

МАШИНОСТРОЕНИЕ, МЕХАНИКА
MECHANICAL ENGINEERING, MECHANICS

УДК 621.77
<https://doi.org/10.29235/1561-8358-2018-63-4-416-423>

Поступила в редакцию 27.11.2017
Received 27.11.2017

Г. В. Кожевникова

Физико-технический институт Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ГИБКИ ЛИСТА МЕТОДОМ ПОЛЕЙ ЛИНИЙ СКОЛЬЖЕНИЯ

Аннотация. Одним из ограничений, налагаемых на процесс гибки листа, является возможность образования трещин на поверхности. Для прогнозирования данного вида разрушения металла необходима информация о пластических свойствах материала и напряженном состоянии в очаге деформации в процессе гибки. Приведено решение задачи гибки листа в условиях плоско-деформированного состояния на жесткой цилиндрической оправке методом графического построения поля линий скольжения. В качестве модели материала рассмотрено идеально-пластическое тело. Определены напряжения в очаге деформации и накопленные деформации. Процесс гибки квалифицирован как однонаправленный и монотонный. Установлено, что среднее напряжение на наружной поверхности листа при гибке равно 1 и не зависит от толщины листа и радиуса жесткой цилиндрической оправки. Осуществлена проверка точности графического решения. Полученное решение может быть положено в основу экспериментального метода испытания пластических свойств металлов.

Ключевые слова: пластическое деформирование, идеально-пластическое тело, напряженно-деформированное состояние, линии скольжения, пластичность

Для цитирования. Кожевникова, Г. В. Решение задачи гибки листа методом полей скольжения / Г. В. Кожевникова // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2018. – Т. 63, № 4. – С. 416–423. <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2018-63-4-416-423>

G. V. Kozhevnikova

Physical Technical Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

SOLUTION OF THE PROBLEM OF SHEET BENDING BY THE SLIP LINE FIELD METHOD

Abstract. One of the limitations imposed on this process of bending is the possibility of cracking on the surface of the sheet during bending. To predict this type of metal destruction, information is needed on the plastic properties of the material and the stress state in the deformation zone during the bending process. The solution of the problem of sheet bending under conditions of a flat-strained state by graphical construction of the slip line field using a rigid cylindrical mandrel has been analyzed. The material model is a perfectly plastic body. The stresses in the deformation zone and accumulated strains have been determined. The bending process is characterized as unidirectional and monotonous. It has been determined that the mean stress on the outer surface of the sheet during bending equals to 1, and it does not depend on the sheet thickness and the radius of the rigid cylindrical mandrel. Verification of the accuracy of the graphical solution is made. The resulting solution can be used as the basis for an experimental method for testing the plastic properties of metals.

Keywords: plastic straining, perfectly plastic body, stress-strain state, slip lines, plasticity

For citation. Kozhevnikova G. V. Solution of the problem of sheet bending by the slip line field method. *Vestsi Natsyonal'noi akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2018, vol. 63, no. 4, pp. 416–423 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2018-63-4-416-423>

Введение. Гибка листа является одной из распространенных промышленных технологий листовой штамповки. Одним из ограничений, налагаемых на этот процесс, выступает возможность образования трещин на поверхности листа при гибке. Для прогнозирования данного вида разру-

шения металла необходима информация о пластических свойствах материала и о напряженном состоянии в очаге деформации в процессе гибки.

В качестве одного из возможных методов решения задачи определения напряженного состояния в очаге деформации при гибке листа применяется метод графического построения поля линий скольжения.

Решение задачи. Указанная задача относится к одному из разделов теории пластического течения идеально-пластических материалов в условиях плоско-деформированного состояния. В ней рассматривается процесс деформации листа толщиной H неограниченной ширины при его гибке на жестком цилиндрическом инструменте радиусом R (рис. 1, a).

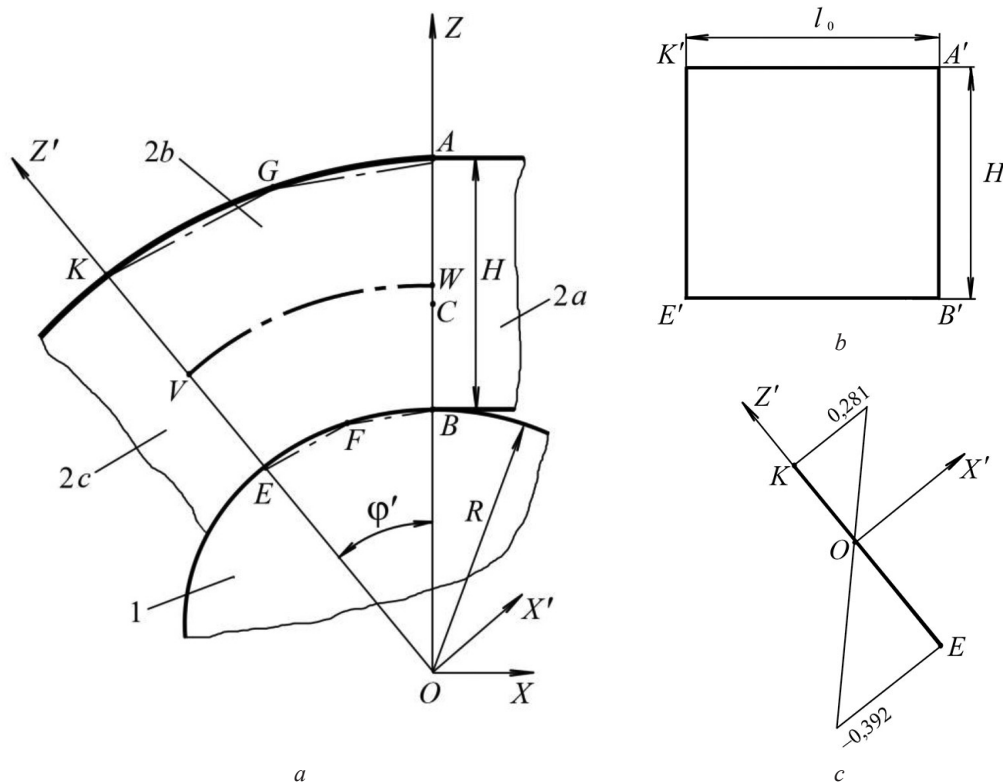


Рис. 1. Гибка листа в условиях плоско-деформированного состояния на жесткой цилиндрической оправке: схема (a), участок исходного материала (b), изменения деформаций $\epsilon_{x'}$ вдоль линии KE (c)

Fig. 1. The sheet bending under conditions of a flat-strained state using a rigid cylindrical mandrel: scheme (a), a section of the initial material (b), changes in strains $\epsilon_{x'}$ along the line KE (c)

Метод решения задачи – графическое построение полей линий скольжения [1, 2]. В задаче рассматривается стационарная стадия процесса гибки листа 2 (рис. 1, a) вокруг инструмента 1. В объеме листа можно выделить зону недеформированного (исходного) материала $2a$, зону деформации $2b$ $EKAB$ и жесткую зону $2c$ после деформации. Зона $2a$ постоянно огибает инструмент 1, а очаг деформации $EKAB$ постоянно смещается вправо, оставаясь неизменным в своих габаритах. Таким образом, рассматриваемый процесс гибки листа стационарен.

Толщина листа при входе в очаг деформации равна H . Из условия несжимаемости идеально-пластического тела и отсутствия течения материала в направлении оси OY (плоско-деформированное состояние) можно заключить, что площадь сечения очага деформации S_{EKAB} равна площади участка исходного материала $S_{E'K'A'B'}$ (рис. 1, b), или

$$S_{EKAB} = Hl_0, \tag{1}$$

где l_0 – длина участка исходного материала $E'K'A'B'$.

Отсюда может быть определена деформация $\varepsilon_{x'}$ в точке K :

$$\varepsilon_{x'} = \ln(l_{KA}/l_0), \quad (2)$$

где l_{KA} – длина части окружности KA .

$$l_{KA} = \frac{2\pi(R+H)\varphi'}{360^\circ}, \quad (3)$$

где φ' – угол, показанный на рис. 1, a , град.

На наружной поверхности очага деформации силы трения отсутствуют, следовательно, касательные напряжения $t_{xz} = t_{x'z'}$ равны нулю, а линия скольжения выходит на эту поверхность под углом 45° [3]. Главные нормальные напряжения направлены под углом 45° к линии скольжения, следовательно, в точке K нормальные напряжения $s_{x'}$ и $s_{z'}$ – главные. По условию подобия и коаксиальности девиатора напряжений и тензора скоростей деформаций [4] в точке K линейные деформации $\varepsilon_{x'}$ и $\varepsilon_{z'}$ также являются главными, то есть

$$\varepsilon_{x'} = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_{z'} = \varepsilon_3. \quad (4)$$

При плоско-деформированном состоянии

$$\varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_1 = -\varepsilon_3. \quad (5)$$

Используя формулы (2), (3), (5), определим линейную деформацию $\varepsilon_{z'}$ в точке K :

$$\varepsilon_{z'} = \varepsilon_3 = -\ln \frac{2\pi(R+H)\varphi'}{360^\circ \cdot l_0}. \quad (6)$$

Аналогично определим линейные деформации $\varepsilon_{x'}$ и $\varepsilon_{z'}$ в точке E при условии $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$:

$$\varepsilon_{z'} = \varepsilon_1 = -\ln \frac{2\pi \cdot R \cdot \varphi'}{360^\circ \cdot l_0}. \quad (7)$$

$$\varepsilon_{x'} = \varepsilon_3 = \ln \frac{2\pi \cdot R \cdot \varphi'}{360^\circ \cdot l_0}. \quad (8)$$

Согласно формуле (6), в точке K главные линейные деформации равны $\varepsilon_1 = -\varepsilon_3 = 0,281$.

В соответствии с формулами (7), (8) в точке E главные линейные деформации равны $\varepsilon_3 = -\varepsilon_1 = -0,392$.

Графически построенное поле линий скольжения показано на рис. 2. Геометрические параметры очага деформации приведены в табл. 1.

На рис. 1, c показано распределение главных линейных деформаций $\varepsilon_{x'}$ по линии KE , построенных с принятым допущением их линейной зависимости. В точке K линейная деформация растягивающая (положительная), в точке E она сжимающая (отрицательная). Нулевое значение эта деформация принимает на расстоянии $73 + 40,77 = 113,77$ мм от центра O (см. рис. 1, a). Длину части VW (см. рис. 1, a) окружности радиусом 113,77 мм можно рассчитать следующим образом: $l'_0 = (\pi \cdot 113,77 \cdot 40,0^\circ)/180^\circ = 79,39$ мм.

По сравнению с первоначально рассчитанной l_0 по формуле (1) ошибка составляет 5,1 %, что вполне допустимо для графического метода построения поля линий скольжения или принятого допущения о линейном законе изменения деформаций вдоль линии KE .

Отметим особенность линии VW . В очаге деформации по поверхности, которая образуется линией VW и ее продолжением вдоль оси OY , деформации отсутствуют: $\varepsilon_{x'} = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$. То есть исходный материал не претерпевает никаких деформаций. В области $VKAW$ главные линейные деформации вдоль осей OX и OX' растягивающие, а вдоль осей OZ и OZ' – сжимающие. В области $EVWB$ наблюдается обратное действие линейных деформаций: вдоль осей OX и OX' они сжимающие, а вдоль осей OZ и OZ' – растягивающие.

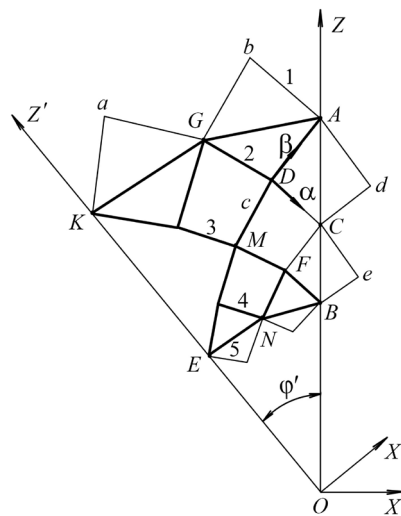


Рис. 2. Графически построенное поле линий скольжения
 Fig. 2. The graphically constructed slip line field

Таблица 1. Геометрические параметры очага деформации
 Table 1. The deformation zone geometry

$H, \text{ мм}$	$R, \text{ мм}$	$\varphi', \text{ }^\circ$	$l_{KA}, \text{ мм}$	$l_{EB}, \text{ мм}$	$S_{E KAB}, \text{ мм}^2$	$l_0, \text{ мм}$
70	73	40	99,78	50,94	5275,2	75,36

Отметим также особенность принятого допущения линейного закона изменения деформаций вдоль линии KE (см. рис. 1, c). На отрезке KV деформации сжимающие, на участке VE они растягивающие. Так как $VE > KV$, суммарная деформация линии KE должна быть растягивающей, а процесс – сопровождаться увеличением толщины листа. Если в процессе гибки лист сохраняет или уменьшает свою толщину, то это свидетельствует о нелинейной зависимости деформаций вдоль линии KE .

Графическое построение поля линий скольжения начнем с вычерчивания двух прямолинейных треугольников ACD и CBF (см. рис. 2), которые являются полуячейками поля линий скольжения, линии AD и FC – β -линии скольжения поля, линии DC и FB – α -линии скольжения поля. Отрезок AC устанавливаем больше отрезка CB , что соответствует закономерностям искомого поля линий скольжения. Для поля линий скольжения (см. рис. 2) отношение AC/CB установлено 40/30. Поскольку β -линии скольжения при нулевом трении выходят на наружную поверхность под углом 45° , угол DAC равен $45^\circ - \Delta\varphi/2$. α -Линии и β -линии скольжения пересекаются под прямым углом, следовательно, углы DCA , FCB и FBC равны $45^\circ - \Delta\varphi/2$ (по правилам графического построения линий скольжения, где $\Delta\varphi$ – шаг поля линий скольжения).

Особенность графического построения поля линий скольжения заключается в замене отрезков линий скольжения ячеек поля прямыми линиями (хордами), при этом угол между линиями двух соседних ячеек равен шагу поля линий скольжения $\Delta\varphi$. В случае, когда стыкуются хорда и истинная линия скольжения, угол составляет $\Delta\varphi/2$, как в случае с углами DAC , DCA , FCB и FBC .

С учетом этой закономерности построено искомое поле линий скольжения с шагом $\Delta\varphi = 10^\circ$ (см. рис. 2).

Напряжения в узлах поля линий скольжения рассчитываются по формулам Леви [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma - K \sin 2\alpha, \text{ МПа}; \\ \sigma_z &= \sigma + K \sin 2\alpha, \text{ МПа}; \\ \tau_{xz} &= K \cos 2\alpha, \text{ МПа}, \end{aligned} \tag{9}$$

где σ – среднее нормальное напряжение, МПа; K – пластическая постоянная материала, МПа; α – угол поворота оси OX против часовой стрелки до совмещения с α -линией скольжения, град.

Правильность выбора направления α -линий и β -линий скольжения проверяется условием, что главное нормальное напряжение σ_1 лежит в I и III квадрантах, образованных α -линиями и β -линиями скольжения. Следовательно, в точке A главное нормальное напряжение s_1 должно быть направлено в сторону оси OX . Главные нормальные напряжения направлены под углом 45° к линии скольжения, то есть σ_x в точке A является главным нормальным напряжением, так же как и σ_y . В теории пластического течения принято, что $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, сжимающие напряжения являются отрицательными, а растягивающие – положительными [5]. В точке A α -линия скольжения с осью OX составляет угол -45° , нормальные напряжения равны:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma - K \sin(-90^\circ) = \sigma + K, \text{ МПа;} \\ \sigma_z &= \sigma + K \sin(-90^\circ) = \sigma - K, \text{ МПа.}\end{aligned}\quad (10)$$

Следовательно, $\sigma_x > \sigma_z$ и $\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_3 = \sigma_z$. Таким образом, выбор направления линий скольжения сделан правильно.

В точке A (см. рис. 2) напряжение s_z направлено перпендикулярно свободной поверхности, следовательно, оно равно 0. Отсюда может быть определено среднее нормальное напряжение в точке A : $\sigma = K$ и $\sigma_x = 2K$.

Отметим важную закономерность нашего решения: в точке A при любом соотношении H/R и любой толщине листа H среднее напряжение σ/K всегда будет равно 1.

Среднее напряжение в узлах поля линий скольжения определяется формулой Генки [5]:

$$\begin{aligned}\sigma + 2K\varphi &= \text{const} && \text{вдоль } \alpha\text{-линии скольжения;} \\ \sigma - 2K\varphi &= \text{const} && \text{вдоль } \beta\text{-линии скольжения,}\end{aligned}\quad (11)$$

где φ – угол поворота α -линий скольжения и β -линий скольжения, рад.

Распределение среднего напряжения s/K в очаге деформации, подсчитанного по формулам (11), показано на рис. 3, *a*.

При плоско-деформированном состоянии $\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$. Значения остальных компонент напряженного состояния в очаге деформации показаны в табл. 2.

Отметим некоторые закономерности нашего решения. Вдоль наружной поверхности KGA (рис. 3, *a*) среднее напряжение σ/K растягивающее и равно 1 вне зависимости от толщины листа H и радиуса жесткого инструмента R . От наружной поверхности к инструменту среднее напряжение σ/K уменьшается и становится сжимающим на контакте с инструментом, где возникают силы трения, которые направлены в сторону выхода из очага деформации (рис. 3, *b*).

Проверка точности графического решения. На наружной поверхности KGA нормальное напряжение, перпендикулярное поверхности, должно быть равно нулю. В точках A , G , K это условие выполняется точно. Силы трения по наружной поверхности должны быть равны нулю, а α -линия скольжения – выходить на поверхность под углом 45° . В точках A и K это условие выполняется точно, в точке G ошибка составляет 3,8 %.

Моменты сил, действующих на очаг деформации при отсечении жестких областей образца слева $M_{\text{лев.}}$ и справа $M_{\text{прав.}}$ от очага деформации, должны быть равны. С учетом действия напряжений σ_x , σ_y , τ_{xz} и $\tau_{x'z'}$ (в том числе на контактной поверхности), помноженных на размер части очага деформации и на радиус от точки O до места приложения равнодействующей, определена ошибка уравнения

$$M_{\text{лев.}} = M_{\text{прав.}} \quad (12)$$

Согласно данным табл. 3 и 4 ошибка равна $(10779,9 - 10561,2)/10779,9 = 2\%$.

В итоге ошибки решения составили в пяти случаях 0 % и в двух 2,0 % и 3,8 %, что является хорошим результатом графического поля линий скольжения.

Т а б л и ц а 2. Компоненты напряженного состояния в узлах поля линий скольжения и угол наклона α -линии скольжения к оси OX

Table 2. The components of the stress state at the nodes of the slip line field and the slope angle of the α -slip line towards the OX axis

Узлы поля линий скольжения	$\varphi, ^\circ$	$\varphi', ^\circ$	σ/K	σ_x/K	σ_z/K	τ_{xz}/K
a3	-85	40,0	1,00	2,00	0	0
b3	-75	28,8	0,65	1,64	0,35	-0,04
b2	-65	18,3	1,00	2,00	0	-0,06
c5	-85	40,0	-0,40	0,60	-1,40	0
c4	-75	28,8	-0,05	0,95	-1,05	-0,04
c3	-65	18,3	0,30	1,30	-0,70	-0,06
c2	-55	9,5	0,65	1,65	-0,35	-0,02
c1	-45	0	1,00	2,00	0	0
d4	-65	18,3	-0,40	0,60	-1,40	-0,06
d3	-55	9,5	-0,05	0,95	-1,05	-0,02
d2	-45	0	-	-	-	-
e3	-45	0	-0,40	0,60	-1,40	0

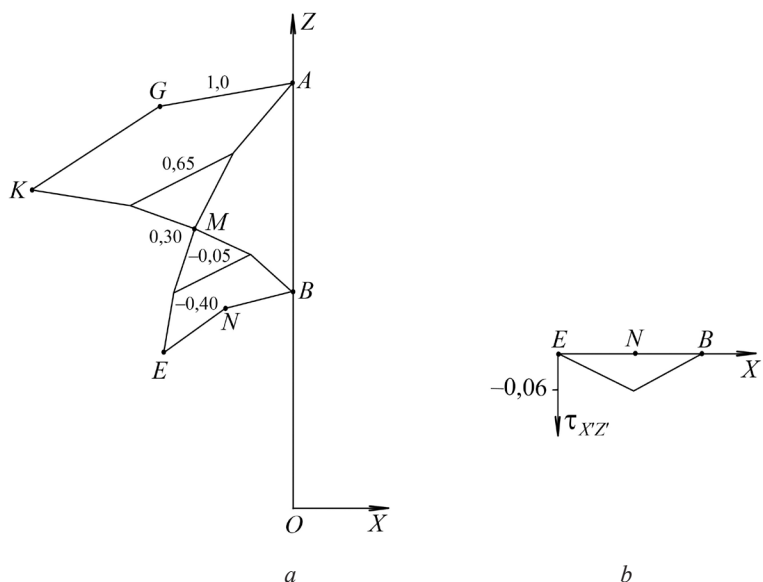


Рис. 3. Распределение среднего напряжения s/K в очаге деформации (a) и силы трения на участке EB (b)
 Fig. 3. The distribution of the mean stress s/K in the deformation zone (a) and the friction force at the section EB (b)

Т а б л и ц а 3. Расчет момента сил $M_{\text{прав.}}$
 Table 3. Calculation of the moment of force M_{right}

Узлы поля линий скольжения	σ_x/K	τ_{xz}/K	$R, \text{ мм}$	$R_{\text{сп}}, \text{ мм}$	$M_{\text{прав.}}, \text{ мм}^2$	$H, \text{ мм}$	$M'_{\text{прав.}}, \text{ мм}^2$
c1	2,00	0	142	131	5259,7	21	-27,5
c2	1,65	-0,02	120		110	3245,0	19
c3	1,30	-0,06	100	93	1464,8	17	-63,2
d3	0,95	-0,02	86	79,5	801,0	11	-35,0
d4	0,60	-0,06	73				

$M_{\text{прав.}} = 5259,7 + 3245,0 + 1464,8 + 801,0 - 27,5 - 83,6 - 63,2 - 35,0 = 10561,2 \text{ мм}^2$

Т а б л и ц а 4. Расчет момента сил $M_{лев}$.
 T a b l e 4. Calculation of the moment of force M_{left}

Узлы поля линий скольжения (рис. 2)	σ_x/K	τ_{xz}/K	R_r , мм	R_{cp} , мм	$M_{лев}$, мм ²	H , мм	$M'_{лев}$, мм ²
a3	2,00	0	138	126	5503,7	24	60,5
b3	1,64	-0,04	114				
c3	1,30	-0,07	100	107	2202,0	18	105,9
c4	0,95	-0,04	82	91	1842,8	15	75,1
c5	0,60	0	67	74,5	866,1	14	20,9
$M_{лев} = 5503,7 + 2202,0 + 1842,8 + 866,1 + 60,5 + 105,9 + 75,1 + 20,9 + 0,03 \cdot 73 \cdot 47 = 10779,9 \text{ мм}^2$							

Заключение. Впервые получено решение задачи гибки листа методом графического построения поля линий скольжения. Установлено, что вне зависимости от толщины листа и радиуса жесткого инструмента на всей наружной поверхности листа при гибке действует среднее напряжение, равное $\sigma/K = 1$. Среднее напряжение σ/K уменьшается от наружной поверхности в направлении жесткого инструмента и на контакте с инструментом становится сжимающим. Точность решения составляет от 0 до 3,8 %, что вполне допустимо при графическом построении полей линий скольжения.

Полученное решение может быть положено в основу экспериментального метода испытания пластических свойств металлов путем гибки листа [6]. Процесс гибки – стационарный процесс. Поскольку линии скольжения в очаге деформации составляют постоянный угол наклона к материальным частицам металла, то процесс испытания может быть квалифицирован как односторонний монотонный. Разрушение при гибке будет начинаться на наружной поверхности, так как здесь действуют максимальные и постоянные растягивающие напряжения: $s/K = 1$. Третий инвариант девиатора напряжений [7] также постоянен и равен нулю $\sqrt[3]{J_3(D_\sigma)} / K = 0$ вследствие плоско-деформированного состояния. Накопленные деформации определяются формулой (7).

Список использованных источников

1. Кожевникова, Г. В. Теория и практика поперечно-клиновой прокатки / Г. В. Кожевникова. – Минск: Беларуская навука, 2010. – 291 с.
2. Кожевникова, Г. В. Построение эпюр контактных напряжений на границе инструмент–заготовка при поперечной прокатке / Г. В. Кожевникова // Трение и износ. – 2005. – Т. 26, № 1. – С. 94–99.
3. Кожевникова, Г. В. Самоустановление сил трения при поперечной прокатке / Г. В. Кожевникова // Трение и износ. – 2016. – Т. 37, № 4. – С. 421–426.
4. Kozhevnikova, G. Cross-wedge rolling / G. Kozhevnikova. – Minsk: Belorusskaya nauka, 2012. – 321 p.
5. Теоретические основыковки и горячей объемной штамповки / Е. М. Макушок [и др.]. – Минск: Наука и техника, 1968. – 408 с.
6. Shchukin, V. Y. Cross-wedge rolling at PTI NAS Belarus / V. Y. Shchukin, G. V. Kozhevnikova, V. V. Petrenko // Appl. Mech. Mater. – 2012. – Vol. 201–202. – P. 1198–1202. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.201-202.1198>
7. Кожевникова, Г. В. Исследование кинематики течения металла при поперечно-клиновой прокатке с использованием компьютерного моделирования / Г. В. Кожевникова // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2013. – № 1. – С. 47–53.

References

1. Kozhevnikova G. V. *Theory and Practice of Cross-Wedge Rolling*. Minsk, Belorusskaya nauka Publ., 2010. 291 p. (in Russian).

2. Kozhevnikova G. V. Plotting the contact stress epures at the interface between the tool and workpiece during cross rolling. *Trenie i iznos = Journal of Friction and Wear*, 2005, vol. 26, no. 1, pp. 94–99 (in Russian).
3. Kozhevnikova G. V. Self-setting of forces of friction during cross rolling. *Journal of Friction and Wear*, 2016. vol. 37, no. 4, pp. 324–329. <https://doi.org/10.3103/S1068366616040073>
4. Kozhevnikova G. *Cross-Wedge Rolling*. Minsk, Belorusskaya nauka Publ., 2012. 321 p.
5. Makushok E. M., Matusевич A. S., Severdenko V. P., Segal V. M. *Theoretical Foundations of Forging and Hot Forging*. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1968. 408 p. (in Russian).
6. Shchukin V. Y., Kozhevnikova G. V., Petrenko V. V. Cross-wedge rolling at PTI NAS Belarus. *Applied Mechanics and Materials*, 2012, vol. 201–202, pp. 1198–1202. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.201-202.1198>
7. Kozhevnikova G. V. Analysis of metal flow kinematics under cross-wedge rolling using computer simulation. *Vesti Natsyonal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2013, no. 1, pp. 47–53 (in Russian).

Информация об авторе

Кожевникова Гражина Валерьевна – доктор технических наук, главный научный сотрудник лаборатории предельной деформируемости и поперечно-клиновой прокатки, Физико-технический институт Национальной академии наук Беларуси (ул. Купревича, 10, 220141, Минск, Республика Беларусь). E-mail: fti@tut.by

Information about the author

Grazhina V. Kozhevnikova – D. Sc. (Engineering), Chief Researcher of the Laboratory of Extreme Deformability and Cross-Wedge Rolling, Physical-Technical Institute of the National Academy of Sciences of Belarus (10, Kuprevich Str., 220141, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: fti@tut.by