по x Δx и по z Δz методом линеаризации:

$$\Delta x = |x_M - x_0|, \quad \Delta z = |z_M - z_0|,$$

где x_M, z_M – координаты математического ожидания, полученного методом Монте-Карло, в прямоугольной системе координат.

Ошибки пересчета элементов корреляционной матрицы экстраполяции методом линеаризации:

$$\Delta R_x = |R_{xM} - R_{xL}|, \quad \Delta R_z = |R_{zM} - R_{zL}|, \quad \Delta R_{xz} = |R_{xzM} - R_{xzL}|,$$

где R_{xM}, R_{zM}, R_{zM} – элементы корреляционной матрицы, полученной методом Монте-Карло, в полярной системе координат по радиальной дальности, азимуту и взаимной корреляции радиальной дальности и азимута; R_{xL}, R_{zL}, R_{xzL} – элементы корреляционной матрицы, полученной методом линеаризации, в полярной системе координат по радиальной дальности, азимуту и взаимной корреляции радиальной дальности и азимута.

Состоятельность преобразования [1]:

$$\eta = \text{tr} \left((\mathbf{m}_{0xz} - \mathbf{m}_{Mxz}) (\mathbf{m}_{0xz} - \mathbf{m}_{Mxz})^T + \mathbf{R}_{0xz} \right) \mathbf{R}_{Mxz}^{-1},$$

где \mathbf{m}_{0xz} – математическое ожидание в прямоугольной системе координат, полученное методом линеаризации; \mathbf{m}_{Mxz} – математическое ожидание в прямоугольной системе координат, полученное методом Монте-Карло; \mathbf{R}_{0xz} – корреляционная матрица, полученная методом линеаризации; \mathbf{R}_{Mxz} – корреляционная матрица, полученная методом Монте-Карло.

Условия проведения модельных экспериментов для оценки точности аппроксимации гауссовой плотности вероятности представлены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1. Условия проведения модельных экспериментов

Эксперимент	r_H	β_H	σ_r	σ_β
Влияние изменения азимута	100, 10 км	0–360°	100 м	120', 60', 15'
Влияние изменения радиальной дальности	10–200 км	90°	100 м	120'
Влияние СКО ошибки измерения азимута	100 км	90°	100 м, 500 м	10–180'

Результаты проведенных исследований позволили сделать следующие выводы о влиянии условий наблюдения на данные аппроксимации гауссовой плотности вероятности при переходе из полярной в прямоугольную систему координат. Более сильное влияние на изменение ошибок аппроксимации и состоятельность оценки оказывают: СКО ошибки измерения азимута; радиальная дальность до летательного аппарата, азимут летательного аппарата. СКО ошибки измерения радиальной дальности оказывает незначительное влияние на ошибки аппроксимации методом линеаризации. Учет взаимной корреляции прямоугольных координат влияет только на ошибку аппроксимации элемента корреляционной матрицы ошибок по xz .

Влияние ошибок аппроксимации плотности вероятности наблюдения на качество фильтрации для различных условий наблюдения. Методика исследования влияния условий наблюдения на показатели качества фильтрации модификаций дискретного фильтра Калмана

включала в себя следующие этапы: определение показателей качества; разработка комплекса математического моделирования для анализа выбранных показателей качества; определение условий моделирования; математическое моделирование и сопоставительный анализ.

Устройство сопоставительного моделирования и условия моделирования. Выбор показателей качества. Показателем качества фильтрации модификаций дискретного фильтра Калмана было выбрано СКО суммарной ошибки измерения местоположения $\Delta_{\Sigma}(k)$ [1, 4, 10]. Значение $\Delta_{\Sigma}(k)$ нормировалось к СКО текущих оценок. В ходе моделирования каждого модельного эксперимента результаты усреднялись по 5000 опытных реализаций.

Для сопоставительного моделирования качества фильтрации модификаций фильтра Калмана использовался комплекс математического моделирования [4, 10]. Скорость летательного аппарата являлась постоянной и равнялась 1000 км/ч. Условия проведения модельных экспериментов по сопоставлению показателей качества различных фильтров Калмана представлены в табл. 2.

Таблица 2. Условия проведения модельных экспериментов по сопоставлению результатов работы модификаций фильтра Калмана

Эксперимент	r_H	β_H	σ_r	σ_{β}	α
Влияние изменения курса летательного аппарата	100 км	90°	100 м	25', 70'	0–360°
Влияние изменения СКО ошибок измерения азимута	100 км	90°	100 м	10–180'	45°
Влияние изменения начальной радиальной дальности до летательного аппарата	10–200 км	90°	100 м	25', 40', 70'	45°

Траектории при проведении модельных экспериментов изображены на рис. 3, а, б, в. При исследовании влияния изменения курса летательного аппарата, СКО ошибок измерения азимута траектории выбирались таким образом, чтобы на 40-м шаге обновления данных летательный аппарат пролетал на дальности 100 км от РЛС с азимутом 90° – такой выбор гарантирует завершение всех переходных процессов, происходящих в модификациях фильтра Калмана.

Результаты сопоставления модификаций фильтров Калмана для различных условий наблюдения. Влияние изменения курса летательного аппарата. Траектории летательного аппарата изображены на рис. 2, а. Скорость летательного аппарата составляла 720 км/ч. На рис. 3, а, б представлены значения суммарной ошибки измерения местоположения для различных значений σ_{β} .

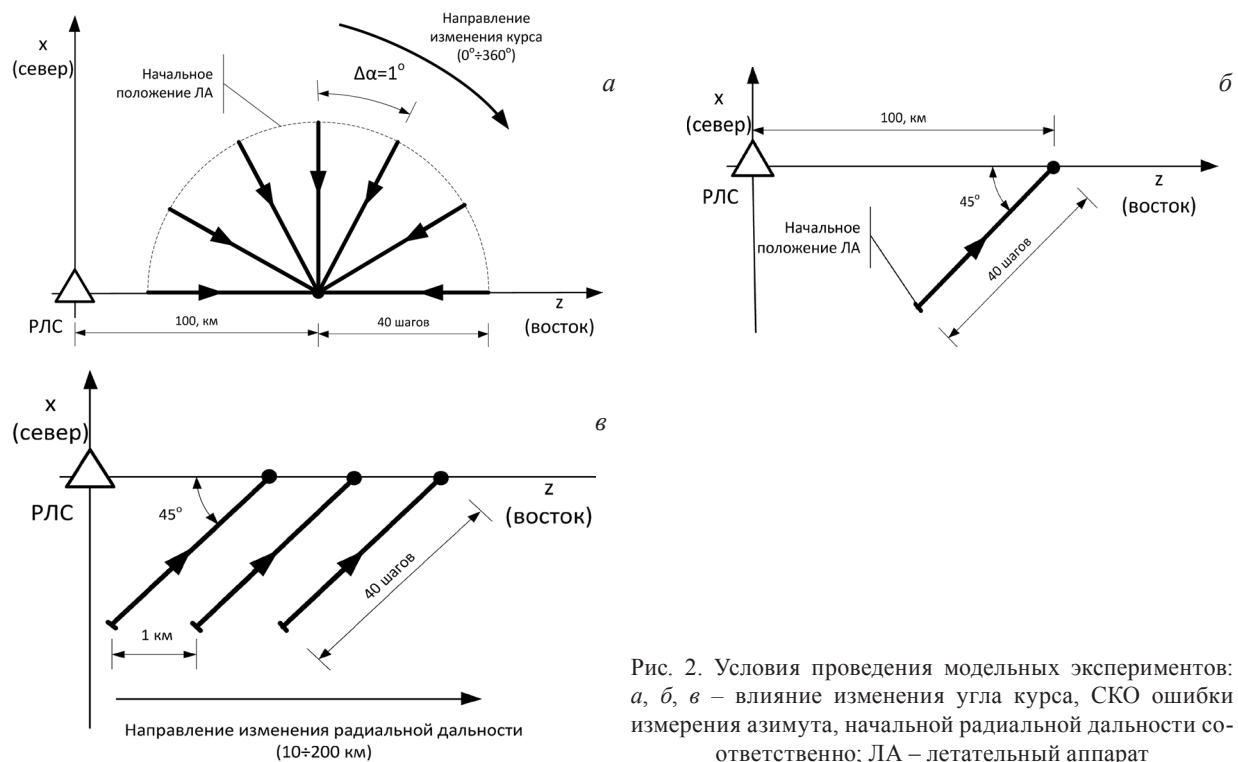


Рис. 2. Условия проведения модельных экспериментов: а, б, в – влияние изменения угла курса, СКО ошибки измерения азимута, начальной радиальной дальности соответственно; ЛА – летательный аппарат

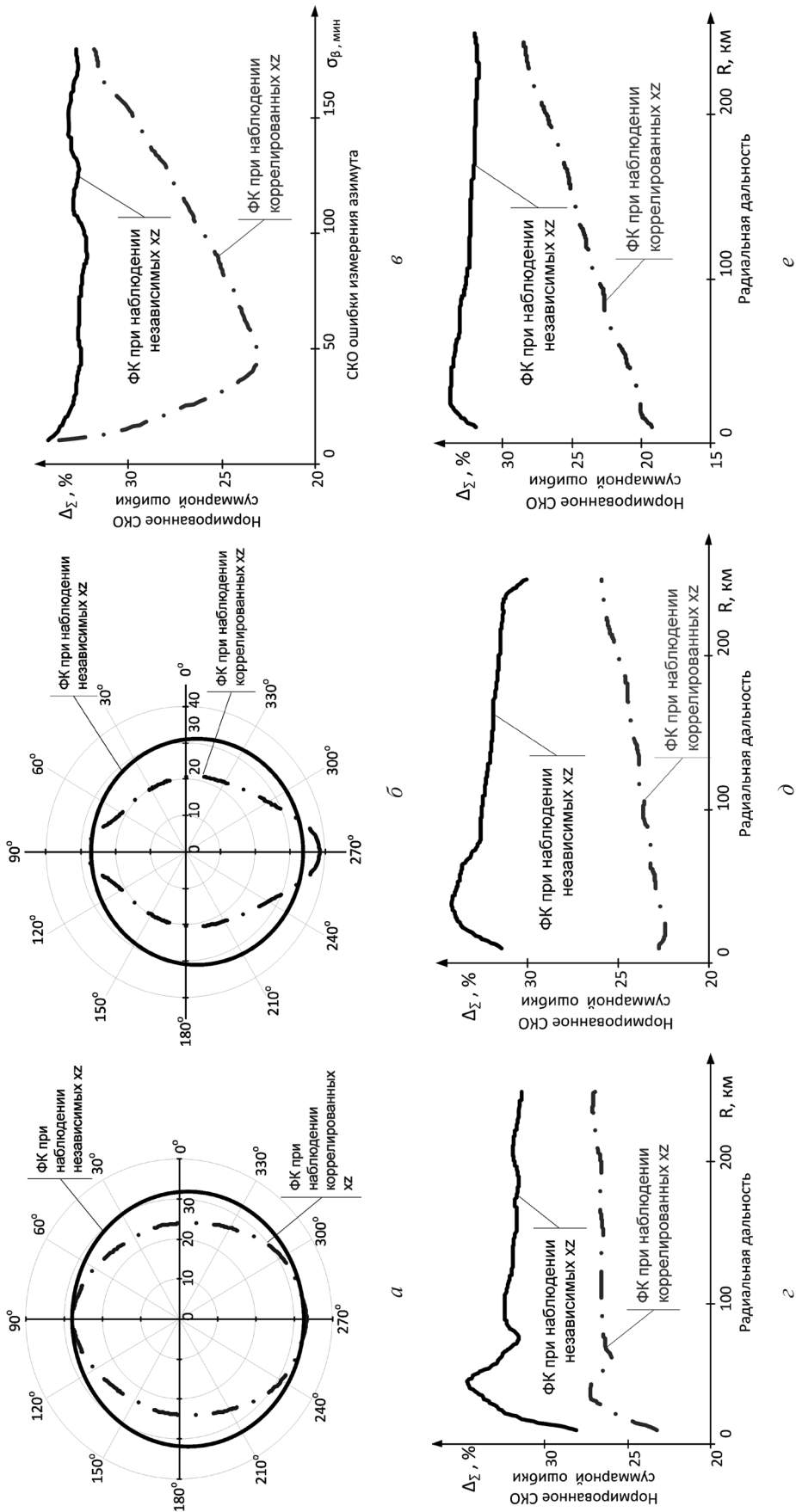


Рис. 3. Значение нормированной суммарной ошибки измерения местоположения при изменении угла курса (а, б, в), радиальной дальности (г, д, е): а – $\sigma\beta = 25'$, б – $\sigma\beta = 70'$, в – при изменении СКО ошибки измерения азимута, г – $\sigma\beta = 25'$, д – $\sigma\beta = 40'$, е – $\sigma\beta = 70'$; ФК – фильтр Калмана

Учет взаимной корреляции приводит к выигрышу до 12%, что подтверждает проведенные исследования в [4]. Для меньшего значения σ_β максимальная величина ошибки наблюдается для значений курса, равных 90 и 270°. Это поясняется максимальной величиной ошибки аппроксимации математического ожидания.

Влияние изменения СКО ошибок измерения азимута. Траектория для проведения данного модельного эксперимента изображена на рис. 2, б. Результаты моделирования представлены на рис. 3, в. Как и в предыдущем модельном эксперименте, условия проведения выбраны таким образом, чтобы летательный аппарат пролетал на 40-м шаге наблюдения радиальную дальность 100 км от РЛС и азимут 90°. Учет взаимной корреляции для таких условий наблюдения приводит к выигрышу до 15%.

Влияние изменения начальной радиальной дальности до летательного аппарата. Траектории для проведения данного модельного эксперимента изображены на рис. 2, в. Результаты представлены на рис. 3, г, д, е для различных значений $\sigma_\beta - 25', 40'$ и $70'$. Фильтр Калмана при наблюдении независимых прямоугольных координат проигрывает лучшим показателям до 15%.

Заключение. Для некоторых условий радиолокационных наблюдений метод линеаризации неприменим по причине возникновения значительных ошибок аппроксимации. Изменение ошибок аппроксимации напрямую влияет на результаты работы алгоритмов фильтрации. Наибольшее влияние на изменение ошибок аппроксимации и состоятельность оценки оказывают: СКО ошибки измерения азимута, радиальная дальность до летательного аппарата, азимут летательного аппарата. СКО ошибки измерения радиальной дальности несущественно влияет на ошибки аппроксимации методом линеаризации. Учет взаимной корреляции прямоугольных координат оказывает влияние только на ошибку аппроксимации элемента корреляционной матрицы ошибок по xz и приводит к выигрышу по точности до 15%.

Литература

1. Бар-Шалом Я., Ли Х.-Р. Траекторная обработка. Принципы, способы и алгоритмы. М., 2011.
2. Кузьмин С. З. Цифровая радиолокация. Введение в теорию. Киев, 2000.
3. Фарина А., Студер Ф. Цифровая обработка радиолокационной информации. Сопровождение целей. М., 1993.
4. Хмарский П. А., Солонар А. С. // Докл. БГУИР. 2012. № 7. С 47–53.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., 1984.
6. Худсон Д. Статистика для физиков. Лекции по теории вероятности и элементарной статистики. М., 1970.
7. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М, 1982.
8. Ширман Я. Д. Радиоэлектронные системы: Основы построения и теория. Справочник. Изд. 2-е перераб. и доп. / Под ред. Я. Д. Ширмана М., 2007.
9. Просов А. В. // Системы обработки информации. Харьков, 2008. № 2 (69). С. 95–97.
10. Хмарский П. А., Солонар А. С. // Докл. БГУИР. 2013. № 2. С 79–86.
11. Охрименко А. Е. Основы обработки и передачи информации. Мн., 1990.

P. A. KHMARSKI, A. S. SOLONAR

CONDITIONS OF OBSERVATION EFFECT FOR CONVERTED MEASUREMENT KALMAN FILTER GOODNESS-OF-FIT

Summary

Singularities of linearization technique are considered. Accuracy of approximation Gaussian probability density at conversion of measurements from polar coordinates to Cartesian for various conditions of observation is estimated using Monte-Carlo method. Conditions of observation research for converted measurement Kalman filter goodness-of-fit are presented.