

ISSN 1561-8358 (Print)
 ISSN 2524-244X (Online)
 УДК 536.2(075)46
<https://doi.org/10.29235/1561-8358-2018-63-3-318-332>

Поступила в редакцию 20.10.2017
 Received 20.10.2017

В. А. Кот

*Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси,
 Минск, Беларусь*

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ВТОРОГО РОДА. 2. АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ

Аннотация. Представлен алгоритм нахождения полиномиальных решений краевых задач нестационарной теплопроводности с переменным во времени граничным условием второго рода для тел плоской геометрии, а также с цилиндрической и сферической симметрией. Данный алгоритм основан на введении в рассмотрение граничных характеристик в виде определенного набора из k -кратных производных и n -кратных интегралов от заданной в виде граничного условия временной функции теплового потока на поверхности тела. Отдельно рассмотрены две стадии процесса: 1 – температурный фронт не достигает центра симметрии тела; 2 – температурный фронт достигает центра симметрии тела и прогрев происходит по всему сечению. На примерах симметричного нагрева протяженной пластины с постоянным и переменным тепловым потоком продемонстрирована очень высокая точность предложенного подхода на основе интегрального метода граничных характеристик (ИМГХ). По сравнению с методом дополнительных граничных условий предложенный метод ИМГХ позволяет уменьшить относительную ошибку аппроксимации (при одинаковых степенях полиномов N) на три-пять порядков и более, доводя ее до пренебрежимо малых величин (0,00028 % при $N = 11$; 0,000025 % при $N = 14$). Установлено, что с каждым последующим приближением (посредством добавления в полином трех степеней) для первой стадии процесса аппроксимационная ошибка снижается на порядок. Для второй стадии процесса описан эффективный алгоритм нахождения собственных значений краевой задачи теплопроводности, связанный с введением в рассмотрение дополнительной функции, соответствующей наибольшей по порядку величины граничной интегральной характеристике. Это позволяет перевести получаемое на основе ИМГХ интегро-дифференциальное уравнение в обыкновенное дифференциальное уравнение с нулевыми начальными условиями. Проведенные расчеты температуры в центре симметрии пластины подтвердили исключительно высокую аппроксимационную точность предложенного подхода.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, приближенный метод, интегральные тождества, фронт возмущения

Для цитирования: Кот, В. А. Интегральный метод решения задач теплопроводности с граничным условием второго рода. 2. Анализ точности / В. А. Кот // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2018. – Т. 63, № 3. – С. 318–332. <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2018-63-3-318-332>

V. A. Kot

A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

INTEGRAL METHOD OF SOLVING HEAT-CONDUCTION PROBLEMS WITH BOUNDARY CONDITION OF THE SECOND-KIND. 2. ANALYSIS OF ACCURACY

Abstract. An algorithm of finding polynomial solutions of boundary-value problems on nonstationary heat conduction with a time-dependent boundary condition of the secondary kind for bodies having a plane geometry, a cylindrical symmetry, or a spherical symmetry is presented. The algorithm is based on the introduction into consideration of the boundary characteristics in the form of a definite set of k -fold derivatives and n -fold integrals with respect to the time function of the heat flow on the surface of a body representing a boundary condition. Two stages of the heat-conduction process were considered separately: 1) the temperature front does not reach the center of a body and 2) the temperature front reaches the center of the body, and it is heated throughout its thickness. By the example of symmetric heating of a lengthy plate with a constant and variable heat flows, a very high accuracy of the proposed approach based on the integral method of boundary characteristics (BChIM) was demonstrated. As compared to the method of additional boundary characteristics, the BChIM makes it possible to decrease the relative approximation error (at one and the same polynomial degrees N) by three to five orders of magnitude and by larger values and brings it to a negligibly low level (0.00028 % at $N = 11$ and 0.000025 % at $N = 14$). It was established that, with each next approximation (with addition of three degrees into the polynomial), the approximation error decreases by an order of magnitude for the first stage of the process. An efficient algorithm of finding the eigenvalues of a boundary-value problem on heat conduction, based on the introduction into consideration of an additional function corresponding to the largest,

in sequence order, boundary integral characteristic, is presented for the second stage of the process. The algorithm makes it possible to transform the integro-differential equation obtained on the basis of the BChIM into the ordinary differential equation with zero initial conditions. The calculations of the temperature at the center of the plate have shown that the approximation accuracy of the approach proposed is very high.

Keywords: heat-conduction equation, approximate method, integral identities, temperature disturbance front

For citation. Kot V. A. Integral method of solving heat-conduction problems with boundary condition of the second-kind. 2. Analysis of accuracy. *Vestsi Natsyonal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2018, vol. 63, no. 2, pp. 318–332 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2018-63-3-318-332>

Введение. Настоящая статья является продолжением работ [1–6], в которых рассмотрен интегральный метод граничных характеристик (ИМГХ). Он относится к достаточно широкому классу интегральных методов [7], предусматривающих следующие две стадии теплового процесса. На первой стадии рассматривается область, ограниченная фронтом температурного возмущения $\delta(t)$, за пределами которого тело сохраняет первоначальную температуру. Температурный профиль в пределах возмущенной области $y \in [0, \delta(t)]$ представляется полиномом с переменными во времени коэффициентами, которые подлежат определению. Далее интегрируется уравнение теплопроводности по области $y \in [0, \delta(t)]$, что приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно функции $\delta(t)$. Вторая стадия начинается с момента достижения фронтом температурного возмущения центра симметрии тела. С этого момента в рассмотрение граничная функция $\varphi(t)$ в виде температуры центра симметрии. Температурный профиль в области $y \in [0, 1]$ представляется соответствующим полиномом с подлежащими определению коэффициентами. Последующее интегрирование уравнения теплопроводности по области $y \in [0, 1]$ приводит к дифференциальному уравнению относительно граничной функции $\varphi(t)$. Определение $\varphi(t)$, по сути, завершает процесс решения задачи.

Целью настоящей работы является дальнейшее развитие идей, затронутых в [6] и касающихся рассмотрения краевых задач нестационарной теплопроводности с граничным условием второго рода, причем со сравнительной оценкой аппроксимационной точности ИМГХ и скорости сходимости полученных решений. Ниже изложены результаты рассмотрения некоторых задач для первой и второй стадий теплового процесса для декартовой системы координат. На наш взгляд, такой подход достаточно уместен, поскольку позволяет провести на простых примерах довольно точный сравнительный анализ аппроксимационных возможностей ИМГХ для второй краевой задачи.

Первая стадия процесса. Перейдя к координате $\xi = 1 - y$, отсчитываемой от поверхности тела, запишем задачу для первой стадии (в безразмерном виде) [6]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{(1-\xi)^m} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((1-\xi)^m \frac{\partial T}{\partial \xi} \right), \quad 0 < t \leq t_1, \quad \xi \in [0, \delta(t)], \quad (1)$$

$$T(\xi, 0) = 0, \quad \delta(0) = 0, \quad (2)$$

$$-\frac{\partial T(0, t)}{\partial \xi} = q(t), \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad (3)$$

$$T(\delta, t) = 0, \quad \frac{\partial T(\delta, t)}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

В [6] получена последовательность интегральных тождественных равенств

$$\left\{ \mathcal{L}_{n-1}(\hat{\mathcal{L}}_{\xi}^{\varepsilon} T) \equiv Q_n \right\}_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+, \quad (5)$$

включающая интегральные граничные характеристики

$$Q_n \equiv \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t}_{n} q(t) dt^{(n)} = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} q(\tau) d\tau, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad (6)$$

и последовательность функционалов $\mathcal{L}_{n-1}(\hat{\mathcal{L}}_\xi T) \forall n \in \mathbb{Z}_+$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi &\equiv \int_{\delta}^{\xi} d\xi (1-\xi)^m \int_{\delta}^{\xi} \frac{1}{(1-\xi)^m} (\cdot) d\xi, \quad \hat{\mathcal{L}}_\xi \equiv \int_{\delta}^{\xi} (1-\xi)^m (\cdot) d\xi, \\ \mathcal{L}_1 &\equiv \int_{\delta}^0 d\xi (1-\xi)^m \int_{\delta}^{\xi} \frac{1}{(1-\xi)^m} (\cdot) d\xi, \quad \mathcal{L}_n \equiv \overbrace{\mathcal{L}_1 \dots \mathcal{L}_\xi \mathcal{L}_\xi}^n, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Кроме того, в [6] доказано существование последовательности

$$\{D_t^k T_\xi = L_\xi^k T_\xi\}_n, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \quad (8)$$

где $D_t^k \equiv \partial^k / \partial t^k$, $L_\xi^k \equiv \overbrace{L_\xi L_\xi \dots L_\xi}^k$ – дифференциальные операторы k -го порядка, L_ξ – оператор правой части дифференциального уравнения (1)

$$L_\xi \equiv \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{(1-\xi)^m} \frac{\partial}{\partial \xi} ((1-\xi)^m (\cdot)) \right). \quad (9)$$

Отсюда запишем дифференциальный оператор L_ξ^n в виде

$$L_\xi^k \equiv \underbrace{\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{(1-\xi)^m} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (1-\xi)^m \dots \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{(1-\xi)^m} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((1-\xi)^m \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{(1-\xi)^m} \frac{\partial}{\partial \xi} ((1-\xi)^m (\cdot)) \right) \right) \right) \right) \right)}_k. \quad (10)$$

Если обозначить $q(t) \equiv Q_0$, а k -ю производную записать как

$$\frac{d^k q(t)}{dt^k} \equiv D_k q(t) = Q_{-k}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (11)$$

то для функции $q(t)$ можно составить последовательность в виде

$$\dots Q_{-2}, Q_{-1}, Q_0, Q_1, Q_2 \dots \Rightarrow \{Q_n\}_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (12)$$

или

$$\{Q_{-k}\} \cup \{Q_n\}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad n \in \mathbb{Z}_\geq. \quad (13)$$

Такой несколько формальный подход позволяет записать

$$\mathcal{L}_{-k} T \Big|_{\xi=0} = \underbrace{\mathcal{L}_{-1} \dots \mathcal{L}_{-1} \mathcal{L}_{-1}}_k T \Big|_{\xi=0}, \quad L_{-1} T \Big|_{\xi=0} \equiv \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{(1-\xi)^m} \frac{\partial}{\partial \xi} ((1-\xi)^m T) \right) \Big|_{\xi=0}. \quad (14)$$

Отсюда вместо (8) получим последовательность

$$\{\mathcal{L}_{-k} T = Q_{-k}\}, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \quad (15)$$

Объединив (5) и (15), придем к двойной последовательности

$$\{\mathcal{L}_{n-1}(\hat{\mathcal{L}}_\xi T) = Q_n\}_{n=1}^{N_0+K} \cup \{L_\xi^k T_\xi \Big|_{\xi=0} \equiv -D_t^k q\}_{k=1}^K, \quad K \in \mathbb{Z}_\geq, \quad (16)$$

где P – шаг приращения числа интегральных тождественных равенств для каждого $(K+1)$ -го приближения, причем $N_K = N_0 + KP + K = N_0 + (P+1)K$. Из (13) и (16) получим двойное множество граничных характеристик

$$\{Q_{-k}\}_{k=0}^K \cup \{Q_n\}_{n=1}^{N_0+KP}, \quad K \in \mathbb{Z}_{\geq}. \tag{17}$$

Приняв во внимание соотношение $n = k + 1$, вместо (17) запишем

$$\{Q_{-k}\}_{k=0}^K \cup \{Q_{k+1}\}_{k=0}^{N_0+KP}, \quad K \in \mathbb{Z}_{\geq}, \tag{18}$$

или в раскрытом виде

$$\begin{matrix} \xrightarrow[k=0]{K=0} & \begin{pmatrix} Q_{N_0} \\ \dots \\ Q_2 \\ Q_1 \\ Q_0 \end{pmatrix} & \xrightarrow[k=0,1]{K=1} & \begin{pmatrix} Q_{N_0+P} \\ \dots \\ Q_{N_0} \\ \dots \\ Q_2 \\ Q_1 \\ Q_0 \\ Q_{-1} \end{pmatrix} & \xrightarrow[k=0,1,2]{K=2} & \begin{pmatrix} Q_{N_0+2P} \\ \dots \\ Q_{N_0} \\ \dots \\ Q_2 \\ Q_1 \\ Q_0 \\ Q_{-1} \\ Q_{-2} \end{pmatrix} & \xrightarrow[k=0,1,2,3]{K=3} \dots \xrightarrow[k=0, \dots, K]{K} & \begin{pmatrix} Q_{N_0+KP} \\ \dots \\ Q_{N_0} \\ \dots \\ Q_2 \\ Q_1 \\ Q_0 \\ Q_{-1} \\ \dots \\ Q_{-K} \end{pmatrix} \end{matrix} \tag{19}$$

Иллюстративный пример. Найдем решение задачи теплопроводности для бесконечной пластины ($m = 0$) в следующей постановке (безразмерная форма):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < t \leq \infty, \tag{20}$$

$$T(\xi, 0) = 0, \quad \delta(0) = 0, \tag{21}$$

$$-\frac{\partial T(0, t)}{\partial \xi} = q(t), \quad \frac{\partial T(1, t)}{\partial x} = 0. \tag{22}$$

Оценку точности приближенных решений произведем с помощью параметров

$$E = |T - T^*|, \quad \|E_L^k\| = \frac{1}{T^*(0, t)} \frac{1}{\delta(t)} \sqrt{\int_a^{\delta} (T - T^*)^2 d\xi}, \quad \varepsilon_0 = \left| \frac{T(0, t)}{T^*(0, t)} - 1 \right| \cdot 100 \%, \tag{23}$$

где T^* – точное значение, $\|E_L^k\|$ – модифицированная норма Лангфорда k -го приближения, E – модуль отклонения приближенного значения от точного, ε_0 – относительная ошибка расчета температуры поверхности. Для оценки сходимости решений используем параметры:

$$p_E = \frac{\ln \left[\frac{\|E_L^1\|}{\|E_L^k\|} \right]}{\ln(N/N_0)}, \quad p_\varepsilon = \frac{\ln \left[\frac{\varepsilon_0^1}{\varepsilon_0^k} \right]}{\ln(N/N_0)}, \tag{24}$$

где N и N_0 – степень полинома при k -м и первом приближениях соответственно.

При рассмотрении первой стадии представляется целесообразным обратиться к описанию процесса теплопроводности в полуограниченном пространстве, когда влиянием отраженной

тепловой волны можно пренебречь. Данная постановка представляет также самостоятельный интерес, поскольку позволяет наиболее точно охарактеризовать аппроксимационные свойства ИМГХ для задач теплопроводности с граничным условием второго рода. Точное решение задачи (20)–(21) с условием $T(\xi, t)|_{\xi \rightarrow \infty} = 0$ имеет вид [8]

$$T(\xi, t) = \int_0^t \frac{q(t-\tau)}{\sqrt{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right) d\tau. \quad (25)$$

При введении в рассмотрение фронта температурного возмущения $\delta(t)$ вместо граничного условия $\partial T(1/t)/\partial x = 0$ имеем следующие два условия:

$$T(\delta, t) = 0, \quad \frac{\partial T(\delta, t)}{\partial x} = 0. \quad (26)$$

В таком случае, приближенное решение задачи опишем полиномом

$$T = \left(1 - \frac{x}{\delta(t)}\right)^2 \sum_{j=0}^{N-2} a_j(t) \left(\frac{x}{\delta(t)}\right)^j, \quad (27)$$

который учитывает условия (26).

Постоянный тепловой поток. При $g(t) = 1$ имеем точное решение [9]

$$T(x, t) = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) - x \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right). \quad (28)$$

Найдем решение задачи (20), (21), (16) в первом-четвертом приближениях ($K = \overline{0, 3}$) при $N_0 = 3$. Для первого приближения ($K = 0, N = 5$) с учетом трех тождественных равенств (5) (с заменой $1 - \xi \rightarrow x$) придем к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 \\ 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 & 1/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ t/\delta(t) \\ t^2/\delta(t)^3 \\ 4t^3/\delta(t)^5 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Решив систему (29), найдем температурную функцию в виде

$$T = \left(1 - \frac{x}{\delta}\right)^2 \left[\delta \left(\frac{1}{16} + \frac{45t}{8\delta^2} - \frac{105t^2}{2\delta^4} + \frac{315t^3}{\delta^6} \right) - x \left(\frac{7}{8} - \frac{45t}{4\delta^2} + \frac{105t^2}{\delta^4} - \frac{630t^3}{\delta^6} \right) + \frac{x^2}{\delta} \left(\frac{41}{16} - \frac{915t}{8\delta^2} + \frac{4095t^2}{2\delta^4} - \frac{14805t^3}{\delta^6} \right) - \frac{x^3}{\delta^2} \left(2 - \frac{120t}{\delta^2} + \frac{2520t^2}{\delta^4} - \frac{20160t^3}{\delta^6} \right) \right]. \quad (30)$$

Фронт $\delta(t)$ определим из соотношения (80) [6], которое в данном случае примет вид

$$\frac{d}{dt} \int_{\delta}^x T dx = T(0, t). \quad (31)$$

Подстановка (30) в (31) даст дифференциальное уравнение

$$\frac{d\sigma}{dt} = 40 \frac{17640t^3 - 1680t^2\sigma + 63t\sigma^2 - \sigma^3}{25200t^3 - 2520t^2\sigma + 90t\sigma^2 - \sigma^3}, \quad (32)$$

где $\sigma = \delta^2$. Решение уравнения (32) с начальным условием $\sigma(0) = 0$ имеет простой вид: $\sigma(t) = \alpha t$, где $\alpha \approx 19,5632$ – минимальный действительный положительный корень алгебраического уравнения

$$\alpha^4 - 130\alpha^3 + 5040\alpha^2 - 92400\alpha + 705600 = 0.$$

Отсюда найдем $\delta(t) = 4,4230\sqrt{t}$. Подстановка $\delta(t)$ в (30) даст окончательное решение

$$T = 1,12754\sqrt{t} - x \left(1 - 0,29930 \frac{x}{\sqrt{t}} + 0,021735 \frac{x^2}{t} + 0,004572 \frac{x^3}{t^{3/2}} - 0,000633 \frac{x^4}{t^2} \right). \quad (33)$$

Температурные профили, рассчитанные на основе (33) (ИМГХ), метода дополнительных граничных условий (МДГУ) [10–12] и точного решения (28), представлены на рис. 1, *a*. В отличие от МДГУ, предложенная схема дает решение, очень близкое точному. Температурные профили практически полностью совпадают. Абсолютное отклонение приближенного решения (ИМГХ, МДГУ) от точного для момента времени $t = 0,2$ отражает рис. 1, *b*. По сравнению с МДГУ метод ИМГХ отличается значительно более высокая аппроксимационная точность. Так, для температуры поверхности ($T^*(0, t) = 2\sqrt{t/\pi}$) для МДГУ и ИМГХ имеем соответственно $\epsilon_0 = 2,97\%$ и $\epsilon_0 = 0,074\%$. Здесь мы можем констатировать очень существенное (примерно в 40 раз) снижение ошибки.

Решение задачи во втором приближении ($K = 1, N = 8$) приводит к аналогичной (29) по форме системе линейных алгебраических уравнений для коэффициентов $a_j(t), j = \overline{0,8}$ (с целью сокращения материала данная система не приводится). После нахождения коэффициентов на основе (31) придем к дифференциальному уравнению

$$\frac{d\sigma}{dt} = 6 \frac{294053760t^5 - 30030000t^4\sigma + 1338480t^3\sigma^2 - 33000t^2\sigma^3 + 460t\sigma^4 - 3\sigma^5}{98017920t^5 - 10810800t^4\sigma + 514800t^3\sigma^2 - 13200t^2\sigma^3 + 180t\sigma^4 - \sigma^5}. \quad (34)$$

Решение уравнения (34) дает $\sigma(t) = \alpha t$, где $\alpha \approx 31,1332$ – минимальный действительный положительный корень алгебраического уравнения

$$\alpha^6 - 216\alpha^5 + 18720\alpha^4 - 910800\alpha^3 + 26872560\alpha^2 - 458377920\alpha + 3528645120 = 0.$$

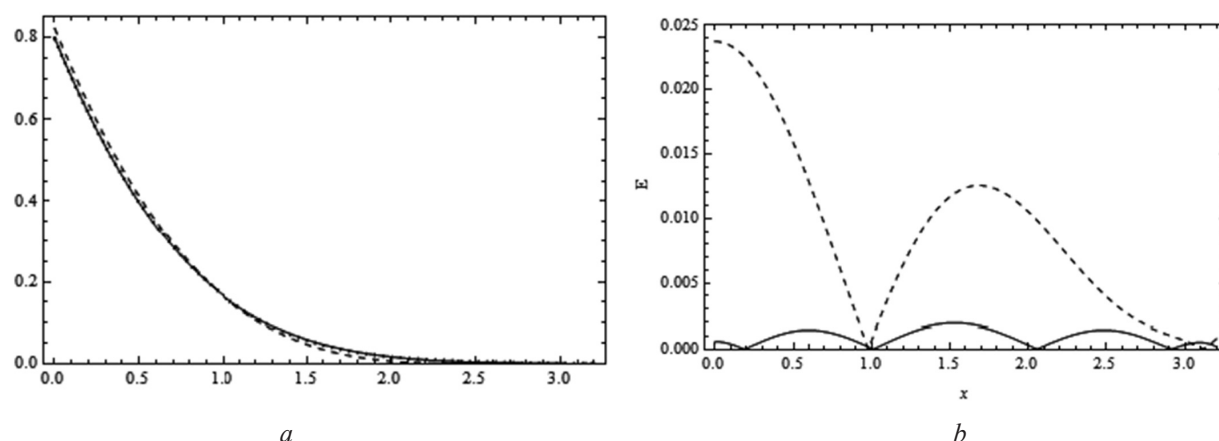


Рис. 1. Температурные профили при $q(t) = 1, t = 0,2$ для точного решения (сплошная линия), решений на основе ИМГХ (пунктирная линия) и МДГУ (штриховая линия) (*a*); отклонение E при $t = 0,2$ для решений на основе ИМГХ (сплошная линия) и МДГУ (штриховая линия) при $N = 5$ (*b*)

Fig. 1. Temperature profiles at $q(t) = 1$ and $t = 0.2$ for the exact solution (solid line) and the solution on the basis of the BChIM (dotted line) and the ABCM (dashed line) (*a*); deviation E at $t = 0.2$ for the solutions on the basis of the BChIM (solid line) and the ABCM (dashed line) at $N = 5$ (*b*)

Для фронта возмущения имеем $\delta(t) = 5,5797\sqrt{t}$. Отсюда решение задачи примет вид

$$T = 1,12834\sqrt{t} - x + \frac{x^2}{\sqrt{t}} \left(0,282992 - 0,0135696 \frac{x^2}{t} + 0,00139537 \frac{x^3}{t^{3/2}} + 3,255 \cdot 10^{-4} \frac{x^4}{t^2} - 7,427 \cdot 10^{-5} \frac{x^5}{t^{5/2}} + 4,183 \cdot 10^{-6} \frac{x^6}{t^3} \right), \quad 0 \leq x \leq 5,5797\sqrt{t}. \quad (35)$$

На рис. 2, *a* представлены графики отклонения E для решения (35) и решения на основе МДГУ ($N = 8$). Отличие в точности аппроксимационного решения задачи становится в данном случае еще более значительным (по сравнению с решением при $N = 5$). Относительная ошибка расчета температуры поверхности ε_0 для МДГУ и ИМГХ составляет соответственно $\varepsilon_0 = 1,76\%$ и $\varepsilon_0 = 0,0037\%$. Отличие в ошибках расчета температуры поверхности составляет $1,76 / 0,0037 \approx 467$, то есть более чем два порядка.

Опустив промежуточные вычисления, приведем решение задачи для третьего приближения ($k = 3, K = 2, N = 11$). Для температурного фронта получаем $\delta(t) = 6,5366\sqrt{t}$, и тогда решение принимает вид

$$T = 1,128376\sqrt{t} - x + \frac{x^2}{\sqrt{t}} \left(0,282183 - 0,011886 \frac{x^2}{t} + 6,886 \cdot 10^{-4} \frac{x^4}{t^3} - 4,743 \cdot 10^{-5} \frac{x^5}{t^{5/2}} - 2,882 \cdot 10^{-5} \frac{x^6}{t^3} + 6,881 \cdot 10^{-6} \frac{x^7}{t^{7/2}} - 6,12 \cdot 10^{-7} \frac{x^8}{t^4} + 2,021 \cdot 10^{-8} \frac{x^9}{t^{9/2}} \right), \quad 0 \leq x \leq 6,5366\sqrt{t}. \quad (36)$$

На рис. 2, *b* приведены графики отклонения E для (36) и решения на основе МДГУ ($N = 11$). Как видим, аппроксимационные ошибки для МДГУ и ИМГХ совершенно несопоставимы. Если в МДГУ $\varepsilon_0 = 1,24\%$, то для ИМГХ $\varepsilon_0 = 0,00028\%$. Отличие в ошибках сравниваемых методов составляет $1,24/0,00028 = 4353$, то есть более чем три порядка.

Аналогично могут быть получены решения в следующих приближениях. В частности, для четвертого приближения ($k = 4, K = 3, N = 14$) мы приходим к решению:

$$T = 1,1283794\sqrt{t} - x \left(1 - 0,282105 \frac{x}{\sqrt{t}} + 0,011770 \frac{x^3}{t^{3/2}} - 5,9573 \cdot 10^{-4} \frac{x^5}{t^{5/2}} + 2,8212 \cdot 10^{-5} \frac{x^7}{t^{7/2}} + 7,2747 \cdot 10^{-7} \frac{x^8}{t^4} - 2,2928 \cdot 10^{-6} \frac{x^9}{t^{9/2}} + 5,1993 \cdot 10^{-7} \frac{x^{10}}{t^5} - 5,574 \cdot 10^{-8} \frac{x^{11}}{t^{11/2}} + 3,051 \cdot 10^{-9} \frac{x^{12}}{t^6} - 6,893 \cdot 10^{-11} \frac{x^{13}}{t^{13/2}} \right), \quad 0 \leq x \leq 7,3772\sqrt{t}. \quad (37)$$

В данном случае относительная ошибка составляет $\varepsilon_0 = 0,000025\%$.

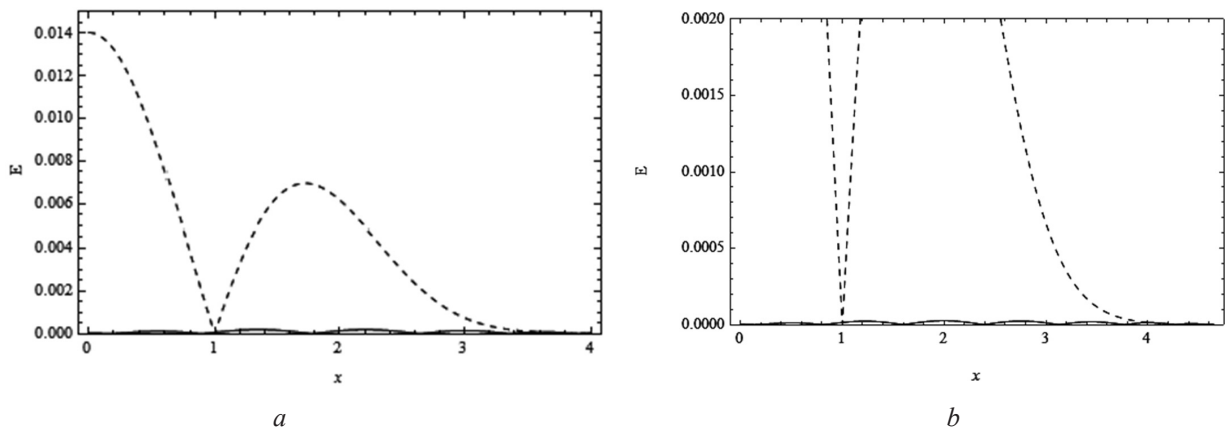


Рис. 2. Отклонение E при $q(t) = 1, t = 0,2$ для решений на основе ИМГХ (сплошная линия) и МДГУ (штриховая линия): $N = 8$ (а), $N = 11$ (б)

Fig. 2. Deviation E at $q(t) = 1$ and $t = 0.2$ for the solutions on the basis of the BChIM (solid line) and the ABCM (dashed line) at $N = 8$ (a) and $N = 11$ (b)

В табл. 1 приведены сравнительные данные для ε_0 и параметра сходимости p , определяемого согласно (24). Примем в качестве базовой характеристики «хорошей» сходимости значение $p = 2$. Отсюда мы можем сделать следующий вывод: в отличие от крайне низкой сходимости решений согласно МДГУ ($p \approx 1$), для ИМГХ ($p \gg 2$) характерна очень высокая сходимость решений. С каждым приближением относительная ошибка температуры поверхности снижается более чем на порядок. Рассчитанные по формуле (23) нормы Лангфорда $\|E_L^k\|$ для момента времени $t = 1$ с соответствующими значениями p_E представлены в табл. 2. Если для МДГУ значение $\|E_L^k\|$ (независимо от степени полинома $N = 5 \dots 14$) имеет один и тот же порядок величин $\sim 10^{-3}$, то для ИМГХ значение $\|E_L^k\|$ с каждым последующим приближением уменьшается примерно на порядок. При $N = 14$ получим следующее отношение параметров точности и сходимости в двух методах:

$$\varepsilon_0^{\text{МДГУ}} / \varepsilon_0^{\text{ИМГХ}} = 0,96 / 0,000025 = 38400,$$

$$\|E_L^4\|_{\text{МДГУ}} / \|E_L^4\|_{\text{ИМГХ}} = 1,61 \cdot 10^{-3} / 8,34 \cdot 10^{-7} = 1747.$$

Таблица 1. Относительная ошибка ε_0 и параметр сходимости p_ε в зависимости от N
 Table 1. Relative error ε_0 and convergence parameter p_ε depending on N

Метод	Параметр	Степень полинома N			
		5	8	11	14
МДГУ	$\varepsilon_0, \%$	2,97	1,76	1,24	0,96
	p_ε	–	1,11	1,11	1,10
ИМГХ	$\varepsilon_0, \%$	0,074	0,0037	0,00028	0,000025
	p_ε	–	6,37	7,07	7,76

Таблица 2. Норма $\|E_L^k\|$ и параметр сходимости p_E в зависимости от N при $t = 1$
 Table 2. Error norm $\|E_L^k\|$ and convergence parameter p_E depending on N at $t = 1$

Метод	Параметр	Степень полинома N			
		5	8	11	14
МДГУ	$\ E_L^k\ $	$7,67 \cdot 10^{-3}$	$3,56 \cdot 10^{-3}$	$2,13 \cdot 10^{-3}$	$1,61 \cdot 10^{-3}$
	p_E	–	1,63	1,62	1,61
ИМГХ	$\ E_L^k\ $	$6,55 \cdot 10^{-4}$	$5,90 \cdot 10^{-5}$	$6,71 \cdot 10^{-6}$	$8,34 \cdot 10^{-7}$
	p_E	–	5,12	5,81	6,47

Переменный тепловой поток. Пусть $q(t) = t$. Точное решение задачи известно [9]:

$$T = \frac{4t^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} \left[\left(1 + \frac{x^2}{4t} \right) \exp\left(-\frac{x^2}{4t} \right) - \frac{3\sqrt{\pi}x}{4\sqrt{t}} \left(1 + \frac{x^2}{6t} \right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \right]. \quad (38)$$

Найдем приближенное решение на основе степенного полинома (27) шестой степени ($N = 6$). Основываясь на граничных условиях и четырех тождественных равенствах последовательности (5), приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 \\ 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 & 1/10 & 1/11 \\ 1/7 & 1/8 & 1/9 & 1/10 & 1/11 & 1/12 & 1/13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t\delta \\ 0 \\ 0 \\ t^2 / (2\delta) \\ t^3 / (3\delta^3) \\ t^4 / \delta^5 \\ 6t^5 / \delta^7 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Решение (39) с применением (31) дает дифференциальное уравнение ($\sigma = \delta^2$)

$$\frac{d\sigma}{dt} = 4 \frac{20180160t^5 - 2656368t^4 \delta^2 + 158400t^3 \delta^4 - 5424t^2 \delta^6 + 108t \delta^8 - 2\delta^{10}}{720720t^5 - 82368t^4 \delta^2 + 3960t^3 \delta^4 - 96t^2 \delta^6 + t \delta^8}. \quad (40)$$

Решив (40), найдем $\delta(t) = 5,33112 \sqrt{t}$. Отсюда приходим к температурному профилю

$$T = 0,75218t^{3/2} - tx \left(1 - 0,568026 \frac{x}{\sqrt{t}} + 0,175308 \frac{x^2}{t} - 0,030803 \frac{x^3}{t^{3/2}} + 0,002905 \frac{x^4}{t^2} - 0,0001144 \frac{x^5}{t^{5/2}} \right), \quad 0 \leq x \leq \delta(t) = 5,33112 \sqrt{t}. \quad (41)$$

Согласно (38), температура поверхности полупространства изменяется по закону $T^*(0,t) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} t^{3/2} \approx 0,75225 t^{3/2}$. Из (41) находим $T(0,t) = 0,75218 t^{3/2}$. Относительная ошибка для температуры поверхности составляет $\epsilon_0 = 0,0096 \%$. Температурные профили (38) и (41) полностью сливаются (рис. 3, *a*).

Решение задачи во втором приближении ($K = 1, N = 9$) приводит к аналогичной (39) по форме системе уравнений для коэффициентов $a_j(t), j = \overline{0,9}$. В окончательном виде температурный профиль принимает следующий вид:

$$T = 0,75225 t^{3/2} - tx \left(1 - 0,564291 \frac{x}{\sqrt{t}} + \frac{x^2}{6t} - 0,023048 \frac{x^3}{t^{3/2}} - 6,534 \cdot 10^{-4} \frac{x^4}{t^2} + 7,98 \cdot 10^{-4} \frac{x^5}{t^{5/2}} - 1,315 \cdot 10^{-4} \frac{x^6}{t^3} + 9,877 \cdot 10^{-6} \frac{x^7}{t^{7/2}} - 2,962 \cdot 10^{-7} \frac{x^8}{t^4} \right), \quad 0 \leq x \leq 6,28892 \sqrt{t}. \quad (42)$$

В данном случае имеем относительную ошибку всего $\epsilon_0 = 0,00034 \%$. Во втором приближении аппроксимационная относительная ошибка снижена более чем на порядок. Это говорит о получении условно точного решения. На рис. 3, *b* приведен график абсолютного отклонения приближенного решения от точного при $N = 5$ и $N = 8$. Добавление в полиноме трех дополнительных степеней позволяет повысить аппроксимационную точность метода на порядок. Совершенно

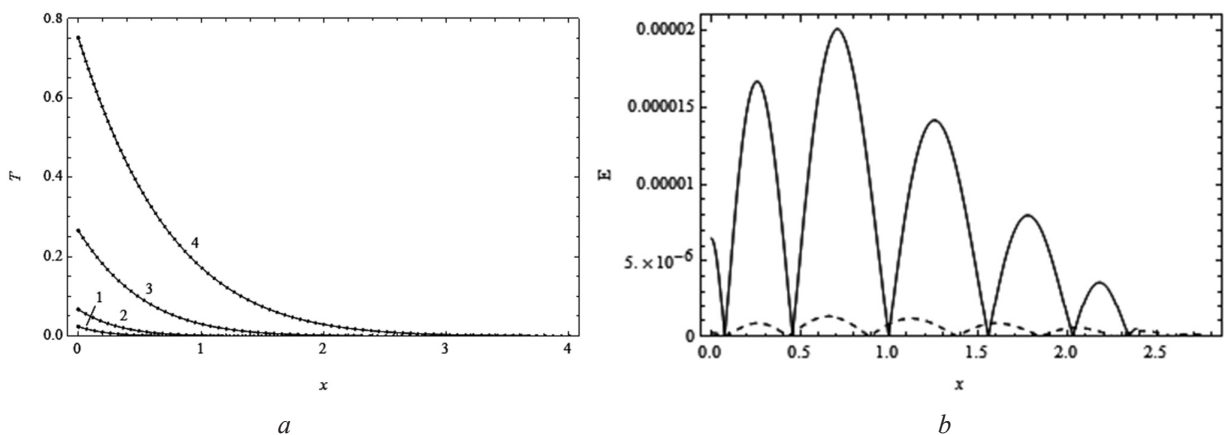


Рис. 3. Температурные профили при $q(t) = t, t = 0,1$ (1), $0,2$ (2), $0,5$ (3), $1,0$ (4) для точного решения (сплошная линия) и на основе ИМГХ (пунктирная линия) (а); отклонение E при $t = 0,2$ для решений на основе ИМГХ при $N = 5$ (сплошная линия) и $N = 8$ (штриховая линия) (б)

Fig. 3. Temperature profiles at $q(t) = t$ and $t = 0.1$ (1), 0.2 (2), 0.5 (3), 1.0 (4) for the exact solution (solid line) and the solution on the basis of the BChIM (dotted line) (a) and deviation E at $t = 0.2$ for the solutions on the basis of the BChIM at $N = 5$ (solid line) and $N = 8$ (dashed line) (b)

очевидно, что в случае применения последующих приближений будем иметь еще более точные (отличающиеся на порядки) решения.

Вторая стадия процесса. Здесь нас будут интересовать времена $t \in [t_1, \infty)$, при этом моменту времени t_1 отвечает $\delta(t_1) = 1$. Как отмечалось выше, для данной стадии вместо фронта температурного возмещения рассматривается граничная функция $g(t) = T(1, t)$. Для первого приближения температурный фронт опишем полиномом пятой степени ($N = 5$). Тогда мы можем записать

$$T = g(t) + \sum_{j=2}^N b_j(t)(1-x)^j. \quad (43)$$

Температурный профиль в виде (43) удовлетворяет граничному условию второго рода (22) и граничной функции $g(t)$. На основе граничного условия второго рода получаем уравнение

$$\sum_{j=2}^N j b_j(t) = q(t). \quad (44)$$

Для остальных $(N - 2)$ уравнений используем первые три тождественных равенства последовательности (59) [6]. В итоге приходим к системе уравнений

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/10 & 1/20 & 1/35 & 1/56 \\ 1/21 & 1/56 & 1/126 & 1/252 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ Q_1 - g \\ 6Q_2 - 6G_1 - g \\ 120Q_3 - 120G_2 - 20G_1 - g \end{pmatrix}, \quad (45)$$

где Q_1, Q_2, Q_3 – интегральные граничные характеристики согласно (45) [6]. Решение системы уравнений (45) дает полиномиальные коэффициенты (43) (с целью сокращения материала коэффициенты не приводятся). Далее, используя интегральное соотношение

$$\frac{d}{dt} \int_1^0 dx \int_1^x T dx = T(0, t) - g(t), \quad (46)$$

получим интегро-дифференциальное уравнение

$$5g' + 770g + 28560G_1 + 211680G_2 = F(t), \quad (47)$$

где $F(t) = 211680Q_3 - 6720Q_2 + 126Q_1 - 2Q + Q'/30$. В уравнении (46), помимо искомой функции g , присутствует ее первая производная g' , а также интегральные функции G_1 и G_2 , описываемые соотношением (46) [6]. Уравнение (47) переведем в обыкновенное дифференциальное уравнение для новой функции $p = G_2$. Запишем очевидные равенства:

$$G_2 = p, \quad G_1 = p', \quad q = p'', \quad q' = p'''. \quad (48)$$

С учетом (48) уравнение (47) примет вид

$$5p''' + 770p'' + 28560p' + 211680p = F. \quad (49)$$

Для функции $p = p(t)$ в силу (20) [6] справедливы начальные условия:

$$p(t_1) = G_2(t_1) = 0, \quad p'(t_1) = G_1(t_1) = 0, \quad p''(t_1) = g(t_1) = 0. \quad (50)$$

Отсюда на основании (49) и (50) приходим к задаче Коши. Для (49) запишем характеристическое уравнение

$$5\mu^3 + 770\mu^2 + 28560\mu + 211680 = 0. \quad (51)$$

Действительные корни (51) задают приближенные собственные значения краевой задачи: $\mu_1 = 9,86975$ (точное значение $\mu_1^* = 9,86960$), $\mu_2 = 42$ ($\mu_2^* = 39,4784$), $\mu_3 = 102,13$ ($\mu_3^* = 88,8264$). Первое вычисленное собственное значение совпадает с точным значением вплоть до третьего знака после запятой. При этом отметим, что МДГУ (в отличие от ИМГХ) при $N = 5$ позволяет получить лишь одно собственное значение $\mu_1 = 10$, которое очень существенно отличается от μ_1^* . Итак, решение задачи Коши дает функцию $p(t)$. Последующее двойное дифференцирование по t найденной функции p приводит к искомой граничной функции $g(t)$.

Иллюстративный пример. Рассмотрим краевую задачу с заданием на поверхности пластины постоянной удельной мощности $q(t) = 1$. Следует отметить, что данное упрощенное задание граничного условия никоим образом не может отразиться на общности рассматриваемой схемы на основе ИМГХ. Точное решение задачи известно и имеет вид [9]

$$T^*(x, t) = t - \frac{1}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi x) e^{-n^2 \pi^2 t}. \quad (52)$$

В первом приближении нами было получено $\delta(t) = 4,4230\sqrt{t}$. Отсюда найдем время окончания первой стадии: $t_1 = (1/4,4230)^2 = 0,05112$. Раскрыв в (49) свободный член F , придем к дифференциальному уравнению

$$150 p''' + 154 p'' + 5712 p' + 42336 p = 7056 t^3 - 672 t^2 + 25,2 t - 0,4 \quad (53)$$

с начальными условиями $p(0,0511) = p'(0,0511) = p''(0,0511) = 0$. Отсюда найдем

$$p(t) = 6,74947 \cdot 10^{-7} e^{-102,13t} - 3,30147 \cdot 10^{-5} e^{-42t} + 0,0020796 e^{-9,86975t} + \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{12} + \frac{7t}{360} - \frac{31}{15120}. \quad (54)$$

Произведя двойное дифференцирование $p(t)$, определим искомую граничную функцию

$$g(t) = t - 1/6 + 0,202578 e^{-9,86975t} - 0,058238 e^{-42t} + 0,0070401 e^{-102,13t}. \quad (55)$$

В силу равенства $p''(0,0511) = 0$ найденная функция $g(t)$ удовлетворяет начальному условию $g(t_1 = 0,0511) = 0$. Сравним граничную функцию с $T^*(1, t)$ на основе точного решения (52). На рис. 4, а представлены графики для температуры в центре симметрии пластины, рассчитанные на основе формул (52) и (55). Во всей области $0,05112 \leq t < \infty$ наблюдаем практически полное слияние температурных кривых $T(1, t)$ и $T^*(1, t)$. Запишем найденные с учетом (54) выражения для коэффициентов:

$$\begin{aligned} b_2 &= 1/2 - 0,9909 e^{-9,86975t} + 1,68474 e^{-42t} - 0,575705 e^{-102,13t}, \\ b_3 &= -0,0879527 e^{-9,86975t} - 3,18229 e^{-42t} + 2,16202 e^{-102,13t}, \\ b_4 &= 1,12283 e^{-9,86975t} + 1,29476 e^{-42t} - 2,66732 e^{-102,13t}, \\ b_5 &= -0,449132 e^{-9,86975t} + 0,199673 e^{-42t} + 1,06693 e^{-102,13t}. \end{aligned} \quad (56)$$

Используя (43), (54) и (55), придем к окончательному температурному профилю в виде

$$T(x, t) = \frac{1}{3} + t - x + \frac{x^2}{2} - \sum_{j=1}^3 \psi_j(x) e^{-\mu_j t}, \quad (57)$$

где собственные функции $\psi_j(x)$ описываются полиномами:

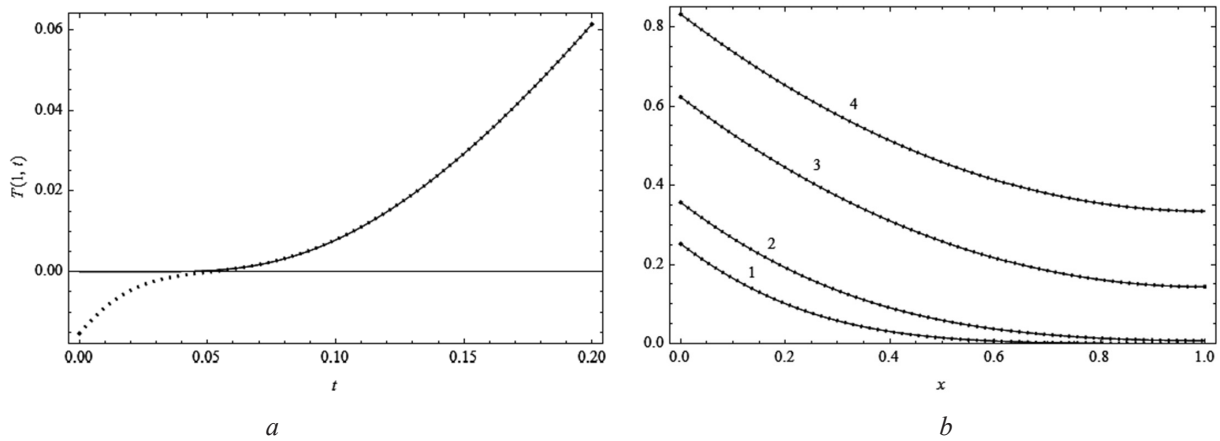


Рис. 4. Изменение во времени температуры в центре симметрии пластины согласно (52) (сплошная линия) и (55) (пунктирная линия) (a); температурные профили при $q(t) = 1$, $t = 0,05$ (1), $0,1$ (2), $0,3$ (3), $0,5$ (4) для точного (52) (сплошные кривые) и приближенного (57)–(58) (пунктирные кривые) решений (b)

Fig. 4. Time changes in the temperature at the center of the plate in accordance with (52) (solid line) and (55) (dotted line) (a) and temperature profiles at $q(t) = 1$ and $t = 0.05$ (1), 0.1 (2), 0.3 (3), 0.5 (4) for the exact solution (52) (solid line) and the approximate solutions (57) and (58) (dashed lines) (b)

$$\begin{aligned}
 \psi_1(x) &= 0,202578 - 0,9909x^2 - 0,0879527x^3 + 1,12283x^4 - 0,449132x^5, \\
 \psi_2(x) &= 0,0613579 - 1,90313x^2 + 3,99346x^3 - 2,29312x^4 + 0,199673x^5, \\
 \psi_3(x) &= 0,0070401 - 0,575705x^2 + 2,16202x^3 - 2,66732x^4 + 1,06693x^5.
 \end{aligned} \tag{58}$$

Результаты расчетов согласно формулам (52) и (57)–(58) представлены на рис. 4, b. Анализ температурных кривых позволяет заключить, что полученное решение для всего рассматриваемого временного диапазона условно совпадает с точным решением.

Во втором приближении ($k = 2$, $K = 2$, $N = 8$) на основе применения граничного условия второго рода и тождественных равенств последовательности (59) [6] приходим к следующей системе уравнений для коэффициентов $b_j, j = 2, 8$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 6 & 24 & 60 & 120 & 210 & 336 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 \\ 1/10 & 1/20 & 1/35 & 1/56 & 1/84 & 1/120 & 1/165 \\ 1/105 & 1/280 & 1/630 & 1/1260 & 1/2310 & 1/3960 & 1/6435 \\ 1/252 & 1/840 & 1/2310 & 1/5544 & 1/12012 & 1/24024 & 1/45045 \\ 1/495 & 1/1980 & 1/6435 & 1/18018 & 1/45045 & 1/102960 & 1/218790 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q \\ Q' \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{pmatrix}, \tag{59}$$

где

$$\begin{aligned}
 F_1 &= Q_1 - g, \quad F_2 = 6Q_2 - 6G_1 - g, \quad F_3 = 24Q_3 - 24G_2 - 4G_1 - g/5, \\
 F_4 &= 720G_4 - 720G_3 - 120G_2 - 6G_1 - g/7, \\
 F_5 &= 40320Q_5 - 40320G_4 - 6720G_3 - 336G_2 - 8G_1 - g/9.
 \end{aligned}$$

Решив систему уравнений (59) и далее применив соотношение (46), приходим к интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{59}{2304}g' + \frac{581}{32}g + \frac{992145}{256}G_1 + \frac{39804765}{128}G_2 + \frac{282206925}{32}G_3 + \frac{241215975}{4}G_4 = F(t), \tag{60}$$

где

$$F(t) = \frac{241215975}{4} Q_5 - \frac{39414375}{32} Q_4 + \frac{1756755}{128} Q_3 - \frac{28875}{256} Q_2 + \frac{805}{1024} Q_1 - \frac{21Q}{4096} + \frac{5Q'}{147456} - \frac{Q''}{4423680}. \quad (61)$$

В дальнейшем поступим аналогично рассмотренному выше варианту решения для первого приближения. Введя функцию $p = G_4$, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению пятого порядка

$$\frac{59}{2304} p^{(5)} + \frac{581}{32} p^{(4)} + \frac{992145}{256} p''' + \frac{39804765}{128} p'' + \frac{282206925}{32} p' + \frac{241215975}{4} p = F(t). \quad (62)$$

Запишем для (61) характеристическое уравнение

$$\frac{59}{2304} \mu^5 + \frac{581}{32} \mu^4 + \frac{992145}{256} \mu^3 + \frac{39804765}{128} \mu^2 + \frac{282206925}{32} \mu + \frac{241215975}{4} = 0. \quad (63)$$

Отсюда найдем приближенные собственные значения краевой задачи. Решение задачи Коши (62) с начальными условиями $p(t_1) = p'(t_1) = p''(t_1) = p'''(t_1) = p^{(4)}(t_1) = 0$ даст функцию $p(t)$ и в силу ее определения как $p = G_4$ – искомую функцию $g(t) = p^{(4)}(t)$. В частности, при $q(t) = 1$, в соответствии с найденным выше фронтом температурного возмущения (первая стадия процесса) $\delta(t) = 5,5797\sqrt{t}$, имеем $t_1 = 1/5,5797^2 = 0,0321$. Отсюда находим

$$g(t) = t - 1/6 + 0,202642e^{-9,8696t} - 0,0506451e^{-39,4778t} + 0,0237663e^{-90,0909t} - 0,0169175e^{-166,395t} - 11,2111e^{-403,184t}. \quad (64)$$

Первое собственное значение $\mu_1 = 9,869604378$ совпадает с точным значением $\mu_1^* = 9,8696044$ до седьмого знака после запятой. Для температурного профиля запишем окончательно

$$T(x, t) = \frac{1}{3} + t - x + \frac{x^2}{2} - \sum_{j=1}^5 \psi_j(x) e^{-\mu_j t}, \quad (65)$$

где собственные функции имеют вид:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= 0,020362 - 1,9618x^2 + 56,33x^4 - 199,121x^5 + 287,476x^6 - 191,166x^7 + 48,4393x^8, \\ \psi_2 &= 0,202642 - x^2 + 0,815818x^4 + 0,0362353x^5 - 0,35264x^6 + 0,09051x^7 + 0,00471x^8, \\ \psi_3 &= 0,050654 - 0,99691x^2 + 2,9683x^4 + 2,10174x^5 - 10,1624x^6 + 8,12774x^7 - 2,038x^8, \\ \psi_4 &= 0,023489 - 1,1219x^2 + 12,8563x^4 - 22,4347x^5 + 6,52215x^6 + 9,18808x^7 - 5,0571x^8, \\ \psi_5 &= -3,2886 + 524,712x^2 - 22288,4x^4 + 93654,7x^5 - 158917x^6 + 122992x^7 - 35950,9x^8. \end{aligned} \quad (66)$$

На рис. 5, а приведены графики температуры в центре симметрии пластины, рассчитанные на основе формул (52) и (65). Для диапазона времен $0,0321 \leq t < \infty$ наблюдаем исключительно точное слияние кривых $T(1, t)$ и $T^*(1, t)$. Это также подтверждает график отклонения $E_1 = T(1, y) - T^*(1, t)$. Для времен в диапазоне $0,0321 \leq t \leq 0,05$ порядок отклонения составляет $E_1 \sim 10^{-6}$ (рис. 5, б). При $t > 0,05$ можно с полным основанием записать: $T(1, y) \approx T^*(1, t)$ (рис. 6). При $t = 0,1$ для относительной аппроксимационной ошибки имеем $\varepsilon_T < 0,0002\%$.

Заключение. Представлен алгоритм нахождения приближенных решений краевых задач нестационарной теплопроводности с граничным условием второго рода, причем независимо от временной функции теплового потока. Результаты численного анализа полученных решений

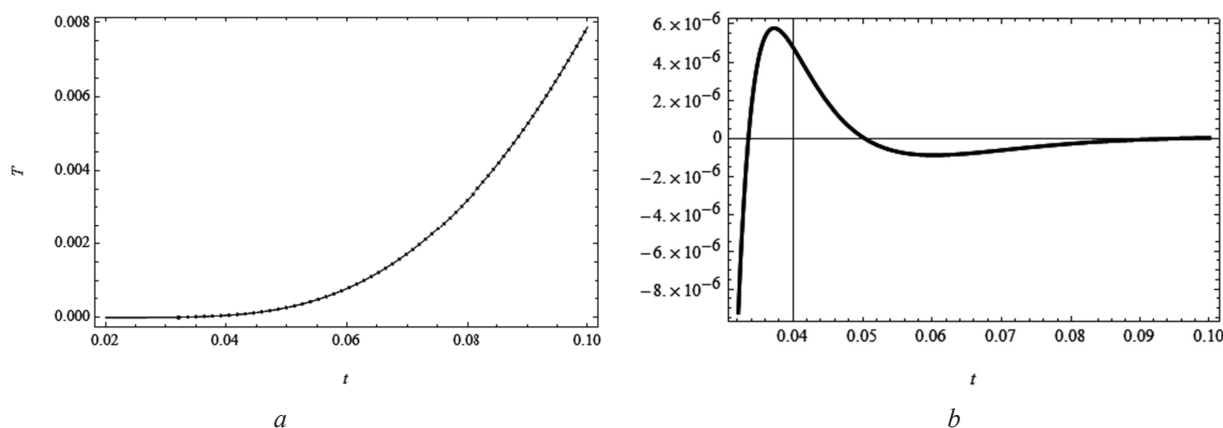


Рис. 5. Изменение во времени температуры в центре симметрии пластины для формул (52) (сплошная линия) и (65), (66) (пунктирная линия) (a); отклонение E_1 для ИМГХ для формул (65) и (66) (b)

Fig. 5. Time changes in the temperature at the center of the plate in accordance with (52) (solid line), (65) and (66) (dotted lines) (a); deviation E_1 for formulas (65) and (66) of the BChIM (b)

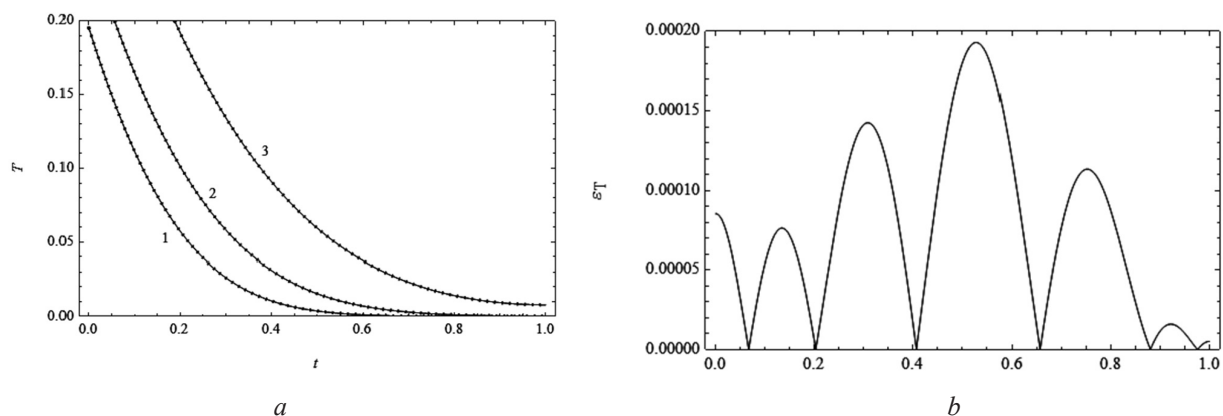


Рис. 6. Температурные профили в пластине при $t = 0,01$ по точному решению (52) (сплошные линии), решению на основе ИМГХ на основе (65), (66) (пунктирные линии) и МДГУ (штриховая линия) (a); отклонение E при $t = 0,03$ для МДГУ и ИМГХ (b)

Fig. 6. Temperature profiles in the plate at $t = 0.01$ in accordance with the exact solution (52) (solid line), solutions (65) and (66) by the BChIM (dotted lines), and the solution by the ABCM (dashed line) (a); deviation E at $t = 0.03$ for the ABCM and BChIM (b)

на основе ИМГХ позволяют их считать условно точными, поскольку относительная ошибка по сравнению с точным решением составляет ничтожно малые величины (тысячные-десятитысячные доли процента). С каждым последующим приближением посредством добавления в полином трех степеней аппроксимационная ошибка снижается примерно на порядок. По сравнению с методом дополнительных граничных условий предложенная схема расчета дает несопоставимо лучший результат.

Список использованных источников

1. Кот, В. А. Метод граничных характеристик в задачах теплопроводности на основе интеграла теплового баланса / В. А. Кот // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2016. – № 2. – С. 54–65.
2. Кот, В. А. Граничные характеристики в задачах теплопроводности. Анализ точности и сходимости решений / В. А. Кот // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2016. – № 3. – С. 60–70.
3. Кот, В. А. Метод граничных характеристик / В. А. Кот // Инженер.-физ. журн. – 2015. – Т. 88, № 6. – С. 1345–1363.
4. Кот, В. А. Граничные характеристики для обобщенного уравнения теплопроводности и их эквивалентные представления / В. А. Кот // Инженер.-физ. журн. – 2016. – Т. 89, № 4. – С. 983–1006.
5. Kot, V. A. Integral Method of Boundary Characteristics: The Dirichlet Condition. Principles / V. A. Kot // Heat Transfer Research. – 2016. – Vol. 47, № 10. – P. 927–944. – <https://doi.org/10.1615/heattransres.2016014882>
6. Кот, В. А. Интегральный метод решения задач теплопроводности с граничным условием второго рода. 1. Основные положения / В. А. Кот // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – Т. 63, № 2. – С. 201–213. <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2018-63-2-201-213>

7. Wood, A. S. A new look at the heat balance integral method / A. S. Wood // *Appl. Math. Model.* – 2001. – Vol. 25, iss. 10. – P. 815–824. – [https://doi.org/10.1016/s0307-904x\(01\)00016-6](https://doi.org/10.1016/s0307-904x(01)00016-6)
8. Лыков, А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М.: Энергия, 1978. – 600 с.
9. Carslow, H. S. *Conduction of Heat in Solids* / H. S. Carslow, J. C. Jaeger. – 2nd ed. – Oxford: Oxford Univ. Press, 1992. – 510 p.
10. Goodman, T. R. The heat-balance integral – further considerations and refinements / T. R. Goodman // *Journal of Heat Transfer.* – 1961. – Vol. 83, № 1. – P. 83–93.
11. Федоров, Ф. М. Граничный метод решения прикладных задач математической физики / Ф. М. Федоров. – Новосибирск: Наука, 2000. – 220 с.
12. Стефанюк, Е. В. Дополнительные граничные условия в нестационарных задачах теплопроводности / Е. В. Стефанюк, В. А. Кудинов // *Теплофизика высоких температур.* – 2009. – Т. 47, № 2. – С. 269–282.

References

1. Kot V. A. Method of boundary characteristics, based on the heat-balance integral, for heat-conduction problems. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2016, no. 2, pp. 54–65 (in Russian).
2. Kot V. A. Boundary characteristics in heat-conduction problems. Analysis of the accuracy and convergence of solutions. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2016, no. 3, pp. 60–70 (in Russian).
3. Kot V. A. Method of Boundary Characteristics. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2015, vol. 88, iss. 6, pp. 1390–1408. <http://dx.doi.org/10.1007/s10891-016-1377-9>
4. Kot V. A. Boundary Characteristics for the Generalized Heat-Conduction Equation and Their Equivalent Representations. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2016, vol. 89, iss. 4, pp. 985–1007. <http://dx.doi.org/10.1007/s10891-016-1461-1>
5. Kot V. A. Integral Method of Boundary Characteristics: The Dirichlet Condition. Principles. *Heat Transfer Research*, 2016, vol. 47, no. 10, pp. 927–944. <https://doi.org/10.1615/heattransres.2016014882>
6. Kot V. A. Integral method of solving heat-conduction problems with the second-kind boundary condition. 1. Basic statements. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2018, vol. 63, no. 2, pp. 201–213 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2018-63-2-201-213>
7. Wood A. S. A new look at the heat balance integral method. *Applied Mathematical Modelling*, 2001, vol. 25, iss. 10, pp. 815–824. [https://doi.org/10.1016/s0307-904x\(01\)00016-6](https://doi.org/10.1016/s0307-904x(01)00016-6)
8. Lykov A. V. *Heat-Conduction Theory*. Moscow, Energiya, 1978. 600 p. (in Russian).
9. Carslow H. S., Jaeger J. C. *Conduction of Heat in Solids*. 2nd ed. Oxford, Oxford University Press, 1992. 510 p.
10. Goodman T. R. The heat-balance integral – further considerations and refinements. *Journal of Heat Transfer.* 1961, vol. 83, no. 1, pp. 83–93.
11. Fedorov F. M. *Boundary Method of Solving Applied Problems of Mathematical Physics*. Novosibirsk, Nauka Publ., 2000. 220 p. (in Russian).
12. Stefanyuk E. V., Kudinov V. A. Additional boundary conditions in nonstationary problems of heat conduction. *High Temperature*, 2009, vol. 47, iss. 2, pp. 250–262. <https://doi.org/10.1134/S0018151X09020163>

Информация об авторе

Кот Валерий Андреевич – кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории турбулентности, Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси (ул. П. Бровки, 15, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: valery.kot@hmti.ac.by.

Information about the author

Valery A. Kot – Ph. D. (Engineering), Senior Researcher of the Laboratory of Turbulence, A. V. Luikov Institute of Heat and Mass Transfer of the National Academy of Sciences of Belarus (15, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: valery.kot@hmti.ac.by.