ISSN 1561-8358 (Print)
ISSN 2524-244X (Online)

***ЭНЕРГЕТИКА, ТЕПЛО- И МАССООБМЕН***

***POWER ENGINEERING, HEAT AND MASS TRANSFER***

УДК 536.2(075)46
https://doi.org/10.29235/1561-8358-2018-63-2-201-213

Поступила в редакцию 20.10.2017
Received 20.10.2017

**В. А. Кот**

*Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*

# ИНТЕГРАЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ВТОРОГО РОДА. 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

**Аннотация.** На основе систем тождественных равенств, и интегральных граничных характеристик представлен новый алгоритм решения краевой задачи нестационарной теплопроводности для тел канонической формы с граничным условием второго рода. Схема отыскания приближенных аналитических решений краевых задач нестационарной теплопроводности с граничным условием второго рода предусматривает введение в рассмотрение фронта температурного возмущения и разделения всего процесса нагрева на две стадии. Для первой стадии процесса на основе предварительного дифференцирования уравнения теплопроводности по пространственной координате и последующего применения симметричных интегральных и дифференциальных операторов построены соответственно две последовательности интегральных и дифференциальных тождественных равенств. Каждая из них содержит интегральные либо дифференциальные граничные характеристики для заданного граничного условия второго рода. Для второй стадии путем введения граничной функции, предварительного дифференцирования уравнения теплопроводности по пространственной координате и последующего применения симметричных интегральных операторов построена последовательность интегральных тождественных равенств, содержащих интегральные граничные характеристики для граничного условия второго рода и граничной функции. На основе полученных интегральных и дифференциальных тождественных равенств построены замкнутые системы уравнения, позволяющие находить полиномиальные коэффициенты температурного профиля для первой и второй стадий процесса. Приведена общая схема нахождения приближенных значений собственных чисел краевых задач с граничными условиями второго рода на основе составления обыкновенного дифференциального уравнения с переводом его в характеристическое уравнение. Для каждого из двух этапов предложены специальные интегральные операторы, которые сводят краевую задачу к обыкновенному дифференциальному уравнению.

**Ключевые слова:** уравнение теплопроводности, интегральный метод теплового баланса, фронт температурного возмущения

**Для цитирования.** Кот, В. А. Интегральный метод решения задач теплопроводности с граничным условием второго рода. 1. Основные положения / В. А. Кот // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – Т. 63, № 2. – С. 201–213. https://doi.org/10.29235/1561-8358-2018-63-2-201-213

**V. A. Kot**

*A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

# INTEGRAL METHOD OF SOLVING HEAT-CONDUCTION PROBLEMS WITH THE SECOND-KIND BOUNDARY CONDITION. 1. BASIC STATEMENTS

**Abstract.** On the basis of systems of identical equalities and integral boundary characteristics, a new algorithm of solving a boundary-value problem on the nonstationary heat conduction in a canonical body with boundary condition of the second kind has been developed. The scheme proposed for finding approximate analytical solutions of boundary-value problems on nonstationary heat conduction with boundary conditions of the second kind involves the introduction into consideration of a temperature-disturbance front and separation of the whole heating process into two stages. For the first stage of this process, on the basis of the differentiation of the heat-conduction equation over a space variable and the application of symmetric integral and differential operators to the expressions obtained, two sequences of integral and differential identical equalities have been constructed. Each of these sequences includes integral or differential limiting characteristics for a definite boundary condition of the second kind. For the second stage, by way of introduction of a boundary function, differentiation of the heat-conduction equation with respect to a spatial coordinate, and application of integral operators to the expression obtained, a sequence of integral identical equalities involving integral boundary characteristics for the second-kind boundary condition has been constructed. On the basis of the integral and differential identical equalities obtained, closed systems of equations, allowing one to find polynomial coefficients of the temperature profile for the first and second stages of the heating process, have been constructed. A general scheme of determining approximate eigenvalues of boundary-value problems with boundary conditions of the second kind on the basis of construction of an ordinary differential equation and transformation of it into the characteristic equation is proposed. For each of the two stages of the heating process, special integral operators, reducing the boundary-value heat-conduction problem to the ordinary differential equation, are proposed.

**Keywords:** heat-conduction equation, integral method of heat balance, temperature disturbance front

**For citation.** Kot V. A. Integral method of solving heat-conduction problems with the second-kind boundary condition. 1. Basic statements. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnych navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2018, vol. 63, no. 2, pp. 201–213 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8358-2018-63-2-201-213

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу нестационарной теплопроводности в следующей математической формулировке:

$$\frac{1}{\kappa}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{t}}=\frac{1}{\overline{y}^m}\left(\overline{y}^m\frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{y}}\right),\ \overline{t}>0,\ 0<\overline{y}<R, \tag{1}$$

$$\overline{T}(\overline{y},0)=T_0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \overline{T}(0,\overline{t})}{\partial \overline{y}}=0,\ \lambda\frac{\partial \overline{T}(R,\overline{t})}{\partial \overline{y}}=\overline{q}(\overline{t}), \tag{3}$$

где $\overline{T}$ – температура, $T_0$ – начальная температура, $\overline{t}$ – время, $\kappa$ – коэффициент температуропроводности, $\lambda$ – коэффициент теплопроводности, $R$ – половина толщины (радиус) канонического тела, $\overline{y}$ – координата, $\overline{q}(\overline{t})$ – плотность теплового потока, $m = 0, 1, 2$ соответственно для декартовой, цилиндрической и сферической систем координат. Придадим задаче (1)–(3) безразмерный вид, введя обозначения:

$$T=\frac{\overline{T}-T_0}{\Delta T},\quad \Delta T=T_{\text{ref}}-T_0,\quad t=\frac{\overline{t}}{t^*},\quad t^*=\frac{R^2}{\kappa},\quad y=\frac{\overline{y}}{R},\quad q(t)=\frac{R}{\lambda}\overline{q}(t),$$

где $T_{\text{ref}}$ – референтная температура, $\Delta T$ – температурный масштаб, $t^*$ – временной масштаб. Тогда вместо (1)–(3) придем к задаче:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{y^m}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^m\frac{\partial T}{\partial y}\right),\ t>0,\ 0<y<1, \tag{4}$$

$$T(y,0)=0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial y}=0,\ \frac{\partial T(1,t)}{\partial y}=q(t). \tag{6}$$

В соответствии с концепцией интегральных методов, основанных на рассмотрении фронта температурного возмущения, разделим процесс на две стадии. При этом будем предполагать, что на первой стадии происходит постепенное продвижение фронта температурного возмущения $\delta(t)$ вглубь тела до момента достижения фронтом центра симметрии. В этом случае область, находящаяся за пределами фронта возмущения ($0 \le y \le 1 - \delta(t)$), будет сохранять начальную температуру. Начиная со второй стадии, происходит прогрев тела по всему сечению.

Переходя к координате $\xi = 1 - y$, отсчитываемой от поверхности тела, запишем задачу (4)–(6) для первой стадии процесса:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{(1-\xi)^m}\frac{\partial}{\partial \xi}\left((1-\xi)^m\frac{\partial T}{\partial \xi}\right),\ 0<t\le t_1,\ \xi\in\left[0,\delta(t)\right], \tag{7}$$

$$T(\xi,0)=0,\ \delta(0)=0, \tag{8}$$

$$-\frac{\partial T(0,t)}{\partial \xi}=q(t),\ 0\le t\le t_1, \tag{9}$$

$$\text{(i)}:\quad T(\delta,t)=0,\ \text{(ii)}:\ \frac{\partial T(\delta,t)}{\partial y}=0. \tag{10}$$

Здесь $t_1$ соответствует условию $\delta(t_1)=1$. Для второй стадии математическая формулировка задачи имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{(1-\xi)^m}\frac{\partial}{\partial \xi}\left((1-\xi)^m\frac{\partial T}{\partial \xi}\right),\ t_1\le t<\infty,\ \xi\in[0,1], \tag{11}$$

$$T(\xi,t_1)=T(\xi,t_1), \tag{12}$$

$$-\frac{\partial T(0,t)}{\partial \xi}=q(t),\ t_1\le t<\infty, \tag{13}$$

$$\frac{\partial T(1,t)}{\partial \xi}=0,\ t_1\le t<\infty. \tag{14}$$

**Интегральные тождественные равенства.** В [14, 15] доказано существование последовательности тождественных равенств в краевой задаче нестационарной теплопроводности с граничным условием первого рода. Следуя [15], введем в рассмотрение интегральные операторы следующего вида:

$$\mathcal{L}_\xi\equiv\int_\delta^\xi d\xi\,(1-\xi)^m\int_\delta^\xi\frac{1}{(1-\xi)^m}(\cdot)\,d\xi,\ \mathcal{L}_1\equiv\int_\delta^0 d\xi\,(1-\xi)^m\int_\delta^\xi\frac{1}{(1-\xi)^m}(\cdot)\,d\xi. \tag{15}$$

Данные операторы образуют две последовательности:

$$\mathcal{L}_n^\xi\equiv\overbrace{\mathcal{L}_\xi\ldots\mathcal{L}_\xi\,\mathcal{L}_\xi}^{n},\ \mathcal{L}_n\equiv\overbrace{\mathcal{L}_1\ldots\mathcal{L}_\xi\,\mathcal{L}_\xi}^{n},\ n=1,2,\ldots \tag{16}$$

Также введем в рассмотрение интегральные граничные характеристики:

$$Q_n\equiv\underbrace{\int_0^t\ldots\int_0^t}_{n}q(t)\,dt^{(n)}=\int_0^t\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}q(t)\,dt,\ \forall\,n\in\mathbb{Z}_+. \tag{17}$$

Далее последовательно рассмотрим первую и вторую стадии процесса, для которых получим соответствующие последовательности интегральных тождественных равенств.

*Первая стадия.* Умножим дифференциальное уравнение (7) на $(1-\xi)^m$ и проинтегрируем по области $\xi\in[0,\delta]$:

$$\begin{aligned}\int_0^\delta(1-\xi)^m\frac{\partial T}{\partial t}d\xi&=\frac{d}{dt}\int_0^\delta T(1-\xi)^m\,d\xi-T(\delta,t)(1-\delta)^m\frac{d\delta}{dt}=\int_0^\delta\frac{\partial}{\partial\xi}\left((1-\xi)^m\frac{\partial T}{\partial\xi}\right)d\xi=\\&=\left[(1-\xi)^m\frac{\partial T}{\partial\xi}\right]_0^\delta=(1-\delta)^m\frac{\partial T(\delta,t)}{\partial\xi}-\frac{\partial T(0,t)}{\partial\xi}.\end{aligned} \tag{18}$$

С учетом граничных условий (9) и (10) уравнение (18) примет вид интеграла теплового баланса [1]

$$\frac{d}{dt}\int_0^\delta T(1-\xi)^m\,d\xi=q(t). \tag{19}$$

Интегрирование (18) при условиях (8) и (9) даст интегральное соотношение

$$\hat{\mathcal{L}}_0 T \equiv Q_1, \tag{20}$$

которое назовем интегральным соотношением первого порядка. Здесь использован интегральный оператор $\hat{\mathcal{L}}_0 \equiv \int\limits_0^\delta (1-\xi)^m (\cdot)\, d\xi.$

Применим к уравнению (7) интегральный оператор $\hat{\mathcal{L}}_\xi \equiv \int\limits_\delta^\xi (1-\xi)^m (\cdot)\, d\xi.$ Обозначив $T_\xi \equiv \partial T / \partial \xi,$ $D_t \equiv \partial / \partial t,$ с учетом (10) получим уравнение

$$D_t \left( \hat{\mathcal{L}}_\xi T \right) = (1-\xi)^m T_\xi. \tag{21}$$

Использовав теорему Лейбница и граничные условия (10), представим уравнение (21) в измененном виде

$$\frac{1}{(1-\xi)^m} D_t (\hat{\mathcal{L}}_\xi T) \equiv D_t \left( \frac{1}{(1-\xi)^m} \hat{\mathcal{L}}_\xi T \right) = T_\xi. \tag{22}$$

Проинтегрируем (22) по области $\xi \in [\xi, \delta].$ С учетом граничного условия (10) имеем:

$$\int\limits_\delta^\xi D_t \left( \frac{1}{(1-\xi)^m} \hat{\mathcal{L}}_\xi T \right) d\xi = D_t \left[ \int\limits_\delta^\xi \left( \frac{1}{(1-\xi)^m} \hat{\mathcal{L}}_\xi T \right) d\xi \right] = \int\limits_\delta^\xi T_\xi \, d\xi = T|_\delta^\xi = T. \tag{23}$$

Теперь умножим (23) на $(1 - \xi)^m$ и проинтегрируем по области $\xi \in [\xi, \delta]$:

$$\int\limits_\delta^\xi d\xi (1-\xi)^m \frac{d}{dt} \left[ \int\limits_\delta^\xi \left( \frac{1}{(1-\xi)^m} \hat{\mathcal{L}}_\xi T \right) d\xi \right] \equiv \frac{d}{dt} \int\limits_\delta^\xi d\xi (1-\xi)^m \int\limits_\delta^\xi \left( \frac{1}{(1-\xi)^m} \hat{\mathcal{L}}_\xi T \right) d\xi = \int\limits_\delta^\xi T (1-\xi)^m d\xi. \tag{24}$$

В операторной форме уравнение (24) примет вид

$$D_t (\mathcal{L}_\xi (\hat{\mathcal{L}}_\xi T)) = \hat{\mathcal{L}}_\xi T. \tag{25}$$

При $\xi = 0$ уравнение (25) переходит в следующее:

$$D_t (\mathcal{L}_\xi (\hat{\mathcal{L}}_\xi T))\Big|_{\xi=0} = D_t (\mathcal{L}_1 (\hat{\mathcal{L}}_\xi T)) = (\hat{\mathcal{L}}_\xi T)\Big|_{\xi=0} = \hat{\mathcal{L}}_0 T, \tag{26}$$

или с учетом (20):

$$D_t (\mathcal{L}_1 (\hat{\mathcal{L}}_\xi T)) = Q_1. \tag{27}$$

Интегрирование (27) с начальным условием (8) даст тождественное равенство второго порядка

$$\mathcal{L}_1 (\hat{\mathcal{L}}_\xi T) \equiv Q_2. \tag{28}$$

Применим к уравнению (25) интегральный оператор $\mathcal{L}_1$. С учетом граничных условий (10) сразу запишем как

$$\mathcal{L}_1 (D_t (\mathcal{L}_\xi (\hat{\mathcal{L}}_\xi T))) \equiv D_t (\mathcal{L}_1 (\mathcal{L}_\xi (\hat{\mathcal{L}}_\xi T))) \equiv D_t (\mathcal{L}_2 (\hat{\mathcal{L}}_\xi T)) = \mathcal{L}_1 (\hat{\mathcal{L}}_\xi T). \tag{29}$$

Исключив в (29) правую часть с помощью (28), получим

$$D_t (\mathcal{L}_2 (\hat{\mathcal{L}}_\xi T)) = Q_2. \tag{30}$$

Интегрирование (30) даст тождественное равенство третьего порядка

$$\mathcal{L}_2 (\hat{\mathcal{L}}_\xi T) \equiv Q_3. \tag{31}$$

Аналогично могут быть получены тождества более высоких порядков. Основываясь на (20), (28) и (31) и задав $\mathcal{L}_0(\hat{\mathcal{L}}_\xi T) \equiv \hat{\mathcal{L}}_\xi T,$ окончательно придем к последовательности интегральных тождественных равенств:

$$\left\{\mathcal{L}_{n-1}(\hat{\mathcal{L}}_\xi T) \equiv Q_n\right\}_n, \ \forall n \in \mathbb{Z}_+, \ 0 < t \le t_1, \ \xi \in [0, \delta]. \tag{32}$$

*Вторая стадия.* Умножим уравнение (11) на $(1 - \xi)^m$ и проинтегрируем по области $\xi \in [0,1]$:

$$\int_0^1 (1-\xi)^m \frac{\partial T}{\partial t} d\xi = \frac{d}{dt}\int_0^1 T(1-\xi)^m \, d\xi = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \xi}\left((1-\xi)^m \frac{\partial T}{\partial \xi}\right) d\xi = -\frac{\partial T(0,t)}{\partial \xi} = q(t). \tag{33}$$

Проинтегрируем уравнение (33) в пределах $t \in [0, t]$:

$$\int_0^1 T(1-\xi)^m \, d\xi = \int_{t_1}^t q(t)dt + C, \tag{34}$$

где $C$ – постоянная интегрирования, определяемая из (34) как $C = \int_0^1 T(\xi, t_1)(1-\xi)^m \, d\xi$. Из тождественного равенства (19) для момента времени $t = t_1$ имеем:

$$\int_0^1 T(\xi, t_1)(1-\xi)^m \, d\xi = Q_1(t_1). \tag{35}$$

Отсюда приходим к соотношению

$$\int_0^1 T(1-\xi)^m \, d\xi = \int_{t_1}^t q(t)dt + \int_0^1 T(\xi, t_1)(1-\xi)^m \, d\xi = \int_{t_1}^t q(t)dt + \int_0^{t_1} q(t)dt = \int_0^t q(t)dt. \tag{36}$$

Введя в рассмотрение интегральный оператор $\hat{\mathcal{M}}_0 \equiv \int_0^1 (1-\xi)^m (\cdot) \, d\xi,$ из (36) получим

$$\hat{\mathcal{M}}_0 T \equiv Q_1, \ 0 \le \xi \le 1, \ t_1 \le t < \infty. \tag{37}$$

Теперь применим к уравнению (11) интегральный оператор $\hat{\mathcal{M}}_\xi \equiv \int_1^\xi (1-\xi)^m (\cdot) \, d\xi$:

$$\hat{\mathcal{M}}_\xi(D_t T) \equiv D_t(\hat{\mathcal{M}}_\xi T) = (1-\xi)^m T_\xi. \tag{38}$$

Запишем уравнение (38) в ином виде:

$$D_t\left(\frac{1}{(1-\xi)^m}\hat{\mathcal{M}}_\xi T\right) = T_\xi. \tag{39}$$

Проинтегрируем (39) по области $\xi \in [\xi, 1]$:

$$\int_1^\xi D_t\left(\frac{1}{(1-\xi)^m}\hat{\mathcal{M}}_\xi T\right) d\xi = D_t\left[\int_1^\xi \left(\frac{1}{(1-\xi)^m}\hat{\mathcal{M}}_\xi T\right) d\xi\right] = \int_1^\xi T_\xi \, d\xi = T\big|_1^\xi = T - T(1,t). \tag{40}$$

Далее умножим уравнение (40) на $(1–\xi)^m$ и проинтегрируем по области $\xi \in [0,1]$. С учетом полученного выше тождественного равенства (35) и введения в рассмотрение граничной функции $g(t) = T(1,t)$ придем к уравнению

$$\begin{gathered}\int_0^1 (1-\xi)^m D_t\left[\int_1^\xi \left(\frac{1}{(1-\xi)^m}\hat{\mathcal{M}}_\xi T\right) d\xi\right] d\xi \equiv D_t\left[\int_0^1 (1-\xi)^m \int_1^\xi \left(\frac{1}{(1-\xi)^m}\hat{\mathcal{M}}_\xi T\right) d\xi\right] = \\ = \int_0^1 (1-\xi)^m \, T \, d\xi - \int_0^1 (1-\xi)^m \, T(1,t) \, d\xi = Q_1 - T(1,t)\int_1^0 (1-\xi)^m d\xi = Q_1 - \frac{g(t)}{1+m}.\end{gathered} \tag{41}$$

Введем в рассмотрение интегральные операторы:

$$\mathcal{M}_{\xi} \equiv \int_1^{\xi} d\xi\,(1-\xi)^m \int_1^{\xi} \frac{1}{(1-\xi)^m} (\cdot)\, d\xi, \quad \mathcal{M}_1 \equiv \int_1^{0} d\xi\,(1-\xi)^m \int_1^{\xi} \frac{1}{(1-\xi)^m} (\cdot)\, d\xi, \tag{42}$$

образующие две последовательности:

$$\mathcal{M}_n^{\xi} \equiv \overbrace{\mathcal{M}_{\xi} \ldots \mathcal{M}_{\xi}\, \mathcal{M}_{\xi}}^{n}, \ \mathcal{M}_n \equiv \overbrace{\mathcal{M}_1 \ldots \mathcal{M}_{\xi}\, \mathcal{M}_{\xi}}^{n}, \ \forall n \in \mathbb{Z}_+. \tag{43}$$

В этом случае уравнение (41) предстанет в новой операторной форме:

$$\mathcal{M}_1(D_t(\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T)) \equiv D_t(\mathcal{M}(\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T)) = Q_1 - g(t)/(1+m). \tag{44}$$

Интегрирование (42) с учетом условия $g(t_1) = 0$, а также очевидного тождества $\mathcal{M}_1(\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T(\xi,t_1))) \equiv \mathcal{L}_1(\hat{\mathcal{L}}_{\xi}T(\xi,t_1)))$ дает уравнение

$$\begin{gathered} \mathcal{M}_1(\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T)) = \int_{t_1}^{t} Q_1\, dt - \int_{t_1}^{t} \frac{g(t)}{m+1} dt + \mathcal{M}_1(\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T(\xi,t_1))) = \\ \int_{t_1}^{t} Q_1\, dt - \int_{t_1}^{t} \frac{g(t)}{m+1} dt + \mathcal{L}(\hat{\mathcal{L}}_{\xi}T(\xi,t_1))) = \int_{t_1}^{t} Q_1\, dt + \int_{0}^{t_1} Q_1\, dt - \int_{t_1}^{t} \frac{g(t)}{m+1} dt = Q_2 - \int_{t_1}^{t} \frac{g(t)}{m+1} dt. \end{gathered} \tag{45}$$

Введя в рассмотрение, согласно [16], последовательность интегральных функций

$$G_n \equiv \underbrace{\int_0^t \ldots \int_0^t}_{n} g(t)\, dt^{(n)} = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} g(t)\, dt, \ \forall\, n \in \mathbb{Z}_+, \tag{46}$$

вместо (45) запишем первое тождественное равенство

$$\mathcal{M}_1(\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T)) \equiv Q_2 - \frac{G_1}{m+1}. \tag{47}$$

Далее умножим левую и правую части уравнения (40) на $(1 - \xi)^m$ и проинтегрируем по области $\xi \in [\xi,1]$:

$$\begin{gathered} \int_1^{\xi} (1-\xi)^m D_t \left[ \int_1^{\xi} \left( \frac{1}{(1-\xi)^m} \hat{\mathcal{M}}_{\xi} T \right) d\xi \right] d\xi \equiv D_t \left[ \int_1^{\xi} (1-\xi)^m \int_1^{\xi} \left( \frac{1}{(1-\xi)^m} \hat{\mathcal{M}}_{\xi} T \right) d\xi \right] = \\ = \int_1^{\xi} (1-\xi)^m\, T\, d\xi - \int_1^{\xi} (1-\xi)^m\, T(1,t)\, d\xi = \int_1^{\xi} (1-\xi)^m\, T\, d\xi + T(1,t)\, \frac{(1-\xi)^{1+m}}{m+1}, \end{gathered} \tag{48}$$

или в операторной форме

$$D_t(\mathcal{M}_1^{\xi}(\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T)) = \hat{\mathcal{M}}_{\xi}T + (1-\xi)^{m+1} g(t). \tag{49}$$

Применив к уравнению (49) интегральный оператор $\mathcal{M}_{\xi}$, получим:

$$\begin{gathered} \mathcal{M}_{\xi} \left\{ D_t(\mathcal{M}_1^{\xi}(\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T)) \right\} \equiv D_t(\mathcal{M}_{\xi}\mathcal{M}_{\xi}(\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T)) \equiv D_t(\mathcal{M}_2^{\xi}(\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T)) = \\ = \mathcal{M}_{\xi}\{\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T\} + \mathcal{M}_{\xi} \left\{ \frac{(1-\xi)^{m+1}}{m+1} g(t) \right\} = \mathcal{M}_{\xi}\{\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T\} + \frac{g(t)}{m+1} \int_1^{\xi} d\xi\,(1-\xi)^m \int_1^{\xi} \frac{(1-\xi)^{m+1}}{(1-\xi)^m} d\xi = \\ = \mathcal{M}_{\xi}\{\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T\} + \frac{g(t)}{m+1} \int_1^{\xi} d\xi\,(1-\xi)^m \int_1^{\xi} \frac{(1-\xi)^{m+1}}{(1-\xi)^m} d\xi = \\ = \mathcal{M}_{\xi}\{\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T\} + \frac{g(t)}{m+1} \int_1^{\xi} d\xi\,(1-\xi)^m \int_1^{\xi} (1-\xi)\, d\xi = \mathcal{M}_{\xi}\{\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T\} + \frac{g(t)}{(m+1)(2m+6)} (1-x)^{m+3}. \end{gathered}$$

Отсюда следует

$$D_t(\mathcal{M}_2^{\xi}(\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T)) = \mathcal{M}_{\xi}\{\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T\} + \frac{g(t)}{(m+1)(2m+6)}(1-x)^{3+m}. \tag{50}$$

Запишем уравнение (50) для точки $\xi = 0$:

$$D_t(\mathcal{M}_2^{\xi}(\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T))\Big|_{\xi=0} = \mathcal{M}_{\xi}\{\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T\}\Big|_{\xi=0} + \frac{g(t)}{(m+1)(2m+6)} = \mathcal{M}_1(\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T) + \frac{g(t)}{(m+1)(2m+6)},$$

или с учетом тождественного равенства (47):

$$D_t(\mathcal{M}_2(\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T)) = Q_2 - \int_{t_1}^{t}\frac{g(t)}{m+1}dt + \frac{g(t)}{(m+1)(2m+6)}. \tag{51}$$

Интегрирование (51) с учетом начальных условий (8), (10) и введенных обозначений (42) и (43) даст

$$\mathcal{M}_2(\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T) = \int_{t_1}^{t} Q_2\,dt - \frac{G_2}{m+1} + \frac{G_1}{(m+1)(2m+6)} + C. \tag{52}$$

Определим из (52) постоянную интегрирования: $C = \mathcal{M}_2(\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T)\Big|_{t=t_1}$. Используя очевидные тождества $\mathcal{M}_2(\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T)\Big|_{t=t_1} \equiv \mathcal{L}_2(\hat{\mathcal{L}}_{\xi}T)\Big|_{t=t_1}$ и (31), для постоянной $C$ запишем: $C = \mathcal{L}_2(\hat{\mathcal{L}}_{\xi}T)\Big|_{t=t_1} = Q_3\big|_{t=t_1}$. Отсюда вместо (52) придем к тождественному равенству

$$\begin{gathered}\mathcal{M}_2(\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T) = \int_{t_1}^{t} Q_2\,dt - \frac{G_2}{m+1} + \frac{G_1}{(m+1)(2m+6)} + Q_3\big|_{t=t_1} = \\ = \int_{0}^{t} Q_2\,dt - \int_{0}^{t_1} Q_2\,dt - \frac{G_2}{m+1} + \frac{G_1}{(m+1)(2m+6)} + \int_{0}^{t_1} Q_2\,dt = Q_3 - \frac{G_2}{m+1} + \frac{G_1}{(m+1)(2m+6)}.\end{gathered} \tag{53}$$

Получим следующее по порядку тождественное равенство, воспользовавшись уравнением (51). Применим к данному уравнению интегральный оператор $\mathcal{M}_1$:

$$\begin{gathered}\mathcal{M}_{\xi}\left\{D_t(\mathcal{M}_2^{\xi}(\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T))\right\} \equiv D_t(\mathcal{M}_{\xi}\mathcal{M}_2^{\xi}(\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T)) = \mathcal{M}_{\xi}\left\{\mathcal{M}_{\xi}(\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T)\right\} + \\ + \mathcal{M}_{\xi}\left\{\frac{g(t)}{(m+1)(2m+6)}(1-x)^{3+m}\right\} = \mathcal{M}_2^{\xi}(\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T) + \frac{g(t)}{(m+1)(2m+6)}\mathcal{M}_{\xi}\left\{(1-x)^{3+m}\right\}.\end{gathered} \tag{54}$$

Проинтегрировав (54) с учетом (51) и (53), получим уравнение

$$D_t(\mathcal{M}_3^{\xi}(\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T)) = \mathcal{M}_2^{\xi}(\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T) + \frac{g(t)}{(m+1)(2m+6)(4m+20)}(1-\xi)^{m+5}. \tag{55}$$

Применив уравнение (55) в точке $\xi = 0$, придем к уравнению

$$D_t(\mathcal{M}_3(\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T)) = \mathcal{M}_2(\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T) + \frac{g(t)}{(m+1)(2m+6)(4m+20)},$$

или с учетом (53)

$$D_t(\mathcal{M}_3(\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T)) = Q_3 - \frac{G_2}{m+1} + \frac{G_1}{(m+1)(2m+6)} + \frac{g(t)}{(m+1)(2m+6)(4m+20)}. \tag{56}$$

Интегрирование (56) даст тождественное равенство

$$\mathcal{M}_3(\hat{\mathcal{M}}_{\xi}T) = Q_4 - \frac{G_3}{m+1} + \frac{G_2}{(m+1)(2m+6)} + \frac{G_1}{(m+1)(2m+6)(4m+20)}. \tag{57}$$

Аналогично могут быть получены тождества более высокого порядка. Например, для тождественного равенства четвертого порядка имеем

$$\mathcal{M}_4(\hat{\mathcal{M}}_\xi T) = Q_5 + \frac{G_4}{m+1} + \frac{G_3}{(m+1)(2m+6)} + \frac{G_2}{(m+1)(2m+6)(4m+20)} + \\ + \frac{G_1}{(m+1)(2m+6)(4m+20)(6m+42)}. \tag{58}$$

Основываясь на (37), (47), (53), (57) и (58) и положив $G_0 = 0$, получим окончательно

$$\left\{\mathcal{M}_{n-1}(\hat{\mathcal{M}}_\xi T) = Q_n + \sum_{i=0}^{n-1} p_i\, G_i\right\}_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}_+. \tag{59}$$

**Дифференциальные тождественные равенства.** Следуя [14, 17], рассмотрим область $(y,t) \in \Omega_T = (0,1)\times(0,\infty)$, описываемую дифференциальным уравнением (7) при граничных условиях (13) и (14). Продифференцируем (7) по $\xi$:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{(1-\xi)^m}\frac{\partial}{\partial \xi}\left((1-\xi)^m \frac{\partial T}{\partial \xi}\right)\right). \tag{60}$$

Введя в рассмотрение дифференциальный оператор

$$L_\xi \equiv \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{(1-\xi)^m}\frac{\partial}{\partial \xi}\big((1-\xi)^m(\cdot)\big)\right), \tag{61}$$

запишем уравнение (60) в операторной форме:

$$D_t\, T_\xi = L_\xi\, T_\xi. \tag{62}$$

Применим оператор (61) к уравнению (62). С учетом правила перестановки производных и теоремы Лейбница получаем уравнение

$$L_\xi(D_t\, T_\xi) \equiv D_t(L_\xi\, T_\xi) = L_\xi(L_\xi\, T_\xi) = L_\xi L_\xi\, T_\xi = L_\xi^2\, T_\xi, \tag{63}$$

где $L_\xi^2$ – дифференциальный оператор второго порядка:

$$L_\xi^2 \equiv \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{(1-\xi)^m}\frac{\partial}{\partial \xi}\left((1-\xi)^m \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{(1-\xi)^m}\frac{\partial}{\partial \xi}\big((1-\xi)^m(\cdot)\big)\right)\right)\right). \tag{64}$$

Произведя в соответствии с (62) замену $L_\xi\, T_\xi \to D_t\, T_\xi$ в левой части уравнения (63), получим уравнение

$$D_t^2\, T_\xi = L_\xi^2\, T_\xi, \tag{65}$$

где $D_t^2 \equiv \partial^2 / \partial t^2$.

Теперь применим оператор (61) к уравнению (65). Опустив выкладки, запишем:

$$L_\xi(D_t^2\, T_\xi) \equiv D_t^2\,(L_\xi T_\xi) = L_\xi(L_\xi^2\, T_\xi) = L_\xi^3\, T_\xi. \tag{66}$$

Произведя в (66), как в (64), подстановку $L_\xi\, T_\xi \to D_t\, T_\xi$, придем к уравнению

$$D_t^3\, T_\xi = L_\xi^3\, T_\xi, \tag{67}$$

где $D_t^3 \equiv \partial^3 / \partial t^3$, и дифференциальный оператор $L_\xi^3$ имеет вид

$$L_\xi^3 \equiv \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{(1-\xi)^m}\frac{\partial}{\partial \xi}\left((1-\xi)^m \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{(1-\xi)^m}\frac{\partial}{\partial \xi}\left((1-\xi)^m \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{(1-\xi)^m}\frac{\partial}{\partial \xi}\big((1-\xi)^m(\cdot)\big)\right)\right)\right)\right)\right). \tag{68}$$

Отсюда, основываясь на уравнениях (62), (65) и (67), придем к последовательности

$$\left\{ D_t^n T_\xi = L_\xi^n T_\xi \right\}_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+, \tag{69}$$

где $D_t^n \equiv \partial^n / \partial t^n$, $L_\xi^n \equiv \overbrace{L_\xi L_\xi ... L_\xi}^{n}$ – дифференциальные операторы $n$-го порядка.

Применим уравнения, входящие в последовательность (69) в точке $\xi = 0$. Поскольку решение краевой задачи ищется в виде степенных, многократно дифференцируемых рядов, принадлежащих классу аналитических функций, подобное действие представляется правомочным. Отсюда можно записать:

$$\left\{ D_t^n T_\xi \big|_{\xi=0} = L_\xi^n T_\xi \big|_{\xi=0} \right\}_n, \ \forall n \in \mathbb{Z}_+. \tag{70}$$

Учитывая граничное условие (14), для левой части уравнений в (70) имеем

$$D_t^n T_\xi \big|_{\xi=0} = D_t^n \left( T_\xi \big|_{\xi=0} \right) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \bigg|_{\xi=0} \right) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left( -q(t) \right) = -D_t^n q. \tag{71}$$

Учитывая (69), вместо (68) придем окончательно к последовательности

$$\left\{ L_\xi^n T_\xi \big|_{\xi=0} \equiv -D_t^n q \right\}_n, \ \forall n \in \mathbb{Z}_+. \tag{72}$$

**Схема построения полиномиальных решений.** Изложим схему построения решений краевых задач нестационарной теплопроводности на основе последовательностей (59) и (72). Будем исходить из двухстадийности процесса.

*Первая стадия.* Опишем температурный профиль полиномом степени $N$ в виде

$$T = \left( 1 - \frac{\xi}{\delta} \right)^2 \sum_{j=0}^{N-2} a_j(t) \left( \frac{\xi}{\delta} \right)^j, \tag{73}$$

в котором учитываются оба граничных условия (10). Для определения коэффициента $a_0$ воспользуемся граничным условием (9), откуда находим

$$a_0 = \frac{1}{2} \left( \delta q(t) + a_1 \right). \tag{74}$$

Определение коэффициентов $a_j$ $(j = \overline{1, N-2})$ свяжем с тождественными равенствами последовательностей (59) и (72):

$$\left\{ \mathcal{L}_{n-1}(\hat{\mathcal{L}}_\xi T) = Q_n \right\}_n \cup \left\{ L_\xi^k T_\xi \big|_{\xi=0} \equiv -D_t^k q \right\}_k, \ \forall n \in \mathbb{Z}_\geq, \ k \in \mathbb{Z}_+. \tag{75}$$

Для получения замкнутой системы $N - 2$ уравнений из (75) приходим к двойному множеству следующего вида:

$$\left\{ \mathcal{L}_{n-1}(\hat{\mathcal{L}}_\xi T) = Q_n \right\}_{n=1}^{N-K-3} \cup \left\{ L_\xi^k T_\xi \big|_{\xi=0} \equiv -D_t^k q \right\}_{k=0}^{K}, \ k \in \overline{0, K}, \ K \in \mathbb{Z}_\geq. \tag{76}$$

Решение задачи в первом приближении свяжем с заданием $K = 0$. В таком случае все последующие приближения (второе, третье и т. д.) будут соответствовать значениям $K = 1, 2, 3,\ldots$. Остается задать число интегральных тождественных равенств, отвечающих каждому приближению. Пусть для первого приближения ($K = 0$) мы имеем $N_0$ интегральных тождественных равенств последовательности (32). Это позволяет записать:

$$\begin{gathered}K=0\to\left\{\mathcal{L}_{n-1}(\hat{\mathcal{L}}_\xi T)\equiv Q_n\right\}_{n=1}^{N_0}\\ K=1\to\left\{\mathcal{L}_{n-1}(\hat{\mathcal{L}}_\xi T)\equiv Q_n\right\}_{n=1}^{N_0+P}\cup\left\{L_\xi^k T_\xi\big|_{\xi=0}\equiv -D_t^k q\right\}_{k=1}^{1},\\ K=2\to\left\{\mathcal{L}_{n-1}(\hat{\mathcal{L}}_\xi T)\equiv Q_n\right\}_{n=1}^{N_0+2P}\cup\left\{L_\xi^k T_\xi\big|_{\xi=0}\equiv -D_t^k q\right\}_{k=1}^{2}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{gathered}\tag{77}$$

или в общем виде

$$\left\{\mathcal{L}_{n-1}(\hat{\mathcal{L}}_\xi T)=Q_n\right\}_{n=1}^{N_0+KP}\cup\left\{L_\xi^k T_\xi\big|_{\xi=0}\equiv -D_t^k q\right\}_{k=1}^{K},\ K\in\mathbb{Z}_{\geq}.\tag{78}$$

Здесь $P$ – шаг приращения числа интегральных тождественных равенств для каждого ($K$+1)-го приближения. Отсюда следует $N_K=N_0+KP+K=N_0+(P+1)K.$

Для нахождения функции $\delta(t)$ обратимся к уравнению (23), которое запишем как

$$\frac{d}{dt}\int_\delta^\xi\frac{d\xi}{(1-\xi)^m}\int_\delta^\xi T(1-\xi)^m\,d\xi=T.\tag{79}$$

При $\xi\to 0$ из (79) приходим к интегральному соотношению

$$\frac{d}{dt}\int_\delta^0\frac{d\xi}{(1-\xi)^m}\int_\delta^\xi T(1-\xi)^m\,d\xi=T(0,t).\tag{80}$$

Подстановка (73) в (80) дает дифференциальное уравнение относительно $\delta(t)$ с начальным условием $\delta(0)=0$. Его решение заканчивает рассмотрение первой стадии процесса.

*Вторая стадия.* Температурный фронт опишем полиномом следующего вида:

$$T=g(t)+\sum_{j=2}^{N}b_j(t)(1-\xi)^j.\tag{81}$$

Данный полином удовлетворяет граничному условию (14) и граничной функции $g(t)=T(1,t)$. Из граничного условия (14) получаем уравнение

$$\sum_{j=2}^{N}j\,b_j(t)=q(t).\tag{82}$$

Для получения остальных $N-2$ уравнений воспользуемся полученными выше интегральными и дифференциальными тождественными равенствами, входящими в последовательности (59) и (72). По аналогии с (77) сразу запишем:

$$\begin{gathered}K=0\to\left\{\mathcal{M}_{n-1}(\hat{\mathcal{M}}_\xi T)=Q_n+\sum_{i=0}^{n-1}p_i G_i\right\}_{n=1}^{N_0}\\ K=1\to\left\{\mathcal{M}_{n-1}(\hat{\mathcal{M}}_\xi T)=Q_n+\sum_{i=0}^{n-1}p_i G_i\right\}_{n=1}^{N_0+P}\cup\left\{L_\xi^k T_\xi\big|_{\xi=0}\equiv -D_t^k q\right\}_{k=1}^{1},\\ K=2\to\left\{\mathcal{M}_{n-1}(\hat{\mathcal{M}}_\xi T)=Q_n+\sum_{i=0}^{n-1}p_i G_i\right\}_{n=1}^{N_0+2P}\cup\left\{L_\xi^k T_\xi\big|_{\xi=0}\equiv -D_t^k q\right\}_{k=1}^{2}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{gathered}\tag{83}$$

или в общем виде

$$\left\{\mathcal{M}_{n-1}(\hat{\mathcal{M}}_\xi T)=Q_n+\sum_{i=0}^{n-1}p_i G_i\right\}_{n=1}^{N_0+KP}\cup\left\{L_\xi^k T_\xi\big|_{\xi=0}\equiv -D_t^k q\right\}_{k=1}^{K},\ K\in\mathbb{Z}_{\geq}.\tag{84}$$

Для нахождения функции g($t$) воспользуемся уравнением (40), придав ему следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_1^{\xi}\frac{d\xi}{(1-\xi)^m}\int_1^{\xi}T\,(1-\xi)^m\,d\xi = T - T(1,t). \tag{85}$$

При $\xi \to 0$ из (85) с учетом $T(1,t) = g(t)$ получим интегральное соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_1^{0}\frac{d\xi}{(1-\xi)^m}\int_1^{\xi}T\,(1-\xi)^m\,d\xi = T(0,t) - g(t). \tag{86}$$

Подстановка (73) в (86) даст интегро-дифференциальное уравнение

$$f\left(\mathrm{g}', g, \{Q_i\}_{i=1}^{N_K}, ...\right) = F(t), \tag{87}$$

где $F$($t$) – свободный член. Решение (87) возможно двумя путями. Первый связан с последовательным $N_K$-кратным дифференцированием (87) по $t$ с переводом уравнения (87) в обыкновенное дифференциальное уравнение. Однако, по всей видимости, наиболее простой путь решения связан с введением новой функции $\varphi = \varphi(t) = Q_{N_K}$, приводящей к множеству очевидных тождеств:

$$Q_{N_K} = \varphi,\ Q_{N_K-1} = \varphi',\ Q_{N_K-2} = \varphi'',...\ Q_0 = q = \varphi^{(N_K)},\ q' = \varphi^{(N_K+1)}. \tag{88}$$

С учетом (88) уравнение (87) примет вид

$$f\left(\varphi^{(N_K+1)}, \varphi^{(N_K)}, ..., \varphi', \varphi\right) = F(t). \tag{89}$$

Для функции φ($t$), исходя из ее определения и представления функции $G_n(t)$ в виде (46), справедливы начальные условия:

$$Q_{N_K}(t_1) = \varphi(t_1) = 0,\ Q_{N_K-1}(t_1) = \varphi'(t_1) = 0,\ Q_{N_K-2}(t_1) = \varphi''(t_1) = 0,\ ...\ Q_0(t_1) = \varphi^{(N_K)}(t_1) = 0. \tag{90}$$

Отсюда на основании уравнения (89) и начальных условий (90) приходим к задаче Коши. Теперь запишем отвечающее (89) характеристическое уравнение ($\nu_i$ ( $i = \overline{0, N_k + 1}$ ) – коэффициенты):

$$\sum_{i=0}^{N_K+1} \nu_i \mu^i = 0. \tag{91}$$

Действительные корни (89) определяют собственные значения краевой задачи $\mu_i$ $(j = \overline{1, N_K + 1})$. Решение системы (87)–(88) (с определением φ) и последующее ($N_K$+1)-кратное дифференцирование по $t$ функции φ дает граничную функцию $g(t) = \varphi^{(N_K+1)}(t)$ и, соответственно, приближенное аналитическое решение краевой задачи для второй стадии теплового процесса.

**Заключение.** Предложена новая схема отыскания приближенных аналитических решений краевых задач нестационарной теплопроводности с граничным условием второго рода на основе введения в рассмотрение фронта температурного возмущения и разделения всего процесса на две стадии. Для первой стадии на основе предварительного дифференцирования уравнения теплопроводности по пространственной координате и последующего применения симметричных интегральных и дифференциальных операторов построены, соответственно, две последовательности интегральных и дифференциальных тождественных равенств. Каждая из них содержит интегральные либо дифференциальные граничные характеристики для заданного граничного условия второго рода. Для второй стадии путем введения граничной функции, предварительного дифференцирования уравнения теплопроводности по пространственной координате и последующего применения симметричных интегральных операторов построена последовательность интегральных тождественных равенств, содержащих интегральные граничные характеристики для граничного условия второго рода и граничной функции. На основе полученных интегральных и дифференциальных тождественных равенств построены замкнутые системы уравнения, позволяющие находить полиномиальные коэффициенты температурного профиля для первой и второй стадий. Для каждого этапа предложены специальные интегральные операторы, сводящие краевую задачу к обыкновенному дифференциальному уравнению.

## Список использованных источников


1. Goodman, T. R. Application of Integral Methods to Transient Nonlinear Heat Transfer / T. R. Goodman // Adv. Heat Transfer. – 1964. – Vol. 1. – P. 51–122. https://doi.org/10.1016/S0065-2717(08)70097-2

2. Goodman, T. R. The Heat-Balance Integral – Further Considerations and Refinements / T. R. Goodman // Transactions of the ASME, J. Heat Transfer. – 1961. – Vol. 83, iss. 1. – P. 83–85. https://doi.org/10.1115/1.3680474

3. Wood, A. S. A new look at the heat balance integral method / A. S. Wood // Appl. Math. Model. – 2001. – Vol. 25, iss. 10. – P. 815–824. https://doi.org/10.1016/S0307-904X(01)00016-6

4. Био, М. Вариационные принципы в теории теплообмена / М. Био. – М.: Энергия, 1975. – 209 с.

5. Dorodnitsyn, A. A. General method of integral relations and its application to boundary layer theory / A. A. Dorodnitsyn // Advances in Aeronautical Sciences: Proc. of the Second International Congress in the Aeronautical Sciences, Zürich, 12–16 Sept. 1960 / eds.: T. Von Kármán, A. M. Ballantyne, R. R. Dexter. – New York: Pergamon Press, 1962. – Vol. 3. – P. 207–219. https://doi.org/10.1016/B978-0-08-006550-2.50018-1

6. Hristov, J. The heat-balance integral method by a parabolic profile with unspecified exponent: Analysis and exercises / J. Hristov // Thermal Sci. – 2009. – Vol. 13, № 2. – P. 27–48. https://doi.org/2298/TSCI0902027H

7. Sadoun, N. On the refined integral method for the one-phase Stefan problem with time-dependent boundary conditions / N. Sadoun, E. K. Si-Ahmed, P. Colinet // Appl. Math. Model. – 2006. – Vol. 30, iss. 6. – P. 531–544. https://doi.org/10.1016/j.apm.2005.06.003

8. Mitchell, S. L. Application of standard and refined heat balance integral methods to one-dimensional Stefan problems / S. L. Mitchell, T. G. Myers // SIAM Rev. – 2010. – Vol. 52, iss. 1. – P. 57–86. https://doi.org/10.1137/080733036

9. Myers, T. G. Optimizing the exponent in the heat balance and refined integral methods / T. G. Myers // Int. Comm. Heat Mass Transfer. – 2009. – Vol. 36, iss. 2. – P. 143–147. https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2008.10.013

10. Langford, D. The heat balance integral method / D. Langford // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1973. – Vol. 16, iss. 12. – P. 2424–2428. https://doi.org/10.1016/0017-9310(73)90026-4

11. Mitchell, S. L. Improving the accuracy of heat balance integral methods applied to thermal problems with time dependent boundary conditions / S. L. Mitchell, T. G. Myers // Int. J. Heat Mass Transfer. – 2010. – Vol. 53, iss. 17–18. – P. 3540–3551. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2010.04.015

12. Федоров, Ф. М. Граничный метод решения прикладных задач математической физики / Ф. М. Федоров. – Новосибирск: Наука, 2000. – 220 с.

13. Стефанюк, Е. В. Дополнительные граничные условия в нестационарных задачах теплопроводности / Е. В. Стефанюк, В. А. Кудинов // Теплофизика высоких температур. – 2009. – Т. 47, № 2. – С. 269–282. https://doi.org/10.1134/S0018151X0

14. Кот, В. А. Метод граничных характеристик / В. А. Кот // Инженерно-физический журнал. – 2015. – Т. 88, № 6. – С. 1345–1363. https://doi.org/10.1007/s10891-016-1377-9

15. Кот, В. А. Граничные характеристики для обобщенного уравнения теплопроводности и их эквивалентные представления / В. А. Кот // Инженерно-физический журнал. – 2016. – Т. 89, № 4. – С. 983–1006. https://doi.org/10.1007/s10891-016-1461-1

16. Kot, V. A. Integral Method of Boundary Characteristics: The Dirichlet Condition. Principles / V. A. Kot // Heat Transfer Research. – 2016. – Vol. 47, no. 10. – P. 927–944. https://doi.org/10.1615/HeatTransRes.2016014883

17. Кот, В. А. Метод граничной функции. Основные положения / В. А. Кот // Инженерно-физический журнал. – 2017. – Т. 90, № 2. – С. 391–417. https://doi.org/10.1007/s10891-017-1576-z


## References


1. Goodman T. R. Application of Integral Methods to Transient Nonlinear Heat Transfer. *Advances in Heat Transfer*, 1964, vol. 1, pp. 51–122. https://doi.org/10.1016/S0065-2717(08)70097-2

2. Goodman T. R. Heat-Balance Integral – Further Considerations and Refinements. *Transactions of the ASME, Journal of Heat Transfer*, 1961, vol. 83, iss. 1, pp. 83–85. https://doi.org/10.1115/1.3680474

3. Wood A. S. A new look at the heat balance integral method. *Applied Mathematical Modelling*, 2001, vol. 25, iss. 10, pp. 815–824. https://doi.org/10.1016/S0307-904X(01)00016-6

4. Bio M. *Variational principles in heat-exchange theory*. Moscow, Energiya Publ., 1975. 209 p. (in Russian).

5. Dorodnitsyn A. A. General method of integral relations and its application to boundary layer theory. Kármán T. Von, Ballantyne A. M., Dexter R. R. (eds.). *Advances in Aeronautical Sciences: Proceedings of the Second International Congress in the Aeronautical Sciences, Zürich, 12–16 September 1960. Volume 3.* New York, Pergamon, 1962, pp. 207–219. https://doi.org/10.1016/B978-0-08-006550-2.50018-1

6. Hristov J. The heat-balance integral method by a parabolic profile with unspecified exponent: Analysis and exercises. *Thermal Science*, 2009, vol. 13, no. 2, pp. 27–48. https://doi.org/2298/TSCI0902027H

7. Sadoun N., El-Khider Si-Ahmed, Colinet P. On the refined integral method for the one-phase Stefan problem with time-dependent boundary conditions. *Applied Mathematical Modelling*, 2006, vol. 30, iss. 6, pp. 531–544. https://doi.org/10.1016/j.apm.2005.06.003

8. Mitchell S. L., Myers T. G. Application of standard and refined heat balance integral methods to one-dimensional Stefan problems. *SIAM Review*, 2010, vol. 52, iss. 1, pp. 57–86. https://doi.org/10.1137/080733036

9. Myers T. G. Optimizing the exponent in the heat balance and refined integral methods. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2009, vol. 36, iss. 2, pp. 143–147. https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2008.10.013

10. Langford D. The heat balance integral method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1973, vol. 16, iss. 12, pp. 2424–2428. https://doi.org/10.1016/0017-9310(73)90026-4

11. Mitchell S. L., Myers T. G. Improving the accuracy of heat balance integral methods applied to thermal problems with time dependent boundary conditions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2010, vol. 53, iss. 17–18, pp. 3540–3551. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2010.04.015

12. Fedorov F. M. *Boundary method of solving applied problems of mathematical physics*. Novosibirsk, Nauka Publ., 2000. 220 p. (in Russian).

13. Stefanyuk E. V., Kudinov V. A. Additional boundary conditions in nonstationary problems of heat conduction. *High Themperature*, 2009. vol. 47, iss. 2, pp. 250–262. https://doi.org/10.1134/s0018151x09020163

14. Kot V. A. Method of Boundary Characteristics. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2015, vol. 88, iss. 6, pp. 1390–1408. https://doi.org/10.1007/s10891-016-1377-9

15. Kot V. A. Boundary Characteristics for the Generalized Heat-Conduction Equation and Their Equivalent Representations. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2016, vol. 89, iss. 4, pp. 985–1007. https://doi.org/10.1007/s10891-016-1461-1

16. Kot V. A. Integral Method of Boundary Characteristics: The Dirichlet Condition. Principles. *Heat Transfer Research*, 2016, vol. 47, no. 10, pp. 927–944. https://doi.org/10.1615/HeatTransRes.2016014883

17. Kot V. A. The Boundary Function Method. Fundamentals. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2017, vol. 90, iss. 2, pp. 366–391. https://doi.org/10.1007/s10891-017-1576-z

## Информация об авторе

*Кот Валерий Андреевич* – кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории турбулентности, Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси (ул. П. Бровки, 15, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: valery.kot@hmti.ac.by

## Information about the author

*Valery A. Kot* – Ph. D. (Engineering), Senior Researcher of the Laboratory of Turbulence, A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus (15, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: valery.kot@hmti.ac.by