

ISSN 1561-8358 (Print)
ISSN 2524-244X (Online)

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И СИСТЕМЫ
INFORMATION TECHNOLOGIES AND SYSTEMS

УДК 536.75
<https://doi.org/10.29235/1561-8358-2018-63-4-501-512>

Поступила в редакцию 17.05.2018
Received 17.05.2018

А. М. Крот, В. А. Сычѳв

*Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси,
Минск, Беларусь*

**АНАЛИЗ ХАОТИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СХЕМЫ ЧЖУА
С ГЛАДКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ НА ОСНОВЕ МЕТОДА МАТРИЧНОЙ
ДЕКОМПОЗИЦИИ**

Аннотация. Проведен анализ схемы Чжуа с гладкой нелинейностью с применением метода матричной декомпозиции А. М. Крота. Получено разложение в матричный ряд системы уравнений Чжуа, в результате чего найдены линейное, квадратичное и кубическое матричные ядра. На основе данного разложения разработана имитационная модель электронной схемы, реализующей схему Чжуа с гладкой нелинейностью, и построены аттракторы для хаотического режима работы данной схемы. Предложенная схемотехническая реализация позволяет учитывать раздельное влияние нелинейностей высших порядков на процесс формирования хаотического режима функционирования схемы Чжуа. Это дает возможность провести серию экспериментов по исследованию модели, не реализуемых на обычной схеме Чжуа. В ходе экспериментов была обнаружена значительная корреляция между выходными сигналами кубического и квадратичного членов матричного ряда при хаотическом режиме работы схемы. Применение матричной декомпозиции в сочетании с вычислительным экспериментом позволило выявить, что модель Л. Д. Ландау начальной турбулентности (после срыва стационарного режима) достаточно хорошо описывает процесс возникновения хаотических режимов в схеме Чжуа. В частности показано, что режим жесткого самовозбуждения электрических колебаний в схеме Чжуа приводит к появлению хаотического аттрактора типа «двойной завиток» в пространстве состояний. Полученные результаты могут найти применение в задачах генерирования хаотических сигналов, в частности для решения проблем криптографии или управления мобильными роботами, а также для предотвращения возникновения хаотических режимов в работе электронных и механических устройств.

Ключевые слова: нелинейная динамическая система, схема Чжуа, хаотический аттрактор, матричный ряд в пространстве состояний, матричная декомпозиция схемы Чжуа, режим жесткого самовозбуждения электрических колебаний

Для цитирования. Крот, А. М. Анализ хаотических режимов функционирования схемы Чжуа с гладкой нелинейностью на основе метода матричной декомпозиции / А. М. Крот, В. А. Сычѳв // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2018. – Т. 63, № 4. – С. 501–512. <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2018-63-4-501-512>

A. M. Krot, U. A. Sychou

United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

**THE ANALYSIS OF CHAOTIC REGIMES IN CHUA'S CIRCUIT WITH SMOOTH NONLINEARITY
BASED ON THE MATRIX DECOMPOSITION METHOD**

Abstract. The scope of this work are electric circuits or electronic devices with chaotic regimes, in particular the Chua's circuit. A nonlinear analysis of chaotic attractors based on the Krot's method of matrix decomposition of vector functions in state-space of complex systems has been used to investigate the Chua's circuit with smooth nonlinearity. It includes an analysis of linear term of the matrix series as well as an estimation of influence of high order terms of this series on stability of complex system under investigation. Here the method of matrix decomposition has been applied to analysis of the Chua's attractor. The terms of matrix series have been used to create a simulation model and to reconstruct an attractor of chaotic modes. The proposed simulation model makes it possible to separate an influence of nonlinearities on forming a chaotic regime of the Chua's circuit. Usage of both the matrix decomposition method and computational experiment has allowed us to find out that the initial turbulence model proposed by L. D. Landau is suitable for set-up description of the chaotic regime of the Chua's circuit. It is shown that a mode of hard self-excitation in the Chua's circuit leads to its chaotic regime operating with a double-scroll attractor in the state-space. The results might be used to generate of chaotic oscillations or data encryption.

Keywords: nonlinear dynamical system, Chua's circuit, chaotic attractor, matrix series in state-space, matrix decomposition of Chua's circuit

For citation. Krot A. M., Sychou U. A. The analysis of chaotic regimes in Chua's circuit with smooth nonlinearity based on the matrix decomposition method. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2018, vol. 63, no. 4, pp. 501–512 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2018-63-4-501-512>

Введение. В работах [1–10] разработан метод анализа аттракторов сложных нелинейных динамических систем (НДС) на основе матричного ряда в пространстве состояний и рассмотрены многочисленные примеры применения данного метода для анализа нелинейных динамических систем. В их числе дискретные и непрерывные НДС, в том числе искусственные нейронные сети. Однако до настоящего времени теория матричной декомпозиции не применялась для исследования электрических цепей и электронных схем. В данной работе будет проведен анализ методом матричной декомпозиции системы уравнений, описывающих схему Чжуа. В [11] описывается данная схема, в том числе и система уравнений, лежащая в ее основе, а также дается вывод данной системы уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha(y - x - h(x)); \\ \frac{dy}{dt} &= x - y + z; \\ \frac{dz}{dt} &= -\beta y,\end{aligned}\tag{1}$$

где

$$h(x) = m_1 x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|).\tag{2}$$

Известно, что *хаотическая динамика* наблюдается при следующих значениях параметров:

$$\alpha = 15,6; \beta = 28; m_0 = -1,143; m_1 = -0,714.\tag{3}$$

График функции $h(x)$ при значениях управляющих параметров (3) на рис. 1 иллюстрирует зависимость напряжения V_{C1} на конденсаторе $C1$ в схеме Чжуа (рис. 1, *b*) от тока I_g , протекающего через резистор G .

Основным элементом схемы Чжуа является диод Чжуа, который представляет собой схемотехническую реализацию кусочно-линейной функции (2). Существует множество вариантов реализации схемы Чжуа и отдельных ее элементов. В частности, помимо кусочно-линейной характеристики нелинейного элемента для схемы Чжуа, в [12–17] описан элемент с гладкой нелинейностью. Данный элемент реализует функцию вида $p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$.

Гладкая нелинейность в схеме Чжуа имеет ряд преимуществ над кусочно-линейной. Во-первых, она позволяет реализовать режимы работы схемы, недостижимые при кусочно-линейной характеристике. Во-вторых, она точнее описывает реальную электронную схему диода Чжуа, так как точное повторение кусочно-линейной характеристики затруднительно на аналоговой элементной базе. Таким образом, гладкая нелинейность открывает дополнительные возможности для исследования схемы Чжуа. Для применения метода матричной декомпозиции к (1), (2) целесообразно использовать именно гладкую нелинейность.

Анализ схемы Чжуа с гладкой нелинейностью методом матричной декомпозиции. Перепишем систему уравнений Чжуа (1) в новых обозначениях:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \alpha u_2 - \alpha u_1^3 - C \alpha u_1; \\ \dot{u}_2 = u_1 - u_2 + u_3; \\ \dot{u}_3 = -\beta u_2. \end{cases}\tag{4}$$

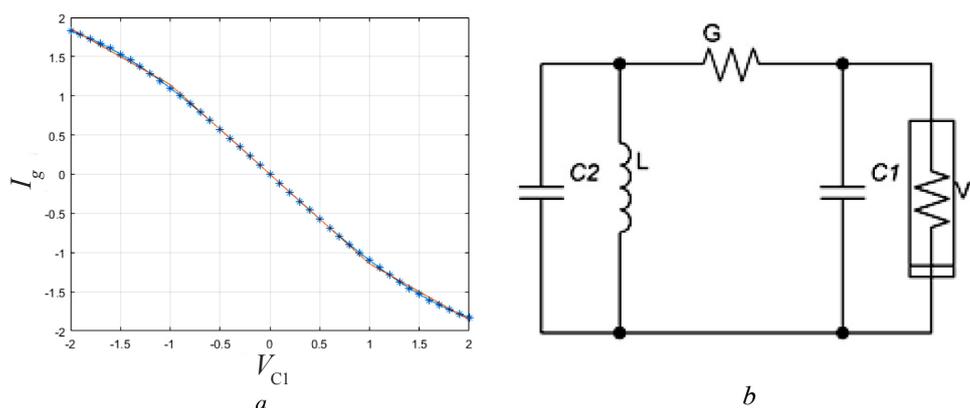


Рис. 1. Исходные данные: *a* – график функции $h(x)$ (красный цвет) в сравнении с характеристикой модели диода Чжуа (синий цвет, маркер «*»); *b* – схема Чжуа

Fig. 1. The initial conditions: *a* – the graph of the function $h(x)$ (red color) in comparison to the characteristic of the Chua’s diode (in blue, marker “*”); *b* – Chua’s circuit

Проведем анализ системы уравнений (4) методом матричной декомпозиции [1–10]. С учетом матричных обозначений система уравнений (4) может быть представлена посредством следующих векторных функций:

$$\dot{\vec{u}} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix}; \quad \vec{f}(\vec{u}, \vec{u}^*) = \begin{bmatrix} \alpha u_2 - A\alpha u_1^3 - C\alpha u_1 \\ u_1 - u_2 + u_3 \\ -\beta u_2 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Согласно [6] исследуем, как данная векторная функция \vec{f} зависит от рассматриваемых переменных

$$u_i = u_i^* + v_i, i = 1, 2, 3 \tag{6}$$

при воздействии малых возмущений v_i таких, что $|v_i| \ll |u_i|$, причем в (6) $u_i^* = u_i^*(t)$ рассматривается как невозмущенное решение системы уравнений (4), то есть как стандартное состояние НДС.

Учитывая (6), найдем приращение векторной функции (5) в виде

$$\Delta \dot{\vec{u}} = \Delta \vec{f},$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \vec{f}(\vec{v}, \vec{u}^*) &= \vec{f}(\vec{u}^* + \vec{v}) - \vec{f}(\vec{u}^*) = \begin{bmatrix} \alpha u_2^* + \alpha v_2 - A\alpha(u_1^* + v_1)^3 - C\alpha u_1^* - C\alpha v_1 \\ u_1^* + v_1 - u_2^* - v_2 + u_3^* + v_3 \\ -\beta u_2^* - \beta v_2 \end{bmatrix} - \\ &= \begin{bmatrix} \alpha u_2^* - A\alpha u_1^{*3} - C\alpha u_1^* \\ u_1^* - u_2^* + u_3^* \\ -\beta u_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha v_2 - A\alpha(u_1^* + v_1)^3 - C\alpha v_1 + A\alpha u_1^{*3} \\ v_1 - v_2 + v_3 \\ -\beta v_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \alpha v_2 - (3A\alpha u_1^{*2} + C\alpha)v_1 - 3A\alpha u_1^* v_1^2 - A\alpha v_1^3 \\ v_1 - v_2 + v_3 \\ -\beta v_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{7}$$

Таким образом, приращение векторной функции (7) может быть точно восстановлено на основе только линейного, квадратичного и кубического членов матричного ряда:

$$\Delta \vec{f}(\vec{v}, \vec{u}^*) = L_{3 \times 3}^{(1)} \vec{v} + \frac{1}{2!} L_{3 \times 9}^{(2)} (\vec{v} \otimes \vec{v}) + \frac{1}{3!} L_{3 \times 27}^{(3)} (\vec{u}^*) (\vec{v} \otimes \vec{v} \otimes \vec{v}) =$$

$$= \begin{bmatrix} -(3A\alpha u_1^{*2} + C\alpha)v_1 + \alpha v_2 \\ v_1 - v_2 + v_3 \\ -\beta v_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -6A\alpha u_1^* v_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -6A\alpha v_1^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Кроме того, в аппроксимации системы участвует только величина u_1^* , как видно из (11). Данный факт имеет важное теоретическое и практическое значение. С одной стороны, можно сказать, что динамика рассматриваемой системы главным образом определяется поведением переменной u_1 . В то же время величина u_1^* может рассматриваться как некий «управляющий параметр» системы наряду с параметрами α, β, A, C . Исключение величин u_2^* и u_3^* снижает число возможных комбинаций значимых параметров и тем самым упрощает анализ системы.

Синтез и исследование компьютерной модели электрической схемы. Исследуем Simulink-модель¹, реализующую систему уравнений (11), которая была получена методом матричной декомпозиции (рис. 2).

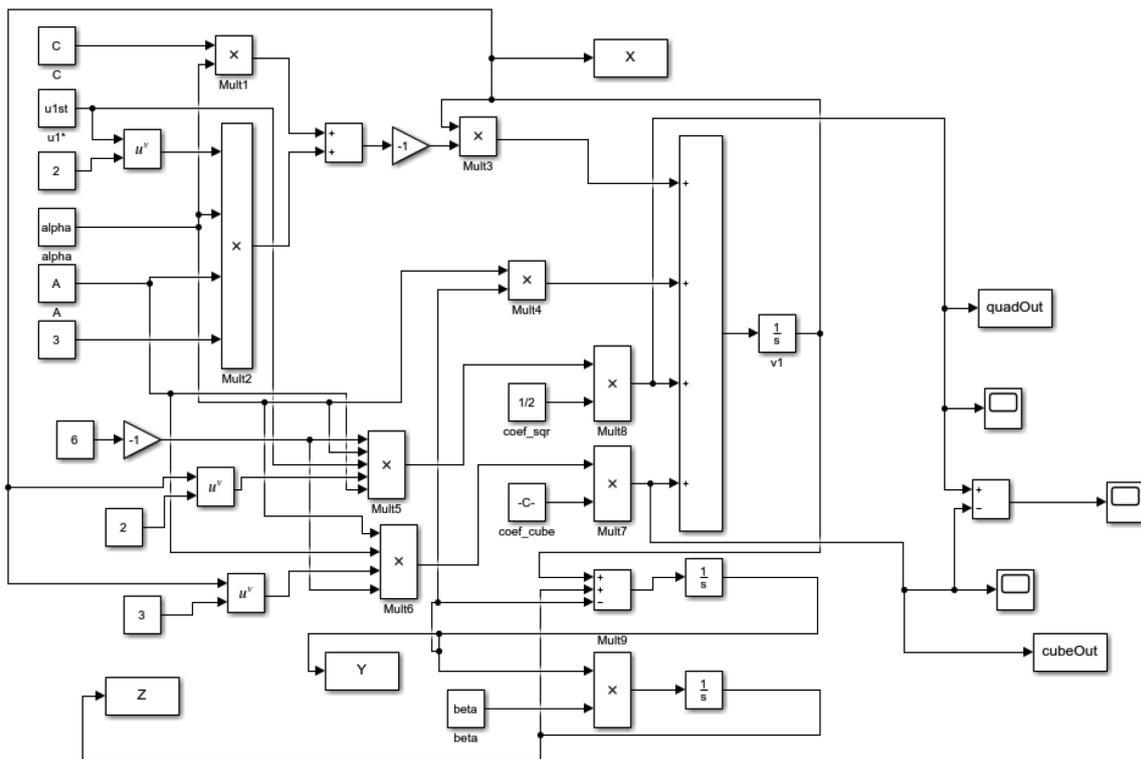


Рис. 2. Simulink-модель системы уравнений (11)
 Fig. 2. Simulink-model for system of equations (11)

Вычислительные эксперименты проводились при двух наборах параметров (см. подписи к рис. 3 и 4). В обоих случаях наблюдался хаотический аттрактор типа «двойной завиток», показанный на рис. 3. Однако динамика системы различалась, как видно из графиков на рис. 4. Экспериментальное исследование показывает существенное влияние величины u_1^* на динамику системы.

¹ Здесь в блок-схеме модели и далее на графиках, иллюстрирующих результаты моделирования, с целью упрощения обозначений использовались переменные X, Y, Z вместо переменных v_1, v_2, v_3 соответственно.

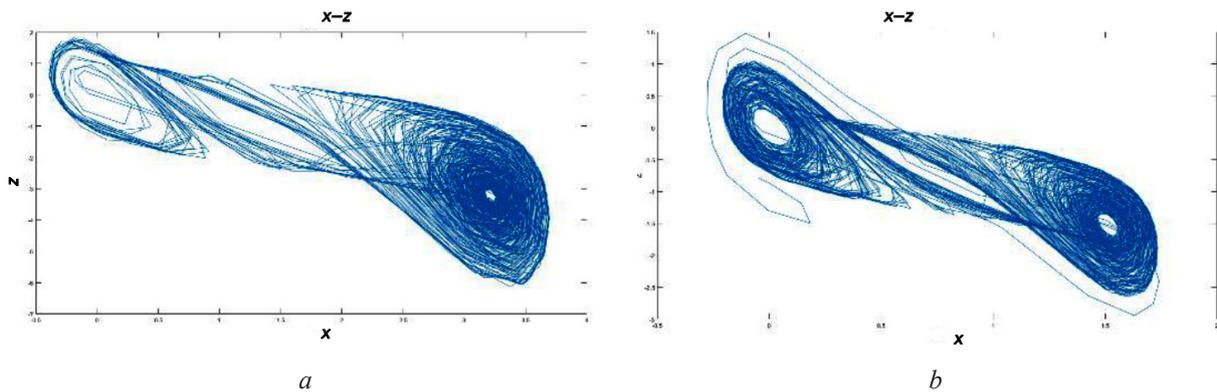


Рис. 3. Примеры хаотического аттрактора (оси $X-Z$), реконструированные по 500 итерациям, для наборов параметров: $a - A = 0,1240, C = -0,3243, u_1^* = -1,5$; $b - A = 0,5131, C = -0,2955, u_1^* = -0,75$

Fig. 3. Examples of the chaotic attractor (axes $X-Z$), obtained during 500 iterations for parameters sets: $a - A = 0.1240, C = -0.3243, u_1^* = -1.5$; $b - A = 0.5131, C = -0.2955, u_1^* = -0.75$

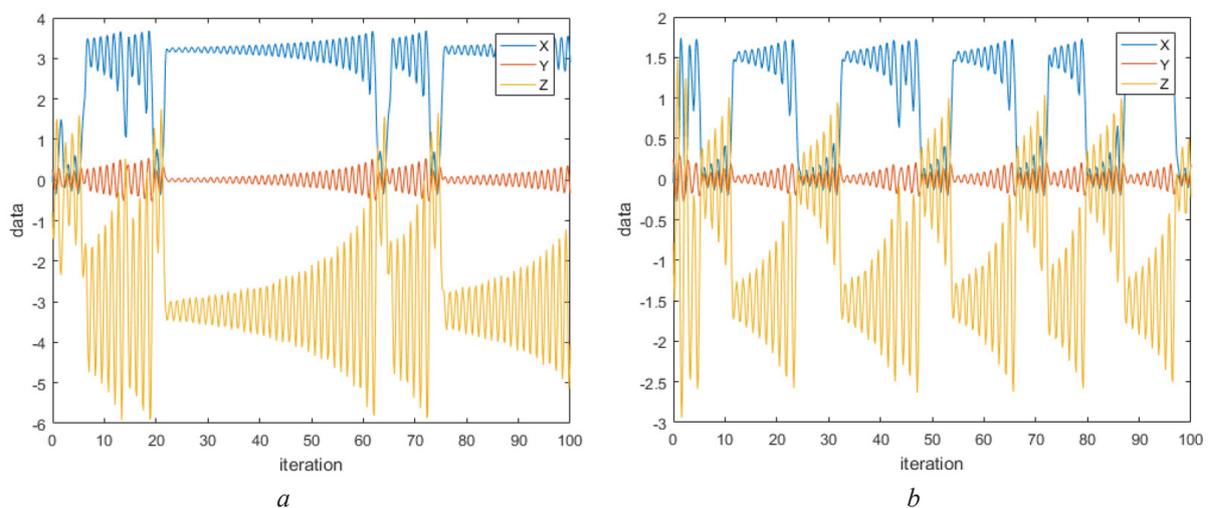


Рис. 4. Графики переменных X, Y, Z , реконструированные по 100 итерациям, для наборов параметров: $a - A = 0,1240, C = -0,3243, u_1^* = -1,5$; $b - A = 0,5131, C = -0,2955, u_1^* = -0,75$

Fig. 4. Graphs of variables X, Y, Z obtained during 100 iterations for different sets of parameters: $a - A = 0.1240, C = -0.3243, u_1^* = -1.5$; $b - A = 0.5131, C = -0.2955, u_1^* = -0.75$

Результаты компьютерного моделирования на рис. 4 показывают, что применение метода матричной декомпозиции к сложным НДС позволяет получить новые данные об их динамике (в частности, определена зависимость от величины u_1^*), а также оценить степень влияния нелинейностей высших порядков на хаотический режим функционирования схемы, что предоставит возможность разработать новые модификации электронных схем с хаотическими режимами работы.

Действительно, основное предназначение метода матричной декомпозиции состоит в реализации нелинейного анализа сложных динамических систем для оценки влияния ядер $L_{N \times N}^{(1)}, L_{N \times N^2}^{(2)}, L_{N \times N^3}^{(3)} \dots$ на динамику функционирования схемы. В частности, одно или несколько ядер могут быть исключены из Simulink-модели. В качестве примера рассмотрим варианты работы схемы Чжуа, при которых отключено только квадратичное ядро (рис. 5, *a*), а также кубическое вместе с квадратичным ядра (рис. 5, *b*).

Также интерес представляет исследование сигналов на выходах кубического и квадратичного ядер в различных режимах работы схемы. Для двух указанных выше наборов экспериментальных данных (см. рис. 3 и 4) получены графики, показанные на рис. 6. Обращает на себя внимание факт наличия корреляции между сигналами с выходов двух ядер, близкой к -1 . Коэффициент линейной корреляции был измерен с помощью функции *corr()* системы Matlab r2018a

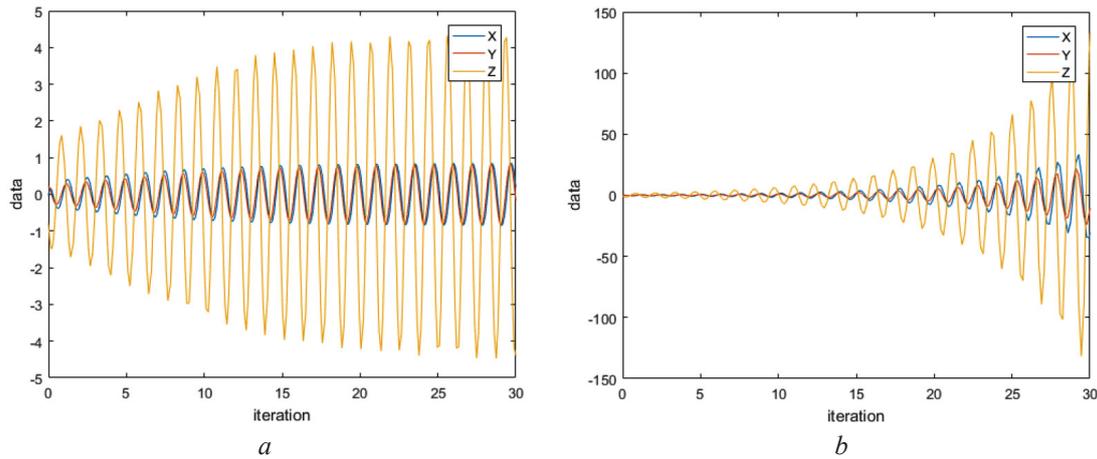


Рис. 5. Графики, иллюстрирующие влияние ядер матричной декомпозиции на динамику системы: *a* – при включении линейного и кубического ядер, *b* – при включении только линейного ядра (режим линеаризации схемы)

Fig. 5. Graphs illustrate influence of matrix terms on system dynamics: *a* – linear and cubic terms are turned on, *b* – only linear term is turned on (regime of linearization)

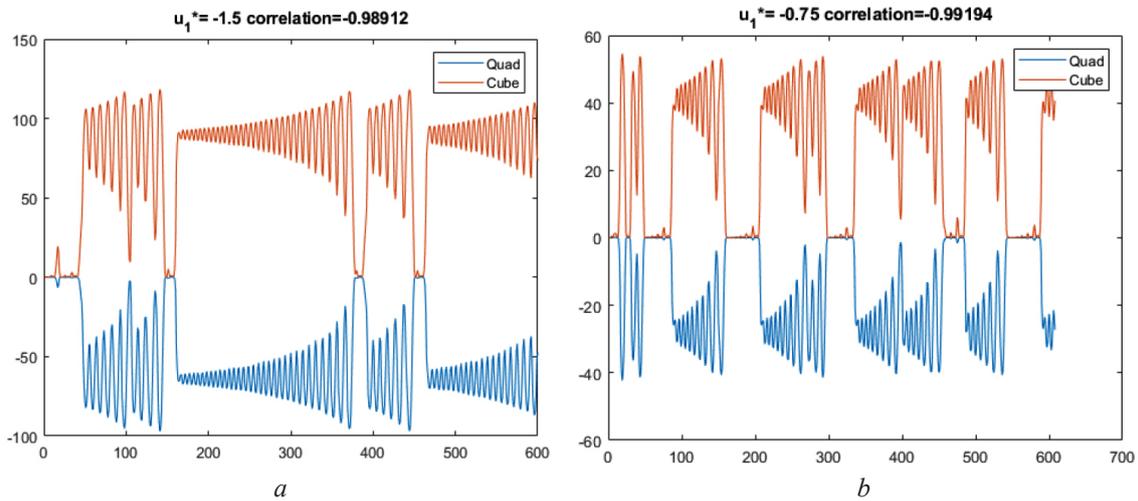


Рис. 6. Графики, иллюстрирующие выходные значения кубического и квадратичного членов матричного ряда для двух наборов параметров моделирования: *a* – $A = 0,1240, C = -0,3243, u_1^* = -1,5$; *b* – $A = 0,5131, C = -0,2955, u_1^* = -0,75$

Fig. 6. Graphs of cubic and quadratic terms output values for two sets of parameters: *a* – $A = 0.1240, C = -0.3243, u_1^* = -1.5$; *b* – $A = 0.5131, C = -0.2955, u_1^* = -0.75$

с параметрами по умолчанию, то есть методом Пирсона. На рис. 7 приведен график, иллюстрирующий изменение данного коэффициента в зависимости от u_1^* для величин $A = 0,5130858, C = -0,2954677125$.

Выходные сигналы кубического и квадратичного ядра для некоторых других величин u_1^* показаны на рис. 8.

Исследование хаотических режимов функционирования схемы Чжуа посредством модели начальной турбулентности Ландау. Полученные результаты вычислительного эксперимента с использованием теории матричной декомпозиции (в особенности см. рис. 6) указывают на тот факт, что конечные незатухающие хаотические колебания наблюдаются лишь при определенных соотношениях между вкладом линейного $L_{N \times N}^{(1)}$, квадратичного $L_{N \times N^2}^{(2)}$ и кубического $L_{N \times N^3}^{(3)}$ ядер в общую динамику системы. Действительно, согласно модели Л. Д. Ландау начальной турбулентности после срыва стационарного режима течения вязкой жидкости с точностью до членов третьего порядка справедливо уравнение [20, 21]

$$\dot{S} = \gamma_L S - \alpha_L S^2 - \beta_L S^3 - \dots, \tag{12}$$

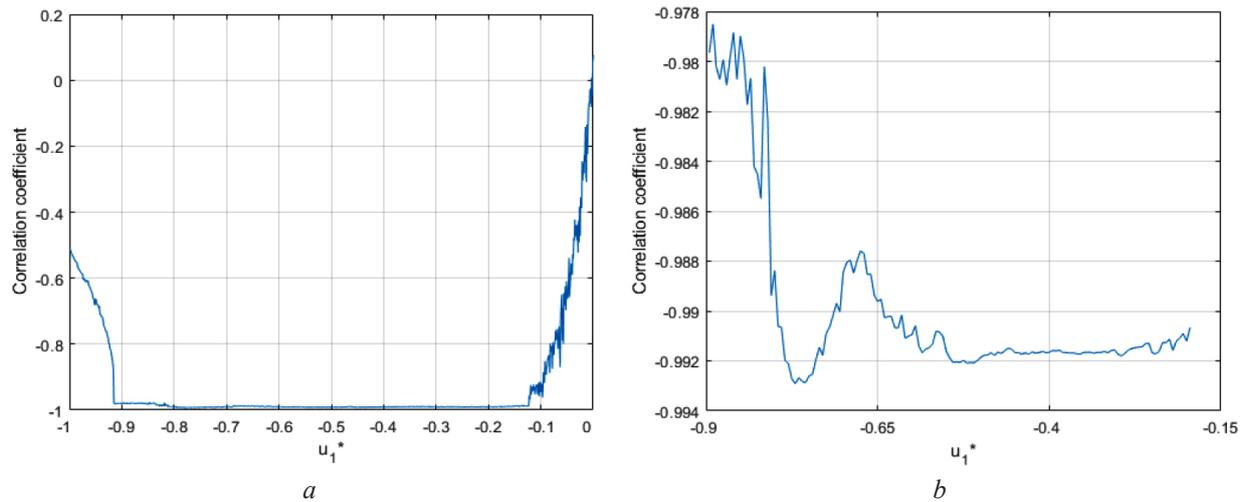


Рис. 7. Зависимость коэффициента корреляции между выходными сигналами кубического и квадратичного членов матричного ряда от u_1^* : a – для $u_1^* \in [-1; 0]$; b – для $u_1^* \in [-0.9; -0.2]$

Fig. 7. Correlation coefficient of cubic and quadratic terms output signals dependence on u_1^* :
 a – for $u_1^* \in [-1; 0]$; b – for $u_1^* \in [-0.9; -0.2]$

где γ_L – коэффициент затухания, α_L – постоянная Ландау [21], β_L – положительная или отрицательная постоянная, $S = |A|^2$ – квадрат амплитуды нестационарного процесса. Как показано в [20], в случае, когда

$$\gamma_L > 0, \alpha_L > 0, \beta_L = 0, \tag{13a}$$

реализуется нестационарный режим конечной амплитуды с дополнительной частотой ω_1 , причем $\omega_1 \gg \gamma_L$.

Этот режим при *критическом* значении управляющего параметра – числа Рейнольдса Re_{cr1} становится неустойчивым даже по отношению к *бесконечно малым* возмущениям, так что схема Чжуа в таком режиме соответствует системе с *мягким* самовозбуждением (рис. 9). По мере изменения управляющего параметра возможен новый хаотический режим, при котором

$$\gamma_L > 0, \alpha_L < 0, \beta_L > 0. \tag{13б}$$

В этом режиме стационарные колебания не могут существовать вовсе, то есть при Re_{cr2} возмущение скачком возрастает до конечной амплитуды с появлением новой дополнительной частоты ω_2 . В интервале $Re_{cr1} < Re < Re_{cr2}$ основное движение метастабильно-устойчиво по отношению к бесконечно малым, но неустойчиво по отношению к возмущениям *конечной амплитуды*. В связи с этим схема Чжуа в режиме (13б) относится к системам с *жестким* самовозбуждением, а появление новой дополнительной частоты ω_2 наряду с ω_1 приводит к хаотическому аттрактору типа «двойной завиток» в пространстве состояний (см. рис. 3).

Действительно, воспользовавшись матричной декомпозицией (11) с учетом (5) запишем уравнение для приращения v_1 первой компоненты u_1 векторной переменной \vec{u} пространства состояний схемы Чжуа в обозначениях уравнения (12):

$$\dot{v}_1 = c(v_2) + \gamma_L v_1 - \alpha_L v_1^2 - \beta_L v_1^3, \tag{14a}$$

где

$$c(v_2) = \alpha v_2; \quad \gamma_L = -C\alpha - 3A\alpha u_1^{*2}; \quad \alpha_L = 3A\alpha u_1^{*}; \quad \beta_L = A\alpha. \tag{14б}$$

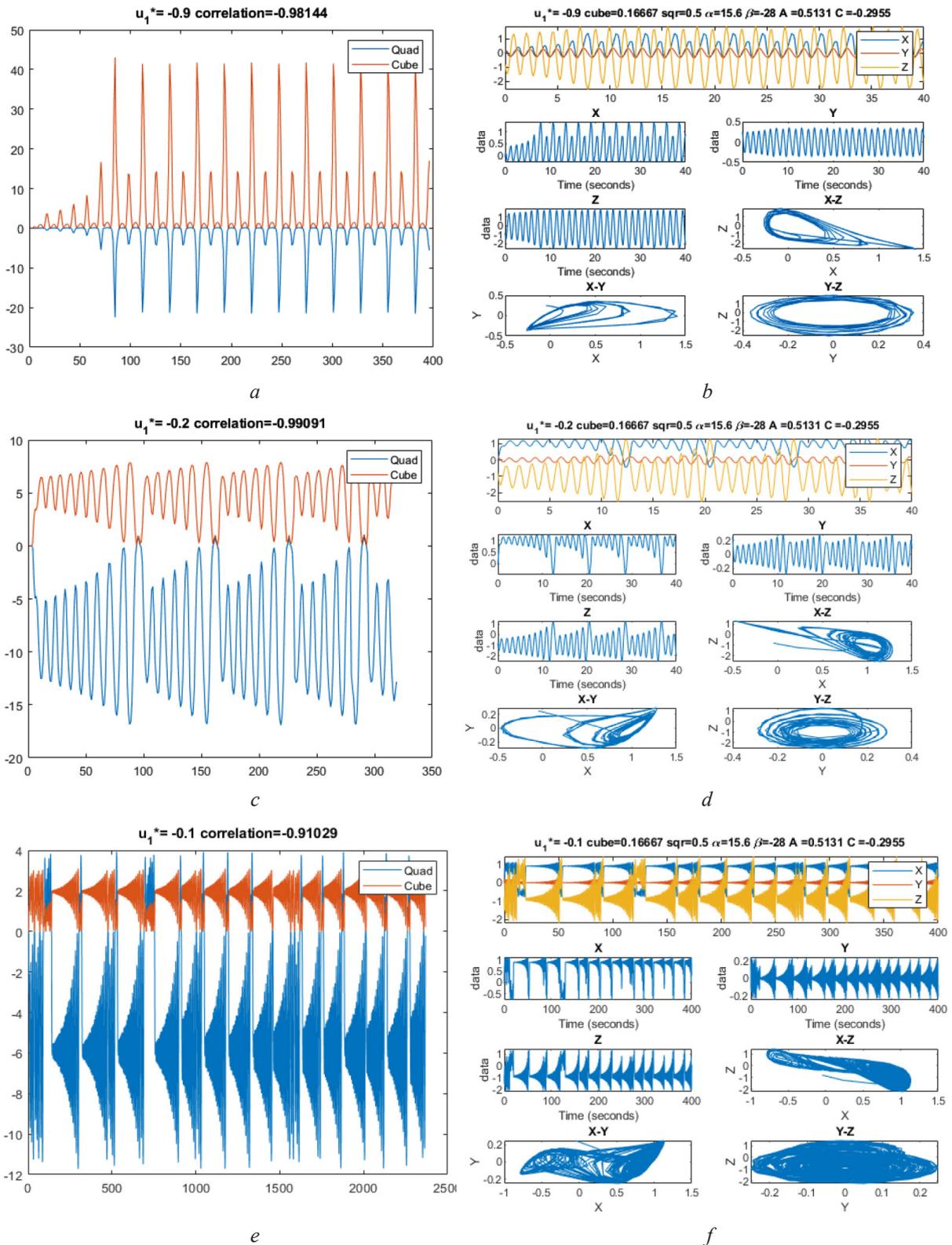
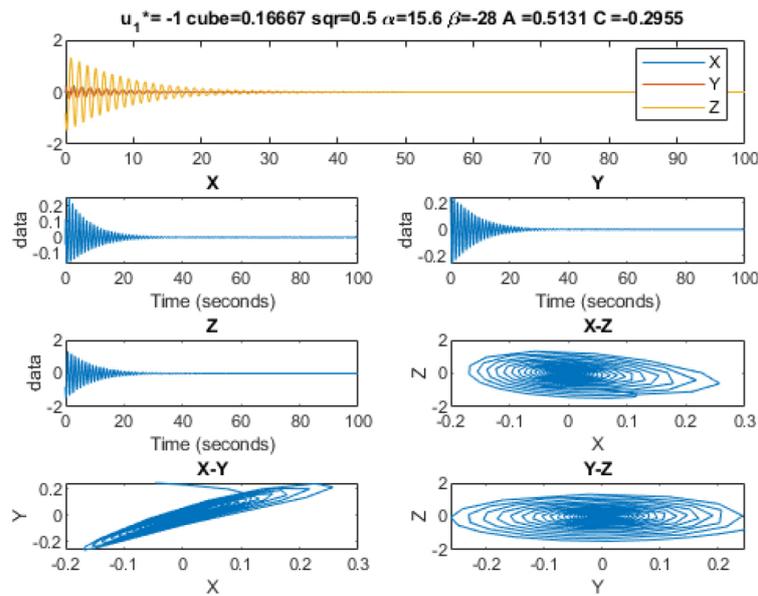


Рис. 8. Выходные сигналы кубического и квадратичного ядер (*a*, *c*, *e*) и соответствующие им сигналы X , Y , Z (*b*, *d*, *f*):

$$a - u_1^* = -0,9; c - u_1^* = -0,2; e - u_1^* = -0,1$$

Fig. 8. Output signals of cubic and quadratic terms (*a*, *c*, *e*) and corresponding signals X , Y , Z (*b*, *d*, *f*):

$$a - u_1^* = -0.9; c - u_1^* = -0.2; e - u_1^* = -0.1$$

Рис. 9. Выходные сигналы X , Y , Z схемы Чжуа в режиме мягкого самовозбужденияFig. 9. Output signals X , Y , Z of Chua's circuit for soft self-excitation regime

Согласно (3), параметры рассматриваемой схемы Чжуа равны $\beta = 28$ и $\alpha = 15,6$. Воспользовавшись данными наборов параметров (см. рис. 3, 4, 6), нетрудно видеть, что

$$\gamma_L = -3A\alpha u_1^{*2} - C\alpha > 0; \quad (15a)$$

$$\alpha_L = 3A\alpha u_1^* < 0; \quad (15b)$$

$$\beta_L = A\alpha > 0, \quad (15b)$$

то есть условия (15a–в) полностью соответствуют условиям жесткого самовозбуждения системы (13б). Следовательно, при скачкообразном переходе от стационарного режима к нестационарному возникают две дополнительные частоты ω_1 и ω_2 , определяющие хаотический аттрактор типа «двойной завиток» в пространстве состояний схемы Чжуа, что и было подтверждено вычислительными экспериментами, результаты которых показаны на рис. 3.

Заключение. Как было отмечено в [19], в настоящее время существует множество нерешенных проблем в области анализа нелинейных динамических систем, в особенности для систем с хаотическими режимами. Одна из таких проблем – анализ системы на длительных временных интервалах. При таком анализе возникают как технические сложности, связанные с эффектами конечной разрядности регистров ЭВМ, так и проблемы теоретического характера, требующие разработки новых подходов к анализу. В настоящей работе получен ряд новых результатов теоретического и практического характера.

Применение метода матричной декомпозиции позволило получить новые знания о динамике системы Чжуа. Электронная модель, построенная по результатам разложения в матричный ряд, демонстрирует разнообразные динамические режимы работы схемы. Учет в схеме дополнительного управляющего параметра открывает новые возможности для исследования ее динамики. Данный результат демонстрирует новый подход к анализу и синтезу электронных схем с использованием метода матричной декомпозиции, который может быть перенесен и на другие схемы, описываемые системами нелинейных дифференциальных уравнений.

Модель электронной схемы, построенной на основе уравнений Чжуа и использующей метод матричной декомпозиции, может найти применение для электронной генерации хаотических сигналов в системах передачи и защиты информации.

Благодарности

Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований «Информатика, космос и безопасность», подпрограмма «Информатика и космические исследования», задание 1.8.01

Acknowledgements

This research was supported by the State Research Program “Informatics, Space and Security”, Subprogram “Informatics and Space Research”, task 1.8.01.

Список использованных источников

1. Krot, A. M. Chaotic dynamic methods based on decomposition of vector functions in vector-matrix series into state-space / A. M. Krot // *Melecon 2000: Proc. 10th Mediterranean Electrotechnical Conference, Lemesos, Cyprus, May 29–31, 2000.* – Nicosia, Violaris Press Ltd., 2000. – Vol. 2. – P. 643–646. <https://doi.org/10.1109/melcon.2000.880016>
2. Krot, A. M. The decomposition of vector functions in vector-matrix series into state-space of nonlinear dynamic system / A. M. Krot // *EUSIPCO-2000: Proc. X European Signal Processing Conference, Tampere, Finland, September 4–8, 2000.* – Tampere, 2000. – Vol. 3. – P. 2453–2456.
3. Krot, A. M. Matrix decompositions of vector functions and shift operators on the trajectories of a nonlinear dynamical system / A. M. Krot // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* – 2001. – Vol. 4, № 2. – P. 106–115.
4. Krot, A. M. Application of expansion into matrix to analysis of attractors of complex nonlinear dynamical systems / A. M. Krot // *DSP-2002: Proc. 14th IEEE International Conference on Digital Signal Processing, Santorini, Greece, July 1–3, 2002.* – Santorini, 2002. – P. 959–962. <https://doi.org/10.1109/icdsp.2002.1028249>
5. Krot, A. M. Minimal attractor embedding estimation based on matrix decomposition for analysis of dynamical systems / A. M. Krot, H. B. Minervina // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* – 2002. – Vol. 5, № 2. – P. 161–172.
6. Крот, А. М. Анализ аттракторов сложных нелинейных динамических систем на основе матричных рядов в пространстве состояний / А. М. Крот // *Информатика.* – 2004. – № 1. – С. 7–16.
7. Крот, А. М. Разработка и исследование моделей сложных динамических систем на основе методов вход-выходных представлений и пространства состояний / А. М. Крот // *Информатика.* – 2004. – № 4. – С. 95–108.
8. Krot, A. M. The development of matrix decomposition theory for nonlinear analysis of chaotic attractors of complex systems and signals / A. M. Krot // *DSP-2009: Proc. 16th IEEE International Conference on Digital Signal Processing, Thira, Santorini, Greece, July 5–7, 2009.* – Santorini, 2009. – P. 1–5. <https://doi.org/10.1109/icdsp.2009.5201123>
9. Krot, A. M. Bifurcation analysis of attractors of complex systems based on matrix decomposition theory / A. M. Krot // *IEM 2011: Proc. of IEEE Intern. Conference on Industrial Engineering and Management, Zhengzhou, China, August 12–14, 2011.* – Wuhan, 2011. – P. 1–5. <https://doi.org/10.1109/icmss.2011.5999350>
10. Krot, A. M. Nonlinear analysis of the Hopfield network dynamical states using matrix decomposition theory / A. M. Krot, R. A. Prakupovich // *Chaotic Modeling and Simulation.* – 2013. – Vol. 1. – P. 133–146.
11. Matsumoto, T. Chaos in Electronic Circuits / T. Matsumoto // *Proceedings of the IEEE.* – 1987. – Vol. 75, Iss. 8. – P. 1033–1057. <https://doi.org/10.1109/PROC.1987.13848>
12. Ogorzalek, M. Exploring Chaos in Chua’s Circuit via Unstable Periodic Orbits / M. Ogorzalek, Z. Galias, L. Chua // *Circuits and Systems, ISCAS’93, IEEE International Symposium on., 1993.* – Chicago, IL, USA, 1993. – P. 2608–2611. <https://doi.org/10.1109/iscas.1993.693226>
13. Zhong, G.-Q. Implementation of Chua’s circuit with a cubic nonlinearity / G.-Q. Zhong // *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I. Theories and Applications.* – 1994. – Vol. 41, № 12. – P. 934–941. <https://doi.org/10.1109/81.340866>
14. Galias, Z. Rigorous Analysis of Chua’s Circuit with a Smooth Nonlinearity / Z. Galias // *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers.* – 2016. – Vol. 63, № 12. – P. 2304–2312. <https://doi.org/10.1109/tcsi.2016.2613022>
15. O’Donoghue, K. A fast and simple implementation of Chua’s oscillator using a “cubic-like” Chua diode 2005 / K. O’Donoghue, M. P. Kennedy, P. Forbes // *Proceedings of the 2005 European Conference on Circuit Theory and Design, Cork, Ireland, 2 Sept. 2005.* – Vol. 2. <https://doi.org/10.1109/ECCTD.2005.1522998>
16. Srisuchinwong, B. Implementation of Chua’s Chaotic Oscillator Using “Roughly-Cubic-Like” Nonlinearity / B. Srisuchinwong // *4th International Conference on Electrical Engineering/Electronics, Computer, Telecommunications and Information Technology, May 9–12, 2007.* – Chiang Rai, 2007. – P. 36–37.
17. Galias, Z. On the existence of chaos in the Chua’s circuit with a smooth nonlinearity / Z. Galias // *IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS), Montreal, QC, Canada, 22–25 May 2016.* – Montreal, QC, Canada, 2016. – P. 1106–1109. <http://dx.doi.org/10.1109/ISCAS.2016.7527438>
18. Tietze, U. *Electronic Circuits: Handbook for Design and Application* / U. Tietze, C. Schenk, E. Gamm. – 2nd ed. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. – 1543 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-78655-9>
19. Galias, Z. The Dangers of Rounding Errors for Simulations and Analysis of Nonlinear Circuits and Systems – and How to Avoid Them / Z. Galias // *IEEE Circuits and Systems Magazine.* – 2013. – Vol. 13, № 3. – P. 35–52. <https://doi.org/10.1109/MCAS.2013.2271444>
20. Ландау, Л. Д. К проблеме турбулентности / Л. Д. Ландау // *Докл. Акад. наук СССР.* – 1944. – Т. 44, № 8. – С. 339.
21. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика: учеб. пособие для студентов физ. специальностей ун-тов: в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц; под ред. Л. П. Питаевского. – 3-е изд., перераб. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1946. – Т. 6: Гидродинамика. – 736 с.

References

1. Krot A. M. Chaotic dynamic methods based on decomposition of vector functions in vector-matrix series into state-space. *Melecon 2000: Proc. 10th Mediterranean Electrotechnical Conference, Lemesos, Cyprus, May 29–31, 2000. Vol. 2.* Nicosia, Violaris Press Ltd, 2000, pp. 643–646. <https://doi.org/10.1109/melcon.2000.880016>
2. Krot A. M. The decomposition of vector functions in vector-matrix series into state-space of nonlinear dynamic system. *EUSIPCO-2000: Proc. X European Signal Processing Conference, Tampere, Finland, September 4–8, 2000. Vol. 3.* Tampere, 2000, pp. 2453–2456.
3. Krot A. M. Matrix decompositions of vector functions and shift operators on the trajectories of a nonlinear dynamical system. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2001, vol. 4, no. 2, pp. 106–115.
4. Krot A. M. Application of expansion into matrix to analysis of attractors of complex nonlinear dynamical systems. *DSP-2002: Proc. 14th IEEE International Conference on Digital Signal Processing, Santorini, Greece, July 1–3, 2002.* Santorini, 2002, pp. 959–962. <https://doi.org/10.1109/icdsp.2002.1028249>
5. Krot A. M., Minervina H. B. Minimal attractor embedding estimation based on matrix decomposition for analysis of dynamical systems. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2002, vol. 5, no. 2, pp. 161–172.
6. Krot A. M. Analysis of attractors of complex nonlinear dynamical systems on the basis of matrix series in the state space. *Informatica = Informatics*, 2004, no. 1, pp. 7–16 (in Russian).
7. Krot A. M. Development and research of models of complex dynamic systems on the basis of input-output representations and state space. *Informatica = Informatics*, 2004, no. 4, pp. 95–108 (in Russian).
8. Krot A. M. The development of matrix decomposition theory for nonlinear analysis of chaotic attractors of complex systems and signals. *DSP-2009: Proc. 16th IEEE International Conference on Digital Signal Processing, Thira, Santorini, Greece, July 5–7, 2009.* Santorini, 2009, pp. 1–5. <https://doi.org/10.1109/icdsp.2009.5201123>
9. Krot A. M. Bifurcation analysis of attractors of complex systems based on matrix decomposition theory. *IEM 2011: Proc. of IEEE International Conference on Industrial Engineering and Management, Zhengzhou, China, August 12–14, 2011.* Wuhan, 2011, pp. 1–5. <https://doi.org/10.1109/icmss.2011.5999350>
10. Krot A. M., Prakupovich R. A. Nonlinear analysis of the Hopfield network dynamical states using matrix decomposition theory. *Chaotic Modeling and Simulation*, 2013, vol. 1, pp. 133–146.
11. Matsumoto T. Chaos in Electronic Circuits. *Proceedings of the IEEE*, 1987, vol. 75, iss. 8, pp. 1033–1057. <https://doi.org/10.1109/PROC.1987.13848>
12. Ogorzalek M., Galias Z., Chua L. Exploring Chaos in Chua's Circuit via Unstable Periodic Orbits. *Circuits and Systems, ISCAS'93, IEEE International Symposium on., 1993.* Chicago, IL, USA, 1993, pp. 2608–2611. <https://doi.org/10.1109/iscas.1993.693226>
13. Zhong G. Implementation of Chua's circuit with a cubic nonlinearity. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Theories and Applications*, 1994, vol. 41, no. 12, pp. 934–941. <https://doi.org/10.1109/81.340866>
14. Galias Z. Rigorous Analysis of Chua's Circuit with a Smooth Nonlinearity. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2016, vol. 63, no. 12, pp. 2304–2312. <https://doi.org/10.1109/tcsi.2016.2613022>
15. O'Donoghue K., Kennedy M. P., Forbes P. A fast and simple implementation of Chua's oscillator using a "cubic-like" Chua diode. *Proceedings of the 2005 European Conference on Circuit Theory and Design, Cork, Ireland, 2 Sept. 2005. Vol. 2.* <https://doi.org/10.1109/ECCTD.2005.1522998>
16. Srisuchinwong B. Implementation of Chua's Chaotic Oscillator Using "Roughly-Cubic-Like" Nonlinearity. *4th International Conference on Electrical Engineering/Electronics, Computer, Telecommunications and Information Technology, May 9–12, 2007.* Chiang Rai, 2007, pp. 36–37.
17. Galias Z. On the existence of chaos in the Chua's circuit with a smooth nonlinearity. *IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS), Montreal, QC, Canada, 22–25 May 2016.* Montreal, QC, Canada, 2016, pp. 1106–1109. <http://dx.doi.org/10.1109/ISCAS.2016.7527438>
18. Tietze U., Schenk C., Gamm E. *Electronic Circuits: Handbook for Design and Application.* 2nd ed. Berlin; Heidelberg, Springer-Verlag, 2008. 1543 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-78655-9>
19. Galias Z. The Dangers of Rounding Errors for Simulations and Analysis of Nonlinear Circuits and Systems – and How to Avoid Them. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, 2013, vol. 13, no. 3, pp. 35–52. <https://doi.org/10.1109/MCAS.2013.2271444>
20. Landau L. D. To the problem of turbulence. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Reports of the Academy of Sciences USSR], 1944, vol. 44, no. 8, p. 339 (in Russian).
21. Landau L. D., Lifschitz E. M. *Fluid Mechanics.* Oxford, Pergamon, 1959. XIII, 539 p.

Информация об авторах

Крот Александр Михайлович – доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторией моделирования самоорганизующихся систем, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 6, 220012, Минск, Республика Беларусь). E-mail: alxkrot@newman.bas-net.by

Сычѳв Владислав Анатольевич – научный сотрудник, лаборатория робототехнических систем, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 6, 220012, Минск, Республика Беларусь). E-mail: vsychyov@robotics.by. <https://orcid.org/0000-0002-1355-8965>

Information about the authors

Alexander M. Krot – D. Sc. (Engineering), Professor, Chief of the Laboratory of Self-organization System Modeling, United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (6, Surganov Str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: alxkrot@newman.bas-net.by

Uladzislau A. Sychou – Researcher of the Laboratory of Robotics Systems, United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (6, Surganov Str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vsychyov@robotics.by. <https://orcid.org/0000-0002-1355-8965>