

ISSN 1561-8358 (Print)
ISSN 2524-244X (Online)

ЭНЕРГЕТИКА, ТЕПЛО- И МАССООБМЕН
POWER ENGINEERING, HEAT AND MASS TRANSFER

УДК 536.2(075)46
<https://doi.org/10.29235/1561-8358-2019-64-1-69-80>

Поступила в редакцию 20.10.2017
Received 20.10.2017

В. А. Кот

Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ВТОРОГО РОДА.
3. ИМПУЛЬСНЫЙ ЛАЗЕРНЫЙ НАГРЕВ

Аннотация. Получены точные и приближенные решения нестационарной задачи теплопроводности для полуграниченного тела при действии на поверхности лазерного импульсного теплового потока. Последовательно рассмотрены прямоугольная, треугольная и параболическая временные функции лазерного импульса. Построены полиномиальные решения на основе интегрального метода граничных характеристик с введением в рассмотрение фронта температурного возмущения дают практически точные решения для температурной функции и ее временной производной, причем как на стадии нагрева, так и на стадии охлаждения. На нескольких примерах показано, что успешность решения поставленных задач плазменного импульсного нагрева тел во многом связана с необходимостью описания временного закона перемещения фронта температурного возмущения с помощью диагональной аппроксимации Паде. Это позволяет практически полностью исключить имеющую место расходимость степенных рядов, описывающих закон перемещения фронта температурного возмущения, причем на достаточно малых временных интервалах. Представленный подход на основе интегрального метода граничных характеристик с описанием решения в виде степенного полинома с представлением фронта температурного возмущения в виде диагональной аппроксимации Паде позволяет достаточно просто и эффективно находить решения для изотерм и линий равных скоростей нагрева/охлаждения (изотахи). Анализ полученных результатов позволил заключить, что эффективное решение всевозможных технологических задач, в основе которых лежит использование импульсного лазерного излучения, во многом определяется успешным решением задачи эффективного управления временной формой лазерного импульса с практически точным определением температурных полей в теле на основе полиномиальных представлений.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, приближенный метод, интегральные тождества, фронт возмущения, импульсный лазерный нагрев

Для цитирования: Кот, В. А. Интегральный метод решения задач теплопроводности с граничным условием второго рода. 3. Импульсный лазерный нагрев / В. А. Кот // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2019. – Т. 64, № 1. – С. 69–80. <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2019-64-1-69-80>

V. A. Kot

A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

INTEGRAL METHOD OF SOLVING HEAT-CONDUCTION PROBLEMS WITH THE SECOND-KIND BOUNDARY CONDITION.
3. PULSED LASER HEATING

Abstract. Exact and approximate solutions to the non-stationary problem on the heat conduction in a semi-bounded body exposed to a pulsed laser radiation flow have been obtained. The action of rectangular, triangular and parabolic laser radiation pulses on this body was investigated. Polynomial relations have been constructed on the basis of the boundary-characteristic method with introduction into consideration of the temperature-disturbance front, and they made it possible to obtain practically exact solutions for the temperature function and its time derivative at both the stages of heating and cooling of the body. It is shown by some examples that the success in solving problems on the pulsed plasma heating of bodies is associated

in many respects with the necessity of definition of the time law of movement of the temperature-disturbance front with the use of the Pade diagonal approximation, which excludes, practically completely, the divergence of the power series defining the law of movement of this front, in particular, in small time intervals. The approach proposed for solving heat-conduction problems with the second-kind boundary condition allows one to simply and effectively find solutions for isotherms and lines of equal heating and cooling. Analysis of the results obtained allows the conclusion that the effectiveness of solving various technological problems, based on the use of pulsed laser radiation, is determined by the success in solving the problems on control of the time shape of a laser pulse and determination of the temperature fields in the body on the basis of polynomial representations.

Keywords: heat-conduction equation, approximate method, integral identities, temperature disturbance front, pulsed laser heating

For citation: Kot V. A. Integral method of solving heat-conduction problems with the second-kind boundary condition. 3. Pulsed laser heating. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2019, vol. 64, no. 1, pp. 69–80 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2019-64-1-69-80>

Введение. Для модифицирования локальных участков поверхности мелкогабаритных деталей из конструкционных материалов, а также режущего и штампового инструмента эффективно использование импульсного лазерного излучения [1–5]. Импульсное лазерное воздействие миллисекундных длительностей ведет к формированию на поверхности слоев с измененным структурно-напряженным состоянием толщиной 0,1–0,2 мм, в результате чего износостойкость поверхности возрастает в несколько раз. На практике толщина таких слоев варьируется путем изменения энергии и длительности лазерного импульса. При выборе параметров лазерного излучения, необходимых для формирования в материале определенных модифицированных слоев заданной толщины, в основном используют решение одномерного линейного уравнения теплопроводности в приближении полубесконечной среды, постоянства плотности мощности лазерного излучения в пределах пятна фокусировки и прямоугольной временной формы лазерного импульса [6]. В [7–9] в одномерном линейном приближении осуществлено моделирование лазерного воздействия на поверхность полуограниченного тела импульсами различной временной формы: прямоугольной, треугольной, треугольной с параболическим сглаживанием, а также описываемой совместно параболическими и гиперболическими функциями. Установлено, что временная форма лазерного импульса оказывает существенное влияние на динамику нагрева поверхности.

В [10] на основе интегрального метода теплового баланса с введением фронта температурного возмущения получено приближенное аналитическое решение задачи нестационарной теплопроводности при переменном во времени граничном условии (синусоидальный импульсный сигнал). Решение характеризуется очень грубым приближением, поскольку представлено температурным профилем в виде полинома второй степени. Настоящая работа является логическим продолжением [11, 12] и ставит целью адаптацию интегрального метода граничных характеристик (ИМГХ) в приложении к решению тепловых задач лазерного импульсного нагрева при термообработке материалов.

Постановка задачи. Найдем решение следующей задачи нестационарной теплопроводности в приближении полубесконечной среды (в безразмерной форме):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t \leq \infty, \quad (1)$$

$$T(\xi, 0) = 0, \quad \delta(0) = 0, \quad (2)$$

$$-\frac{\partial T(0, t)}{\partial \xi} = q(t) = q_0 \varphi(t), \quad (3)$$

$$T(x, t)|_{x \rightarrow \infty} = 0, \quad (4)$$

где функция $\varphi(t)$ описывает временную форму импульса. С введением фронта температурного возмущения $\delta(t)$ вместо граничного условия (4) имеем условия:

$$T(\delta, t) = 0, \quad \frac{\partial T(\delta, t)}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

Запишем общее решение задачи (1)–(4) в случае постоянства плотности мощности лазерного излучения в пределах пятна фокусировки [6]:

$$T^*(x, t) = \frac{q_0(1-R)}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi(t-\eta)}{\sqrt{\eta}} \exp(-x^2/4\eta) d\eta, \tag{6}$$

где R – коэффициент отражения излучения заданной длины волны поверхностью. Одномерность задачи для полуграниченного тела обусловлена тем, что лазерному модифицированию, как правило, подвергается поверхность тел, толщина которых (наряду с поперечными размерами пятна фокусировки лазерного излучения) намного превышает толщину модифицированного слоя. Равномерное распределение мощности излучения по пятну фокусировки реализуется с помощью специальных оптических элементов [2].

Для корректного анализа реальных временных форм лазерных импульсов будем исходить из постоянства энергии лазерного излучения. Отсюда в безразмерной форме мы приходим к условию $\int_0^{\tau_0} \varphi(t) dt = 1$. Далее будем использовать следующие аппроксимации реальных временных форм лазерных импульсов единичной энергии:

прямоугольная (рис. 1, *a*)

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) = 1, & 0 < t \leq \tau = 1 \\ \varphi_2(t) = 0, & t > \tau = 1 \end{cases}, \tag{7}$$

треугольная (рис. 1, *b*)

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) = 2t/\tau^*, & 0 < t \leq \tau^* \\ \varphi_2(t) = 2(\tau - t)/(\tau - \tau^*), & \tau^* < t \leq \tau = 1, \\ \varphi_3(t) = 0, & t > \tau \end{cases}, \tag{8}$$

параболическая (рис. 1, *a*)

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) = \frac{6}{\tau^3} t(\tau - t), & 0 < t \leq \tau = 1 \\ \varphi_2(t) = 0, & t > 1 \end{cases}. \tag{9}$$

Прямоугольный импульс. Нагрев полупространства под действием постоянной во времени удельной тепловой мощности описывается известным выражением [13]

$$T^* = 2(1-R)q_0\sqrt{t} \operatorname{ierfc}(x/2\sqrt{t}), \tag{10}$$

где $\operatorname{ierfc}(x/2\sqrt{t}) = \exp(-x^2/4t)/\sqrt{\pi} - (x/2\sqrt{t}) \operatorname{erfc}(x/2\sqrt{t})$. Получим выражение для температурного поля после прекращения действия поверхностного источника теплоты продолжительностью τ . Проще всего для этих целей пользоваться понятием стока [3, 6], под которым понимают источник теплоты с отрицательной плотностью потока. Использование стока теплоты,

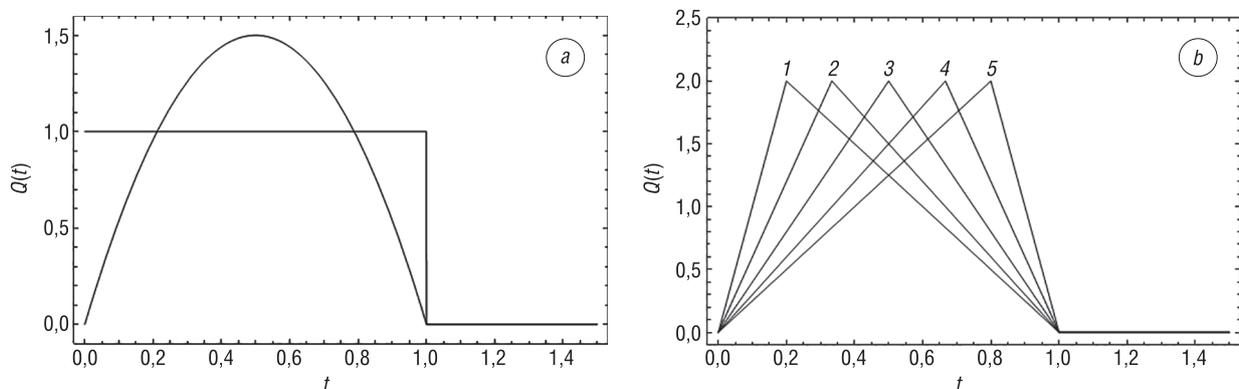


Рис. 1. Параболическая и прямоугольная временные формы лазерных импульсов (*a*); треугольные временные формы лазерных импульсов при $\tau = 1/5$ (1), $1/3$ (2), $1/2$ (3), $2/3$ (4), $4/5$ (5) (*b*)
 Fig. 1. Parabolic and rectangular laser pulses (*a*) and triangular laser pulses with $\tau = 1/5$ (1), $1/3$ (2), $1/2$ (3), $2/3$ (4), and $4/5$ (5) (*b*)

сдвинутого относительно источника теплоты на время действия импульса τ , дает возможность, не решая задачи, записать формулу для температурного поля при $t \geq \tau$. В таком случае, сдвинув сток теплоты относительно источника теплоты на τ , сразу запишем выражение для температурного профиля при $t \geq \tau$

$$T^*(x,t) = \begin{cases} T^*(x,t), & 0 < t \leq 1 \\ T^*(x,t) - T^*(x,t-\tau), & \tau \geq t < \infty \end{cases}, \quad (11)$$

либо, введя в рассмотрение ассиметричную единичную функцию $S_-(z) = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$, вместо (11) запишем

$$T^*(x,t) = T^*(x,t) - S_-(t-\tau)T^*(x,t-\tau), \quad 0 < t < \infty. \quad (12)$$

В частности, для первого ($k = 1, N = 5$) и второго ($k = 2, N = 8$) приближений в [12] получены решения для $x \in [0, \delta_k(t)]$ при $\delta_1(t) = 4,423\sqrt{t}$ и $\delta_2(t) = 5,5797\sqrt{t}$ соответственно:

$$T^{(1)} = 1,12754\sqrt{t} - x + 0,2993\frac{x^2}{\sqrt{t}} - 0,021735\frac{x^3}{t} - 0,00457\frac{x^4}{t^{3/2}} + 0,00063\frac{x^5}{t^2}, \quad (13)$$

$$T^{(2)} = 1,12834\sqrt{t} - x + \frac{x^2}{\sqrt{t}} \left(0,2830 - 0,01357\frac{x^2}{t} + 0,001395\frac{x^3}{t^{3/2}} + \right. \\ \left. + 3,255 \cdot 10^{-4}\frac{x^4}{t^2} - 7,427 \cdot 10^{-5}\frac{x^5}{t^{5/2}} + 4,183 \cdot 10^{-6}\frac{x^6}{t^3} \right). \quad (14)$$

С учетом решений (11), (13), (14), введя ассиметричную функцию Хэвисайда, запишем

$$T^{(k)}(x,t) = T_1^{(k)} S_-(\delta_k(t) - x), \quad t \in [0, \tau], \quad x \in [0, \infty), \quad (15)$$

где $k = 1, 2, \dots$ – порядок приближения. Отметим, что формула (15) справедлива для времен $0 < t \leq \tau$. По аналогии с (12), введя понятие стока, сразу запишем выражение для температурного профиля во всей временной области ($0 < t < \infty$):

$$T^{(k)}(x,t) = T_1^{(k)} S_-(\delta_k(t) - x) - S_-(t-\tau) S_-(\delta_k(t-\tau) - x) T_1^{(k)}(x,t-\tau), \quad 0 < t < \infty, \quad (16)$$

где температурные функции $T_1^{(k)}(x,t-\tau)$ определяются соответствующими выражениями k -го приближения с подстановкой $t \rightarrow t - \tau$. Для $\delta_1(t-\tau)$ и $\delta_2(t-\tau)$ (соответственно первое и второе приближение) получим: $\delta_1(t-\tau) = 4,423\sqrt{t-\tau}$, $\delta_2(t-\tau) = 5,5797\sqrt{t-\tau}$.

Температурные кривые точного и приближенного решений, рассчитанные для $\tau = 1$ и характеризующие изменение температуры на разном удалении от поверхности полуограниченного тела, представлены на рис. 2, а. В данном случае было использовано решение (14) во втором при-

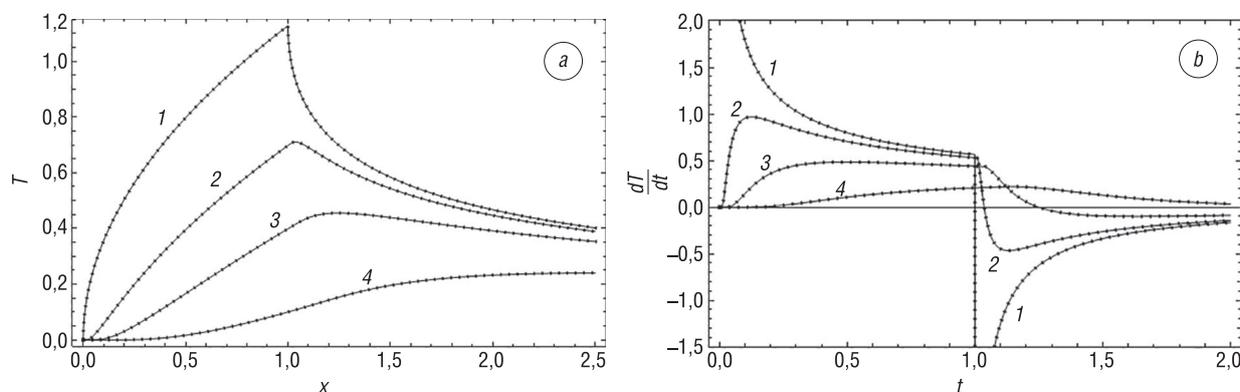


Рис. 2. Изменение во времени температуры (а) и скорости нагрева (б) на разном удалении от поверхности: $x = 0$ (1), 0,5 (2), 1 (3) 2 (4) при воздействии на полупространство прямоугольного лазерного импульса

Fig. 2. Time change in the temperature (a) and rate of heating (b) the semi-bounded body at a distance: $x = 0$ (1), 0.5 (2), 1 (3), and 2 (4) from it in the case of action of a rectangular laser pulse on the body

ближении. Как видим, имеет место практически полное совпадение данных кривых, причем как на стадии нагрева, так и на стадии охлаждения.

На основе полученных в [12] решений для температурной функции $T(x, t)$ в приближениях $k = 2, 4$ запишем формулу, описывающую изменение температуры поверхности полупространства:

$$T^{(k)}(0, t) = \sigma_k \sqrt{t} \left(1 - S_-(t - \tau) \sqrt{1 - \tau/t} \right), \quad 0 < t < \infty. \tag{17}$$

Здесь $\sigma_2 = 1,12834$, $\sigma_3 = 1,128376$, $\sigma_4 = 1,1283794$. Для определения скорости нагрева и охлаждения тела продифференцируем (12) по t :

$$\frac{dT^*}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \left(1 - \sqrt{\frac{t}{t-\tau}} e^{-\frac{x^2}{4t(t-\tau)}} S_-(t-\tau) \right). \tag{18}$$

Из приближенного решения (14) найдем

$$\frac{dT^{(2)}}{dt} = v(t) S_-(5,57971\sqrt{t} - x) - v(t-\tau) S_-(t-\tau) S_-(5,57971\sqrt{t-\tau} - x), \tag{19}$$

где

$$v(z) = \frac{0,564168}{\sqrt{z}} - 0,141496 \frac{x^2}{z^{3/2}} + 0,0203544 \frac{x^4}{z^{5/2}} - 0,00279073 \frac{x^5}{z^3} - 0,000813766 \frac{x^6}{z^{7/2}} + 0,000222815 \frac{x^7}{z^4} - 0,000014641 \frac{x^8}{z^{9/2}}, \tag{20}$$

причем $z \equiv t \vee t - \tau$. Графики точного (18) и приближенного (19) решений для скорости нагрева тела представлены на рис. 2, *b*. Отметим практически идеальное совпадение кривых скоростей нагрева для разноудаленных от поверхности точек.

Треугольный импульс. Треугольный импульсный поток, заданный формулой (8), представим в ином виде, воспользовавшись асимметричной единичной функцией Хэвисайда:

$$q(t) = \frac{2}{\tau_0} \left[t S_-(\tau_0 - t) + \frac{t - \tau}{1/\tau_0 - \tau} (S_-(t - \tau) - S_-(t - \tau_0)) \right], \tag{21}$$

или, приняв $\tau = 1$:

$$q(t) = \frac{2}{\tau_0} \left[t S_-(\tau_0 - t) + \frac{t - 1}{1/\tau_0 - 1} (S_-(t - 1) - S_-(t - \tau_0)) \right]. \tag{22}$$

Здесь τ_0 – параметр (относительное время), характеризующий крутизну переднего фронта импульса и отвечающий максимальному (пиковому) значению удельного теплового потока.

Для временной формы импульса (8) в работе [7] было получено решение для времен $t \in [0, 1]$ следующего вида:

$$T(x, t) = \begin{cases} T_1(x, t) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{t^{3/2}}{\tau_0} \left[3\sqrt{\pi} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{x^2}{t} \right) \text{ierfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right) - \exp \left(-\frac{x^2}{4t} \right) \right], & 0 \leq t \leq \tau_0, \\ T_2(x, t) = T_1(x, \tau_0) + \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{(t-\tau_0)^{3/2}}{1-\tau_0} \left[\exp \left(-\frac{x^2}{4(t-\tau_0)} \right) + 3\sqrt{\pi} \left(\frac{1-t}{1-\tau_0} - \frac{2}{3} \frac{x^2}{4(t-\tau_0)} \right) \text{ierfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau_0}} \right) \right], & \tau_0 \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{23}$$

и соответственно для температуры поверхности

$$T(0, t) = \begin{cases} T_1(0, t) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \frac{t^{3/2}}{\tau_0}, & 0 \leq t \leq \tau_0, \\ T_2(0, t) = T_1(0, \tau_0) + \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{(3-\tau_0-2t)\sqrt{t-\tau_0}}{1-\tau_0}, & \tau_0 \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{24}$$

Данные решения, а также последующие с ними действия, были полностью повторены в последующих работах тех же авторов [8, 9]. Однако, как показал анализ решений (23) и (24), для наиболее важного отрезка времени $t \in [\tau_0, 1]$, на котором происходит последующее приращение температуры поверхности, авторами [7–9] допущены существенные и очень грубые ошибки. Как следствие, формулы (23) и (24) для времен $t \in [\tau_0, 1]$ дают заведомо неверный, очень сильно

отличающийся от точного решения, результат. В этом можно легко убедиться, если, например, проанализировать решение (24), сопоставив его с точным решением (данное решение приведено далее).

Точное решение. Получим точное решение задачи при граничном условии (21). Для этого достаточно воспользоваться общим решением (6), подставив в него $q(t) = t$. В итоге имеем

$$T^*(x, t) = \frac{4t^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} \left[\left(1 + \frac{x^2}{4t} \right) \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) - \frac{3\sqrt{\pi}x}{4\sqrt{t}} \left(1 + \frac{x^2}{6t} \right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \right]. \quad (25)$$

Основываясь на (21) и (25), приходим к следующему выражению, описывающему температурный профиль в полуограниченном теле при действии на поверхности треугольного импульсного теплового потока (21) ($\tau = 1$):

$$T^*(x, t) = \frac{2}{\tau_0} \left[T^*(x, t) - \frac{1}{1-\tau_0} (T^*(x, t-\tau_0) S_-(t-\tau_0) + \tau_0 T^*(x, t-1) S_-(t-1)) \right]. \quad (26)$$

Для температуры поверхности получаем

$$T^*(0, t) = \frac{8t^{3/2}}{3\tau_0\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{(1-1/t)^{3/2}}{1/\tau_0 - 1} S_-(t-1) - \frac{(1-\tau_0/t)^{3/2}}{1-\tau_0} S_-(t-\tau_0) \right). \quad (27)$$

Сравнение результатов расчетов на основе (24) и (26) указывает на грубую ошибочность решения (24) (рис. 3, *a*). Из (26) определим момент времени t_m , который соответствует максимальному значению температуры поверхности T_{\max}^* : $t_m = 1/(2-\tau_0)$. Отсюда

$$T_{\max}^*(0, t_m) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}(2-\tau_0)}. \quad (28)$$

Приближенное решение. Для получения приближенного решения задачи воспользуемся решением во втором приближении ($k = 2$) для граничного условия $q(t) = t$, полученным в [13]. С учетом асимметричной функции Хэвисайда запишем

$$T^{(2)}(x, t) = t^{3/2} \left(0,752180 - \frac{x}{\sqrt{t}} + 0,568026 \frac{x^2}{t} - 0,175308 \frac{x^3}{t^{3/2}} + 0,030803 \frac{x^4}{t^2} - 0,002905 \frac{x^5}{t^{5/2}} + 0,0001143 \frac{x^6}{t^3} \right) S_-(5,33112\sqrt{t} - x). \quad (29)$$

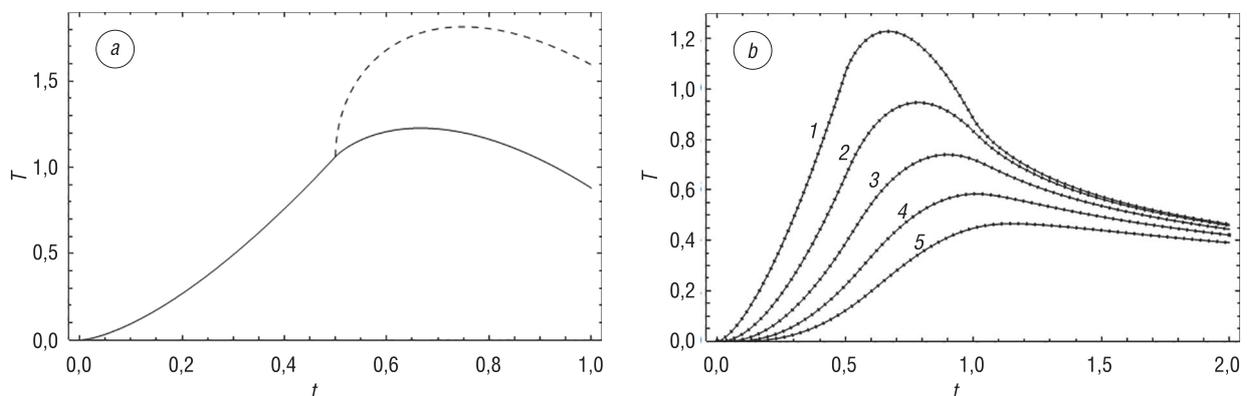


Рис. 3. Изменение во времени температуры поверхности на основе точной формулы (27) (сплошная кривая) и формулы (24) (пунктирная кривая) (*a*); временные зависимости нагрева полупространства на разном удалении от поверхности: $x = 0$ (1), $1/4$ (2), $1/2$ (3), $3/4$ (4), 1 (5) при воздействии лазерного импульса треугольной формы с параметром $\tau = 0,5$ (*b*)

Fig. 3. Time change in the surface temperature of the body, determined on the basis of the exact formula (27) (full line) and formula (24) (dotted line) (*a*), and dependence of the heating of the body at a distance of $x = 0$ (1), $1/4$ (2), $1/2$ (3), $3/4$ (4), and 1 (5) from its surface in the case of action of a triangular laser pulse on the body with $\tau = 0.5$ (*b*)

Отсюда по аналогии с (26) получим решение задачи для треугольного импульса (8)

$$T^{(2)}(x, t) = \frac{2}{\tau_0} \left[T^{(2)}(x, t) - \frac{1}{1 - \tau_0} (T^{(2)}(x, t - \tau_0) S_-(t - \tau_0) + \tau_0 T^{(2)}(x, t - 1) S_-(t - 1)) \right]. \quad (30)$$

Температурные кривые для точного (26) и приближенного (30) решений, характеризующие изменение температуры на разном удалении от поверхности тела, представлены на рис. 3, *b*. Мы отмечаем практически полное совпадение приведенных температурных кривых как на стадии действия теплового импульса, так и после него.

Из (30) найдем температуру поверхности:

$$T^{(2)}(0, t) = \frac{1,50436}{\tau_0} \left[t^{3/2} + \frac{\tau_0 (t - 1)^{3/2}}{1 - \tau_0} S_-(t - 1) - \frac{(t - \tau_0)^{3/2}}{1 - \tau_0} S_-(t - \tau_0) \right]. \quad (31)$$

Для момента времени $t_m = 1/(2 - \tau_0)$ из (31) получим приближенное выражение для максимальной температуры поверхности $T_{\max} \approx 1,50451/\sqrt{2 - \tau_0}$, дающее значения T_{\max} с погрешностью 0,0096 %.

Продифференцировав (26), придем к скорости изменения температуры поверхности:

$$\frac{dT^*(0, t)}{dt} = \frac{4}{\tau_0 \sqrt{\pi}} \left(\sqrt{t} + \frac{\tau_0 \sqrt{t - 1}}{(1 - \tau_0)} S_-(t - 1) - \frac{\sqrt{t - \tau_0}}{(1 - \tau_0)} S_-(t - \tau_0) \right). \quad (32)$$

Аналогично, основываясь на (31), запишем приближенное выражение для $dT^{(2)}(0, t)/dt$:

$$\frac{dT^{(2)}(0, t)}{dt} = \frac{2,25654}{\tau_0} \left(\sqrt{t} + \frac{\tau_0 \sqrt{t - 1}}{(1 - \tau_0)} S_-(t - 1) - \frac{\sqrt{t - \tau_0}}{(1 - \tau_0)} S_-(t - \tau_0) \right). \quad (33)$$

На рис. 4 показано изменение во времени температуры и скорости нагрева (охлаждения) поверхности полуограниченного тела для треугольного лазерного импульса при различных значениях параметра τ . Расчет проведен на основе формул (27), (31)–(33). Видно полное слияние полученных кривых.

Параболический импульс. Параболический импульсный тепловой поток представляет существенный интерес. Далее последовательно остановимся на отыскании точного и приближенного решений на основе ИМГХ.

Точное решение. Временную функцию $\varphi(t)$ импульсного теплового потока, заданную с помощью выражения (9), запишем в ином виде ($\tau = 1$):

$$\varphi(t) = 6t(1 - t) - 6(t - 1)(1 - t + 1)S_-(t - 1), \quad 0 < t < \infty. \quad (34)$$

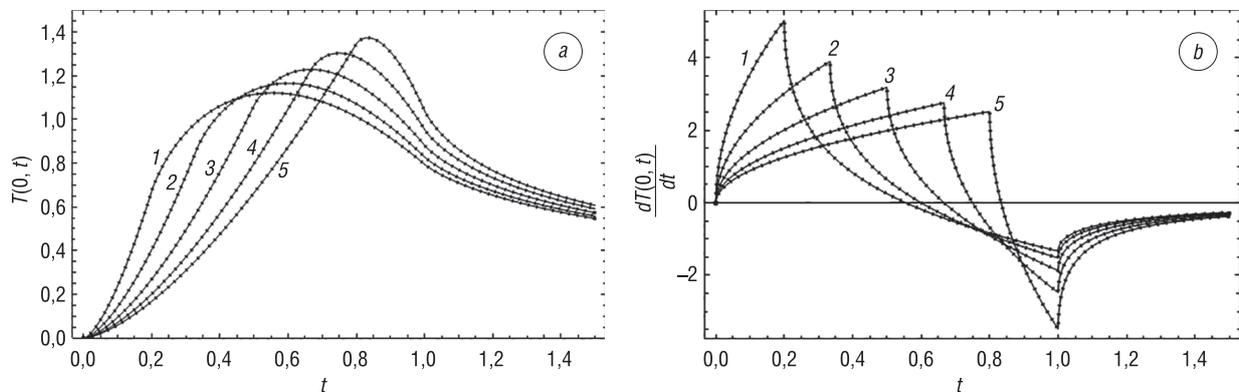


Рис. 4. Изменение во времени температуры поверхности полупространства (*a*) и скорости нагрева поверхности (*b*) при воздействии треугольного лазерного импульса с параметром $\tau = 1/5$ (1), $1/3$ (2), $1/2$ (3), $2/3$ (4), $4/5$ (5)

Fig. 4. Time change in the surface temperature of the body (*a*) and in the rate of heating its surface (*b*) in the case of action of a triangular laser pulse with $\tau = 1/5$ (1), $1/3$ (2), $1/2$ (3), $2/3$ (4), and $4/5$ (5) on the body

Проинтегрировав (6) с учетом (34), приходим к следующему решению ($0 \leq t \leq 1$):

$$T = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \left(4t \left(1 - \frac{4}{5}t \right) + x^2 \left(1 - \frac{9}{5}t - \frac{x^2}{10} \right) \right) e^{-\frac{x^2}{4t}} - x \left(t(1-t) + \frac{x^2}{6} \left(1 - 2t - \frac{x^2}{10} \right) \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right). \quad (35)$$

Отсюда для температуры поверхности находим

$$T^*(0, t) = \frac{8t^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{4}{5}t \right), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (36)$$

Максимальное значение температуры поверхности устанавливается в момент времени $t_m = 3/4$ и составляет $T_{\max}^* = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{3}{\pi}}$.

Приближенное решение. Для отыскания приближенного решения зададим температурный профиль полиномом седьмой степени ($N = 7$). В таком случае, используя граничные условия и пять тождественных равенств последовательности (60) [12], приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 & 1/10 \\ 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 & 1/10 & 1/11 & 1/12 \\ 1/7 & 1/8 & 1/9 & 1/10 & 1/11 & 1/12 & 1/13 & 1/14 \\ 1/9 & 1/10 & 1/11 & 1/12 & 1/13 & 1/14 & 1/15 & 1/16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta(t)q(t) \\ 0 \\ 0 \\ Q_1(t)/\delta(t) \\ 2Q_2(t)/\delta(t)^3 \\ 24Q_3(t)/\delta(t)^5 \\ 720Q_4(t)/\delta(t)^7 \\ 40320Q_5(t)/\delta(t)^9 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Определив из (37) коэффициенты a_j ($j = \overline{0, 7}$) и применив далее соотношение (31) [12], приходим к дифференциальному уравнению

$$\delta \frac{d\delta}{dt} = 24 \frac{10\,296Q_4\delta^2 - \frac{825Q_3}{7}\delta^4 + Q_2\delta^6 - \frac{Q_1}{140}\delta^8 + \frac{q}{22\,050}\delta^{10} - \frac{q'}{4\,233\,600}\delta^{12} - 494\,208Q_5}{10\,296Q_4\delta^2 - \frac{792Q_3}{7}\delta^4 + \frac{6Q_2}{7}\delta^6 - \frac{Q_1}{210}\delta^8 + \frac{q}{58\,800}\delta^{10} - 494\,208Q_5}. \quad (38)$$

Для $q(t) = t(1-t)$ уравнение (38) принимает вид

$$\delta \frac{d\delta}{dt} = 24 \frac{F_1(q, t)}{F_2(q, t)}, \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} F_1(g, t) &= \frac{6864}{5}t^5(2t-7) - \frac{2002}{5}(t-3)t^4g^2 + \frac{55}{4}t^3(2t-5)g^4 - \\ & - \frac{7}{6}(t-2)t^2g^6 + \frac{1}{60}t(2t-3)g^8 - \frac{(t-1)g^{10}}{1575} + \frac{(2-1/t)g^{12}}{302400}, \\ F_2(g, t) &= \frac{6864}{5}t^5(2t-7) - \frac{2002}{5}(t-3)t^4g^2 + \frac{66}{5}t^3(2t-5)g^4 - \\ & - (t-2)t^2g^6 + \frac{1}{90}t(2t-3)g^8 - \frac{(t-1)g^{10}}{4200}. \end{aligned}$$

С одной стороны, возможно численное решение дифференциального уравнения, при этом для задания начального условия для малого t воспользуемся асимптотическим разложением функции $q(t)$ при $t \rightarrow 0$: $q(t) \approx t$. Отсюда при $g(t) = t$ из (39) получим $\delta(t) = \sqrt{26,7251}t$. С другой сто-

роны, решение уравнения (39) может быть получено аналитически с представлением функции $\delta(t)$ в виде степенного полинома $\delta(t) = \sum_{i=1}^M d_j t^{\frac{2i-1}{2}}$. Его подстановка в (39) с последующим приравниванием слагаемых при одинаковых степенях дает коэффициенты d_j ($j = \overline{1, M}$). Для $M = 7$ находим

$$\delta(t) = \sqrt{26,7251t} (1 - 0,07753t + 0,0756t^2 - 0,11306t^3 + 0,1936t^4 - 0,36025t^5 + 0,7074t^6). \quad (40)$$

Как показывает анализ, полученное решение является расходящимся, что дает основание судить о его допустимости при $0 < t < 0,4$ (рис. 5). Избежать расхождения решения при достаточно больших временах t позволяет диагональная аппроксимация Паде [13] с трансформацией решения (40) рациональной дробью $\delta(t) = \alpha \sqrt{t} P_{(N-1)/2}(t) / Q_{(N-1)/2}(t)$, где $P_{N/2}(t)$ и $Q_{N/2}(t)$ – полиномы степени $(N - 1)/2$. Из (40) получаем

$$\delta(t) = \frac{1 + 3,2081t + 2,42209t^2 + 0,175606t^3}{1 + 3,28562t + 2,60121t^2 + 0,241942t^3} \sqrt{26,7251t}. \quad (41)$$

Представленный на рис. 5 график, описываемый формулой (41), практически полностью сливается с кривой для численного решения дифференциального уравнения (38).

На рис. 6, а представлены температурные профили для разных моментов времени в пределах действия лазерного импульса, установленные на основе точной и приближенной формул. Относительная ошибка, рассчитываемая как $\varepsilon_T = (T(x, t) - T^*(x, t)) / T^*(0, t) \cdot 100 \%$, при $t = 0,5$ не превышает значения 0,06 % (рис. 6, б).

Характерной особенностью полученных нами полиномиальных решений является возможность получения графических решений в виде полей изотермических линий. Отметим, что вопрос расчета и анализа кинематики формирования изотерм на основе классических аналитических решений приведен в [14].

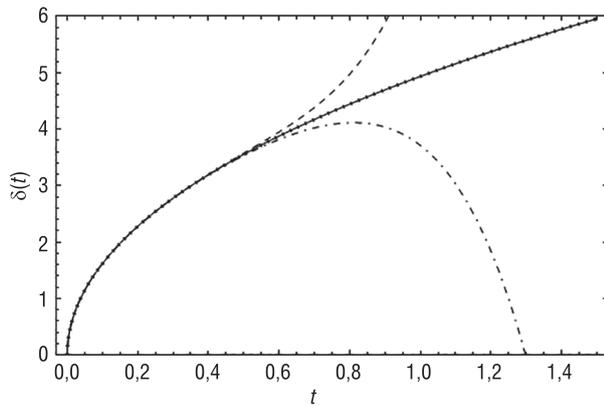


Рис. 5. Временная зависимость фронта температурного возмущения при лазерном импульсе параболической временной формы (34): расчет температурного фронта возмущения на основе численного решения дифференциального уравнения (39) (сплошная кривая), по формуле (40) с сохранением шести (штриховая кривая) и семи (штрихпунктирная кривая) членов ряда и на основе (41) (пунктирная кривая)

Fig. 5. Time change in the temperature-disturbance front in the case of action of a parabolic laser pulse (34) on the body, calculated by Eq. (39) (full line), formula (40) with conservation of six (dashed line) and seven (dash-dotted line) series terms, and relation (41) (dotted line)

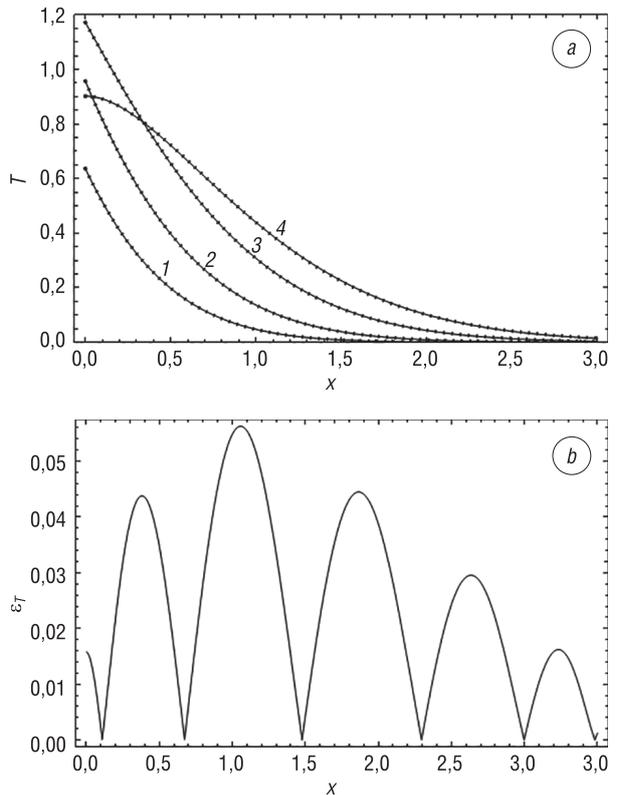


Рис. 6. Температурные профили при действии лазерного импульса параболической временной формы (34) в различные моменты времени: $t = 0,1$ (1), $0,2$ (2), $0,5$ (3), $1,0$ (4) на основе точного решения (сплошная линия) и ИМГХ (пунктирная линия) (а); отклонение E при $t = 0,2$ и $N = 5$ (сплошная линия) и $N = 8$ (штриховая линия) (б)

Fig. 6. Temperature profiles in the case of action of a parabolic laser pulse (34) on the body at the instants of time $t = 0.1$ (1), 0.2 (2), 0.5 (3), and 1.0 (4), obtained on the basis of the exact solution (full line) and the BChM (dotted line), (a) and deviation E at $t = 0.2$ and $N = 5$ (full line) and $N = 8$ (dashed line) (b)

Принцип построения изотерм рассмотрим на примере параболического импульса. Задав различные значения температуры T_i ($i = 1, 2, \dots$), получим следующее семейство уравнений:

$$\left(1 - \frac{x}{\delta(t)}\right)^2 \sum_j^5 a_j(t) \left(\frac{x}{\delta(t)}\right)^j = T_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (42)$$

которые задают зависимость

$$x_i = f(t, T_i), \quad i = 1, 2, \dots \quad (43)$$

На рис. 7, *a* приведены построенные на основе (43) графики зависимости температур от координаты x и времени t (графики изотерм). Полученные кривые отмечают пространственно-временные области для разных значений относительной температуры. Не останавливаясь подробно на дальнейшем построении и анализе подобных изотерм, отметим, что данные кривые могут служить очень удобным инструментом в прогнозировании глубины и качества плазменной импульсной закалки. Они позволяют устанавливать не только значения температуры в зависимости от глубины от поверхности, но и времена (периоды), отвечающие данным температурам.

Одновременно с изотермами важным параметром для плазменной импульсной закалки является скорость нагрева/охлаждения [1–9]. В связи с этим полученные в настоящей работе полиномиальные решения позволяют достаточно легко строить изолинии равных скоростей нагрева/охлаждения. Продифференцировав выражение (42) по t , запишем

$$\frac{x}{\delta} \left(\frac{\delta'}{\delta}\right) \left[2a_0 + \sum_{j=1}^5 a_j \left((2+j)\frac{x}{\delta} - j\right)\right] + \left(1 - \frac{x}{\delta}\right) \sum_{i=0}^6 a'_j \left(\frac{x}{\delta}\right)^i = \left(\frac{dT}{dt}\right)_i = v_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (44)$$

где

$$\frac{\delta'}{\delta} = \frac{11,7684 + 74,5963t + 174,731t^2 + 182,985t^3 + 80,6931t^4 + 9,2308t^5 + 0,5t^6}{t(23,5369 + 152,842t + 366,326t^2 + 393,55t^3 + 180,14t^4 + 24,5441t^5 + t^6)}$$

На рис. 7, *b* представлены построенные на основе (44) графики для одинаковых скоростей нагрева/охлаждения (изотахи). Обращает внимание формирование двух характерных областей соответственно для положительного и отрицательного значений скорости v . Их отделяет нулевая изоха $v = 0$, имеющая начало в точке $t = 3/4$ при $x = 0$.

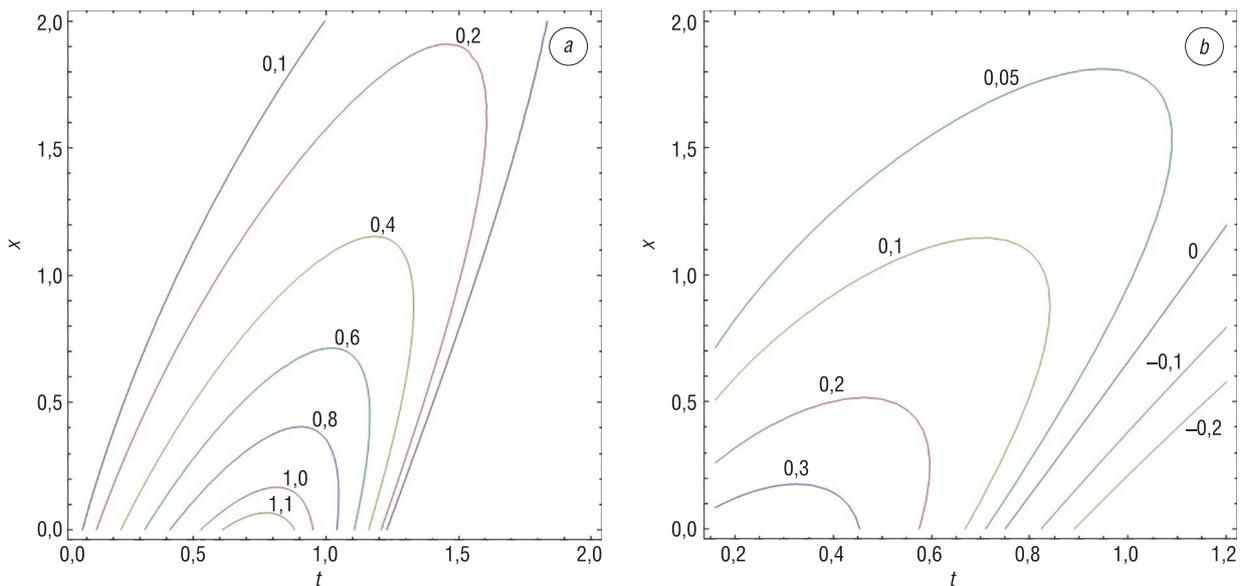


Рис. 7. Изотермы (*a*) и изотахи (*b*) в полупространстве при воздействии на полупространство лазерного импульса параболической временной формы

Fig. 7. Isotherms (*a*) and isotherms (*b*) of the semi-bounded body in the case of action of a parabolic pulse on it

Заклучение. Получены точные и приближенные решения нестационарной задачи теплопроводности для полуограниченного тела при действии на поверхности лазерного импульсного теплового потока. Последовательно рассмотрены прямоугольная, треугольная и параболическая временные функции лазерного импульса. Построенные полиномиальные решения на основе интегрального метода граничных характеристик дают практически точные решения для температурной функции $T(x, t)$ и ее производной $dT(x, t)/dt$, причем как на стадии нагрева, так и стадии охлаждения. Представленный в работе подход с описанием решений в виде степенных полиномов позволяет достаточно просто и эффективно находить решения в виде одинаковых температур (изотермы) и линий равных скоростей нагрева/охлаждения (изотахи). Из анализа полученных результатов следует, что эффективное решение технологических задач, в основе которых лежит использование импульсного лазерного излучения, во многом определяется успешным решением задачи управления временной формой лазерного импульса. В дальнейшем предполагается на основе ИМГХ с использованием полученных результатов решить ряд важных задач по оптимизации нагрева и охлаждения поверхности массивных тел под действием импульсных лазерных излучений разной формы, в том числе состоящих из серии импульсов.

Список использованных источников

1. Коваленко, В.С. Упрочнение и легирование деталей машин лучом лазера / В.С. Коваленко, Л.Ф. Головки, В.С. Черненко. – Киев: Техніка, 1990. – 192 с.
2. Гуреев, Д.М. Основы физики лазеров и лазерной обработки материалов / Д.М. Гуреев, С.В. Ямшиков. – Самара: СамГУ, 2001. – 393 с.
3. Рыкалин, Н.Н. Расчеты тепловых процессов при сварке / Н.Н. Рыкалин. – М.: Машиностроение, 1951. – 296 с.
4. Реди, Дж. Промышленные применения лазеров / Дж. Реди. – М.: Мир, 1981. – 640 с.
5. Взаимодействие лазерного излучения с металлами / А.М. Прохоров [и др.]. – М.: Наука, 1988. – 550 с.
6. Рыкалин, Н.Н. Лазерная обработка материалов / Н.Н. Рыкалин, А.А. Углов, А.Н. Кокора. – М.: Машиностроение, 1975. – 2296 с.
7. Гуреев, Г.Д. Влияние временной формы лазерного импульса на характер изменения температуры поверхности на стадии нагрева / Г.Д. Гуреев, М.Д. Гуреев // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2008. – Вып. 1 (16). – С. 130–135. <https://doi.org/10.14498/vsgtu584>
8. Гуреев, Г.Д. Сопоставительный анализ скоростей нагрева поверхности лазерными импульсами различной временной формы / Г.Д. Гуреев, Д.М. Гуреев // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2009. – Вып. 1 (18). – С. 191–197. <https://doi.org/10.14498/vsgtu637>
9. Гуреев, Г.Д. К вопросу о зависимости глубины зоны импульсной лазерной закалки от временной формы импульса / Г.Д. Гуреев, Д.М. Гуреев // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2009. – Вып. 2 (19). – С. 284–287. <https://doi.org/10.14498/vsgtu681>
10. Стефанюк, Е.В. Управление потоком лазерного излучения при обработке материалов / Е.В. Стефанюк // Изв. высш. учеб. заведений. Проблемы энергетики. – 2009. – № 5–6. – С. 10–17.
11. Кот, В.А. Интегральный метод решения задач теплопроводности с граничным условием второго рода. 1. Основные положения / В.А. Кот // Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – Т. 63, №2. – С. 201–213. <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2018-63-2-201-213>
12. Кот, В.А. Интегральный метод решения задач теплопроводности с граничным условием второго рода. 2. Анализ точности / В.А. Кот // Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2018. – Т. 63, №3. – С. 318–332. <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2018-63-3-318-332>
13. Бейкер, Дж. Аппроксимация Паде / Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
14. Цирельман, Н.М. Прямые и обратные задачи тепломассопереноса / Н.М. Цирельман. – М.: Энергоатомиздат, 2005. – 392 с.

References

1. Kovalenko V. S., Golovko L. F., Chernenko V. S. *Hardening and Doping of Machine Elements by Laser Beam*. Kiev, Tekhnika, 1990. 192 p. (in Russian).
2. Gureev D. M., Yamshchikov S. V. *Foundations of Laser Physics and Laser Processing of Materials*. Samara, Samara State University Publ., 2001. 393 p. (in Russian).
3. Rykalin N. N. *Calculations of Thermal Processes in Welding*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1951. 296 p. (in Russian).
4. Redi D. *Industrial Applications of Lasers*. N. Y., Academic Press, 1978. 604 p. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-583960-0.X5001-1>
5. Prokhorov A. M., Konov V. I., Ursu I., Mikhelesku I. N. *Interaction of Laser Radiation with Metals*. Moscow, Nauka Publ., 1988. 550 p. (in Russian).

6. Rykalin N. N., Uglov A. A., Kokora A. N. *Laser Processing of Materials*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975. 2296 p. (in Russian).
7. Gureev G. D., Gureev D. M. Influence of temporal form of laser pulse on surface temperature change by heating. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki = Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2008, iss. 1 (16), pp. 130–135 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu584>
8. Gureev G. D., Gureev D. M. Comparative analysis of speeds of surface heating by laser impulses of different temporal form. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki = Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2009, iss. 1 (18), pp. C. 191–197 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu637>
9. Gureev G. D., Gureev D. M. To the question of dependence of pulse laser hardening zone depth on pulse temporal form. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki = Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2009, iss. 2 (19), pp. 284–287 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu681>
10. Stefanyuk E. V. Control of a laser-radiation beam in the processing of materials. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Problemy energetiki = Proceedings of the Higher Educational Institutions. Energy Sector Problems*, 2009, no. 5–6, pp. 10–17 (in Russian).
11. Kot V. A. Integral method of solving heat-conduction problems with the second-kind boundary condition. 1. Basic statements. *Vesti Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2018, vol. 63, no. 2, pp. 201–213 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2018-63-2-201-213>
12. Kot V. A. Integral method of solving heat-conduction problems with the second-kind boundary condition. 2. Analysis of accuracy. *Vesti Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2018, vol. 63, no. 3, pp. 318–332 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2018-63-3-318-332>
13. Beiker D., Greivs-Morris P. *Pade Approximation*. Cambridge University Press, 1996. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511530074>
14. Tsirel'man N. M. *Direct and Inverse Problems on Heat and Mass Transfer*. Moscow, Energoatomizdat Publ., 2005. 392 p. (in Russian).

Информация об авторе

Кот Валерий Андреевич – кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории турбулентности, Институт тепло- и массообмена имени А.В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси (ул. П. Бровки, 15, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: valery.kot@hmti.ac.by

Information about the author

Valery A. Kot – Ph. D. (Engineering), Senior Researcher of the Laboratory of Turbulence, A. V. Luikov of Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus (15, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: valery.kot@hmti.ac.by