

О.Л. Швед

*Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЧИСТОГО СДВИГА ДЛЯ ИДЕАЛЬНО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА (МАТЕРИАЛА МУРНАГАНА)

**Аннотация.** Сформулированы определяющие уравнения для случая, когда точка процесса располагается в сингулярной точке девиаторного сечения поверхности текучести. Выбран основной параметр упругопластического материала Мурнагана – относительная часть рассеиваемой удельной мощности деформации. Эта величина зависит от вида напряженно-деформированного состояния, скорости деформации и истории нагружения материала. Данная зависимость обусловлена рациональным выбором параметра роста упругой деформационной анизотропии с учетом базовых экспериментов. Разработаны комплексы программ на языке ФОРТРАН и выполнено численное моделирование процесса чистого сдвига. Представлены результаты расчетов процесса, проведенного до момента разрушения материала согласно предложенному нестандартному критерию разрушения. Описано явление увеличения пластичности материала для чистого сдвига при приложенном высоком гидростатическом давлении. Подтверждены опытные данные Бриджмена о наличии пороговой величины давления для труднодеформируемых металлов.

**Ключевые слова:** упругопластический материал Мурнагана, чистый сдвиг, численное моделирование

**Для цитирования:** Швед, О.Л. Численное моделирование чистого сдвига для идеально упругопластического материала (материала Мурнагана) / О.Л. Швед // Вестн. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. – 2019. – Т. 64, №2. – С. 182–189. <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2019-64-2-182-189>

O. L. Shved

*United Institute of Informatics Problems of National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

## NUMERICAL MODELING OF A CLEAN SHIFT FOR PERFECTLY ELASTIC-PLASTIC MATERIAL (MURNAGHAN'S MATERIAL)

**Abstract.** The constitutive equations are formulated for the case when the process point is located at the singular point of the deviator section of the yield surface. The main parameter of Murnaghan's elastic-plastic material is selected – the relative part of the dissipated specific power of deformation. This value depends on the type of stress-strain state, strain rate and material loading history. This dependence is due to the rational choice of the growth parameter of the elastic deformation anisotropy, which ensures its minimum value. Complex programs in FORTRAN language have been developed and the pure shift process has been numerically simulated. The results of calculations of the process carried out before the moment of material destruction according to the proposed non-standard fracture criterion are presented. The phenomenon of increasing the plasticity of the material for pure shear with applied high hydrostatic pressure is described. Bridgman's experimental data on the presence of a threshold pressure value for hard-to-deform metals is confirmed.

**Keywords:** Murnaghan's elastic-plastic material, pure shear, numerical simulation

**For citation:** Shved O. L. Numerical modeling of a clean shift for perfectly elastic-plastic material (Murnaghan's material). *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2019, vol. 64, no. 2, pp. 182–189 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2019-64-2-182-189>

**Введение.** Проблема обобщения модели упругого материала Мурнагана [1, 2] на упругопластичность рассмотрена в [3]. Для ее решения применялось требование двойной потенциальности в напряжениях и скоростях напряжений. Предполагалось, что активный упругопластический процесс происходит попеременным чередованием пластических и упругих состояний. Были сформулированы определяющие уравнения упругопластического материала Мурнагана, получены девиаторные сечения поверхности текучести в пространстве напряжений и специфический критерий макроразрушения материала при течении. В качестве базовых экспериментов использовались нагружения одноосные (растяжение, сжатие) и двухосные (растяжение, сжатие).

При численном моделировании базовых экспериментов, проведенных до момента разрушения, материал для необходимого упрощения предполагался идеально упругопластическим. В рамках ортотропного материала автором было выполнено численное моделирование базовых экспериментов [4].

*Цель данной работы* – проверка возможностей модели материала при решении задачи о чистом сдвиге при условии, что нагружение проводится до момента разрушения, а также исследование явления увеличения пластичности материала при наложении высокого гидростатического давления сжатия.

**Постановка задачи.** В отсчетной конфигурации рассматривается куб: вектор места  $\mathbf{r} = a^i \mathbf{i}_i$ ,  $0 \leq a^i \leq 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;  $\mathbf{i}_i$  – ортонормированный триэдр. В задаче о чистом сдвиге реализуется напряженное состояние  $\mathbf{T} = \tau(\mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_2)$ , где  $\mathbf{T}$  – тензор напряжений Коши [1]. Отыскивается преобразование отсчетной конфигурации в актуальную конфигурацию и напряженно-деформированное состояние.

Задача рассматривается для двух случаев: простой чистый сдвиг и комбинированный чистый сдвиг при дополнительном высоком гидростатическом давлении сжатия.

В первом случае нагружение проводится до момента разрушения в результате пластической деформации и роста упругой деформационной анизотропии [3]. Для этого в рамках ортотропного материала требуется сформулировать критерий разрушения. Предполагается также исследовать возможность описания эффекта Баушингера.

Во втором случае требуется установить возможность описания явления увеличения пластичности материала. Следует найти величину порогового напряжения, с которого наступает увеличение пластичности для труднодеформируемого металла. Необходимо определить граничные величины гидростатического давления для идеально упругопластического материала Мурнагана [3].

Следует разработать комплексы программ для численного моделирования и выполнить их проверку. В частности проверить совпадение конечных точек при разных путях обхода по дивидаторному сечению поверхности текучести расчетной точки из точки процесса в противоположную ей точку.

Для упругопластического материала используются данные по рекристаллизованному вольфраму с постоянными Ламе  $\lambda = 163$ ,  $\mu = 137$ ,  $\nu_1 = -429$ ,  $\nu_2 = -258$ ,  $\nu_3 = -267$  (ГПа) [1]. Величина напряжения текучести взята при простом растяжении  $\sigma = 0,45$  ГПа и при простом сжатии  $\sigma = -0,45$  ГПа.

**Методика численных экспериментов в упругом состоянии.** Для решения задачи удобно перейти от первоначального триэдра  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  к другому триэдру  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ :

$$\mathbf{c}_2 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3), \mathbf{c}_3 = (\sqrt{2})^{-1}(-\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3), \mathbf{c}_1 = \mathbf{i}_1. \quad (1)$$

В этом базисе с учетом (1) имеет место

$$\mathbf{T} = \tau(\mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_3). \quad (2)$$

Обозначим  $\sigma_0 = -0,15$  ГПа. По кривой пластичности для изотропного материала в сингулярной точке определяется величина  $\tau = 0,56$  ГПа.

Вектор места в отсчетной конфигурации будет  $\mathbf{r} = q^i \mathbf{c}_i = a^i \mathbf{i}_i$ . Вектор места в актуальной конфигурации положим  $\mathbf{R} = \mathbf{r} + Zq^1 \mathbf{c}_1 + Xq^2 \mathbf{c}_2 + Yq^3 \mathbf{c}_3$ .

Рассмотрим, как преобразуется сечение куба плоскостью  $a^1 = k$  ( $0 \leq k \leq 1$ ). Имеем

$$q^1 = a^1, \quad q^2 = (\sqrt{2})^{-1}(a^2 + a^3), \quad q^3 = (\sqrt{2})^{-1}(-a^2 + a^3), \quad \mathbf{R} = (1 + Z)q^1 \mathbf{c}_1 + (1 + X)q^2 \mathbf{c}_2 + (1 + Y)q^3 \mathbf{c}_3.$$

С точностью до вектора  $(1 + Z)k\mathbf{c}_1$  находим вектор  $\mathbf{R}$ .

Пусть  $a^2 = 0, a^3 = 0$ , тогда  $q^2 = 0, q^3 = 0, \mathbf{R} = 0$ .

Пусть  $a^2 = 0, a^3 = 1$ , тогда  $q^2 = (\sqrt{2})^{-1}, q^3 = (\sqrt{2})^{-1}, \mathbf{R} = (\sqrt{2})^{-1}((1 + X)\mathbf{c}_2 + (1 + Y)\mathbf{c}_3)$ .

Пусть  $a^2 = 1, a^3 = 1$ , тогда  $q^2 = \sqrt{2}, q^3 = 0, \mathbf{R} = \sqrt{2}(1 + X)\mathbf{c}_2$ .

Пусть  $a^2 = 1, a^3 = 0$ , тогда  $q^2 = (\sqrt{2})^{-1}, q^3 = -(\sqrt{2})^{-1}, \mathbf{R} = (\sqrt{2})^{-1}((1 + X)\mathbf{c}_2 - (1 + Y)\mathbf{c}_3)$ .

Следовательно, квадрат  $\{(a^2, a^3)\}$  преобразуется в ромб, что подтверждается физическими опытами на кручение. Сам куб  $\{(a^1, a^2, a^3)\}$  преобразуется в параллелепипед.

Вычисляем основные и взаимные векторные базисы в отсчетной конфигурации  $\mathbf{r}_i = \frac{\partial}{\partial q^i} \mathbf{r} = \mathbf{c}_i$ ,  $\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}^j = \delta_i^j$ ,  $\mathbf{r}^i = \mathbf{r}_i = \mathbf{c}_i$ , а также основные и взаимные векторные базисы в актуальной конфигурации:  $\mathbf{R}_1 = \frac{\partial}{\partial q^1} \mathbf{R} = (1+Z)\mathbf{c}_1$ ,  $\mathbf{R}_2 = \frac{\partial}{\partial q^2} \mathbf{R} = (1+X)\mathbf{c}_2$ ,  $\mathbf{R}_3 = \frac{\partial}{\partial q^3} \mathbf{R} = (1+Y)\mathbf{c}_3$ ;  $\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}^j = \delta_i^j$ ,  $\mathbf{R}^1 = (1+Z)^{-1}\mathbf{c}_1$ ,  $\mathbf{R}^2 = (1+X)^{-1}\mathbf{c}_2$ ,  $\mathbf{R}^3 = (1+Y)^{-1}\mathbf{c}_3$ .

Находим градиенты, меры Коши–Грина и Фигнера упругой деформации:

$$\begin{aligned} \overset{0}{\nabla} \mathbf{R} &= \mathbf{r}^i \mathbf{R}_i = (1+Z)\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 + (1+X)\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 + (1+Y)\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3 = \mathbf{R}_i \mathbf{r}^i = \overset{0}{\nabla} \mathbf{R}^T, \\ \mathbf{G} &= \overset{0}{\nabla} \mathbf{R} \cdot \overset{0}{\nabla} \mathbf{R}^T = (1+Z)^2\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 + (1+X)^2\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 + (1+Y)^2\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3 = \overset{0}{\nabla} \mathbf{R}^T \cdot \nabla \mathbf{R} = \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (3)$$

В упругом состоянии для изотропного материала удельная потенциальная энергия деформации описывается выражением

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= 4^{-1}(4^{-1}(-12\lambda - 8\mu + 9\nu_1 + 18\nu_2 + 8\nu_3)I_1 + 4^{-1}(2\lambda + 4\mu - 3\nu_1 - 10\nu_2 - 8\nu_3)I_1^2 + \\ &+ (-2\mu + 3\nu_2 + 4\nu_3)I_2 - (\nu_2 + 2\nu_3)I_1I_2 + 12^{-1}(\nu_1 + 6\nu_2 + 8\nu_3)I_1^3 + 2\nu_3I_3) + c, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $I_i$  – главные инварианты упругой меры Коши–Грина  $\mathbf{G}$ ,  $c$  – минимальная скалярная величина, обеспечивающая условие  $\varepsilon = \varepsilon_0 \geq 0$ .

Из (4) получаем определяющее уравнение в конечном виде для тензора напряжений Коши  $\mathbf{T}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = \mathbf{T}_0 &= 2\sqrt{I_3^{-1}}\mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^T = 2(\sqrt{I_3})^{-1}(\varphi_0\mathbf{E} + \varphi_1\mathbf{F} + \varphi_2\mathbf{F}^2) \quad (\mathbf{F}_e = \overset{0}{\nabla} \mathbf{R}^T), \\ \varphi_0 &= a_0I_3, \quad \varphi_1 = b_0 + b_1I_1 + b_2I_1^2 + b_3I_2, \quad \varphi_2 = c_0 + c_1I_1, \quad a_0 = 2^{-1}\nu_3, \\ b_0 &= 16^{-1}(-12\lambda - 8\mu + 9\nu_1 + 18\nu_2 + 8\nu_3), \quad b_1 = 8^{-1}(2\lambda - 3\nu_1 - 4\nu_2), \\ b_2 &= 16^{-1}(\nu_1 + 2\nu_2), \quad b_3 = -4^{-1}(\nu_2 + 2\nu_3), \quad c_0 = 4^{-1}(2\mu - 3\nu_2 - 4\nu_3), \quad c_1 = -b_3. \end{aligned} \quad (5)$$

Обозначим значения величин  $Z, X, Y$  в начале течения соответственно через  $Z_0, X_0, Y_0$ . Путем обращения закона (5) численным методом из (3) при чистом сдвиге, а также при чистом сдвиге под гидростатическим давлением сжатия  $p$  находим:

$$\begin{aligned} Z_0 &= 0,9999994373, \quad X_0 = 0,0020511, \quad Y_0 = -0,00896 \quad (p = 0), \\ Z_0 &= 0,92938, \quad X_0 = -0,069, \quad Y_0 = -0,07223 \quad (p = 550\sigma_0), \\ Z_0 &= 0,8581, \quad X_0 = -0,1395, \quad Y_0 = -0,1443 \quad (p = 1500\sigma_0). \end{aligned} \quad (6)$$

**Методика численных экспериментов в пластическом состоянии.** Потенциал напряжений  $\varepsilon$  дополняется анизотропными структурами второй  $\varepsilon_2$  и третьей  $\varepsilon_3$  степеней:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_0 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + c, \\ \varepsilon_2 &= 4^{-1}(\sum \delta_i((\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)^2 - 1) + \delta_8((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) - 1) + \\ &+ \delta_9((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) - 1) + \delta_{10}((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) - 1)), \\ \varepsilon_3 &= 8^{-1}(\sum \delta_{21+i}((\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)^3 + 1) + \delta_{25}((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)^2(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) + 1) + \\ &+ \delta_{26}((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)^2(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) + 1) + \delta_{27}((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)^2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) + 1) + \\ &+ \delta_{28}((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)^2(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) + 1) + \delta_{29}((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)^2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) + 1) + \\ &+ \delta_{30}((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)^2(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) + 1) + \delta_{31}((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) + 1)). \end{aligned} \quad (7)$$

В (7)  $i = \overline{1, 3}$ . Ненулевых параметров упругой анизотропии  $\delta_j$  будет 16, индекс  $j \in \{1-3, 8-10, 22-31\}$ . Первоначальные значения параметров нулевые.

Тензор напряжений Коши для анизотропного материала по (5), (7) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T} &= \mathbf{T}_0 + \Sigma \delta_j \mathbf{T}_j, \quad \Sigma \delta_j \mathbf{T}_j = 2L_3^{-1} \mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial(\vartheta_2 + \vartheta_3)}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^T (L_3 = \sqrt{I_3}), \\
 \mathbf{T}_i &= L_3^{-1} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1) \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V}, \\
 \mathbf{T}_{3+i} &= 4^{-1} L_3^{-1} ((\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1) \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V} + 2\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V}), \\
 \mathbf{T}_8 &= L_3^{-1} 2^{-1} \mathbf{V} \cdot ((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2) \cdot \mathbf{V}, \\
 \mathbf{T}_9 &= L_3^{-1} 2^{-1} \mathbf{V} \cdot ((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2) \cdot \mathbf{V}, \\
 \mathbf{T}_{10} &= L_3^{-1} 2^{-1} \mathbf{V} \cdot ((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3) \cdot \mathbf{V}, \\
 \mathbf{T}_{21+i} &= 4^{-1} 3 L_3^{-1} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V}, \\
 \mathbf{T}_{25} &= 4^{-1} L_3^{-1} (2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V}), \\
 \mathbf{T}_{26} &= 4^{-1} L_3^{-1} (2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V}), \\
 \mathbf{T}_{27} &= 4^{-1} L_3^{-1} (2(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V}), \\
 \mathbf{T}_{28} &= 4^{-1} L_3^{-1} (2(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V}), \\
 \mathbf{T}_{29} &= 4^{-1} L_3^{-1} (2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V}), \\
 \mathbf{T}_{30} &= 4^{-1} L_3^{-1} (2(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V}), \\
 \mathbf{T}_{31} &= 4^{-1} L_3^{-1} ((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} + \\
 &+ (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V}), \tag{8}
 \end{aligned}$$

где  $\mathbf{F}_e$  – неособенный тензор, заменяющий в упругопластичности деформационный градиент и  $\mathbf{C}_i = \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{O} = \mathbf{c}_i$ , собственно ортогональный тензор упругого поворота  $\mathbf{O} = \mathbf{E}$ .

При течении находим вектор скорости перемещений:  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}} = \dot{Z} \mathbf{c}_1 + \dot{X} \mathbf{c}_2 + \dot{Y} \mathbf{c}_3$ . Вычисляем градиенты скорости перемещений:

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{R}^i \frac{\partial}{\partial q^i} \mathbf{v} = \dot{Z}(1+Z)^{-1} \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1 + \dot{X}(1+X)^{-1} \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2 + \dot{Y}(1+Y)^{-1} \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_3, \quad \nabla \mathbf{v}^T = \left( \frac{\partial}{\partial q^i} \mathbf{v} \right) \mathbf{R}^i = \nabla \mathbf{v}.$$

Предполагаем  $\dot{Z} = 0$ . Вычисляем тензоры скорости деформаций и вихря:

$$\mathbf{D} = 2^{-1} (\nabla \mathbf{v}^T + \nabla \mathbf{v}) = \dot{X}(1+X)^{-1} \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2 + \dot{Y}(1+Y)^{-1} \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_3, \quad \mathbf{W} = 2^{-1} (\nabla \mathbf{v}^T - \nabla \mathbf{v}) = 0.$$

По условию несжимаемости  $\dot{Y} = -(1+Y)(1+X)^{-1} \dot{X}$  получаем  $\mathbf{D} = \dot{X}(1+X)^{-1} (\mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_3)$ . Дифференциальные уравнения при течении формулируются для величин  $\varepsilon$ ,  $\mathbf{T}$ ,  $\delta_j$ :

$$(L_3^{-1} \varepsilon) = (1 - \alpha) \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}, \quad \dot{\mathbf{T}} = 0, \tag{9}$$

$$\dot{\delta}_j = \beta k_j \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}_j \|\mathbf{T}_j\|^{-1} (\mathbf{T}_j \neq 0, \beta \geq 0, (k_j = \pm 1) \vee (k_j = 0), \|\mathbf{T}_j\| = \sqrt{\mathbf{T}_j \cdot \mathbf{T}_j}), \quad \dot{\delta}_j = 0 (\mathbf{T}_j = 0).$$

Скаляр  $\alpha$  в (9) является относительной частью рассеиваемой удельной мощности деформации. Параметр  $\beta$  характеризует скорость роста упругой анизотропии. В [3] указан выбор параметров анизотропии  $k_j$ , обеспечивающий минимальное значение величины  $\beta$ . Объективная производная в (9) совпадает с материальной производной.

Девятиорное сечение поверхности текучести образуется представителями двух семейств поверхностей, условно говоря, отвечающих за растяжение ( $i = 1$ ), сжатие ( $i = 2$ ), и тогда в (9)  $\alpha = \alpha_i$ ,  $\mathbf{N} = \mathbf{N}_i$ .

Рассмотрим общее задание функции  $\alpha_i = \alpha_i(\psi_i, \varphi_i, \alpha_{i1}, \alpha_{i2})$  [3]:

$$\alpha_i = \beta_i + (1 - \beta_i) A_i, \quad \beta_i = \alpha_{i1} + \varphi_i \varphi_{i2}^{-1} (x_i \alpha_{i2} - \alpha_{i1}), \quad A_i = 2\pi^{-1} \psi_i, \quad \psi_i = \arccos(\mathbf{N} \cdot \mathbf{D}_p \|\mathbf{D}_p\|^{-1}), \tag{10}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_i, \quad \mathbf{D}_p = \mathbf{D} \cdot \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1 + \mathbf{D} \cdot \mathbf{N}_2 \mathbf{N}_2, \quad \varphi_i = \arccos(\mathbf{N} \cdot \text{dev} \mathbf{T} \|\text{dev} \mathbf{T}\|^{-1}), \quad x_i = (1 - A_{i2} \alpha_{i2}^{-1})(1 - A_{i2})^{-1},$$

где  $\alpha_{i1}$ ,  $\alpha_{i2}$  определяются при проведенных до момента разрушения одноосных и двухосных растяжениях и сжатиях,  $\varphi_{i2}$  – величина угла  $\varphi_i$ ,  $\psi_{i2}$  – величина угла  $\psi_i$  при двухосных нагружениях Бриджмена [5].

Соотношения (10) удовлетворяют базовым экспериментам. Действительно, имеем при одноосном нагружении  $\varphi_i = \varphi_{i1}$ ,  $\psi_i = \psi_{i1}$ ,  $\varphi_{i1} = \psi_{i1} = 0$ ,  $A_i = 0$ ,  $\alpha_i = \beta_i$ ,  $\beta_i = \alpha_{i1}$ ,  $\alpha_i = \alpha_{i1}$ . При двухосном нагружении аналогично находим  $\varphi_i = \varphi_{i2}$ ,  $\psi_i = \psi_{i2}$ ,  $A_i = A_{i2}$ ,  $x_i = (1 - A_{i2}\alpha_{i2}^{-1})(1 - A_{i2})^{-1}$ ,  $\beta_i = x_i\alpha_{i2} = (\alpha_{i2} - A_{i2})(1 - A_{i2})^{-1}$ ,  $1 - \beta_i = (1 - \alpha_{i2})(1 - A_{i2})^{-1}$ ,  $\alpha_i = \beta_i + (1 - \beta_i)A_{i2} = \alpha_{i2}$ ,  $\alpha_i = \alpha_{i2}$ .

Обозначим  $A_{ii} = (1 - \beta_i)(2 - \beta_i - \beta_2)^{-1}$ . В сингулярной точке кривой пластичности в (9) для минимизации величины  $\beta$  выбирается  $\alpha = \alpha_1$ ,  $\mathbf{N} = \mathbf{N}_1$  при  $A_1 \leq A_{11}$  или  $\alpha = \alpha_2$ ,  $\mathbf{N} = \mathbf{N}_2$  при  $A_2 \leq A_{22}$  [3].

Углы  $\varphi_i$ ,  $\psi_i$  и параметр  $\alpha_i$  при одноосных растяжении, сжатии имеют следующие значения:  $\varphi_{11} = \psi_{11} = 0$ ,  $\varphi_{21} = \psi_{21} = 0$ ,  $\alpha_1 = \alpha_{11} = 0,99595$ ,  $\alpha_2 = \alpha_{21} = 0,99757$ .

При двухосных растяжении, сжатии получается:  $\varphi_{12} = 0,07808353$ ,  $\psi_{12} = 0,65048$ ,  $\varphi_{22} = 0,2663623$ ,  $\psi_{22} = 0,66279$ ,  $\alpha_1 = \alpha_{12} = 0,992$ ,  $\alpha_2 = \alpha_{22} = 0,99358$ .

В [3] определен тензор  $\overset{\Omega}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \Omega \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \Omega$  – объективная  $\mathbf{O}$ -производная тензора  $\mathbf{T}$ , где  $\Omega = \dot{\mathbf{O}}^T \cdot \mathbf{O}$  – упругий спин, который в рассматриваемых случаях нулевой. Введем девиатор-оператор  $\mathbf{Q}(\mathbf{D})$  –  $\mathbf{O}$ -производную тензора  $\text{dev}\mathbf{T}$ , вычисленную по соотношению  $\dot{\mathbf{F}}_e = \nabla \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{F}_e$  при условии несжимаемости:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3, \\ \mathbf{Q}_0 &= \text{dev}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{T} + 4L_3^{-1}(d\mathbf{F} \cdot \mathbf{D} + c_1\mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{D})\mathbf{F} + c_1\mathbf{F} \cdot \mathbf{D}\mathbf{F}^2 - \\ &\quad - \varphi_0\mathbf{D} + \varphi_2\mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}) \quad (d = b_1 + (2b_2 + b_3)I_1), \\ \mathbf{Q}_2 &= L_3^{-1} \text{dev}(\mathbf{V} \cdot (\sum (\delta_i 2\mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i + \\ &\quad + \delta_8(\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2) + \\ &\quad + \delta_9(\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3) + \\ &\quad + \delta_{10}(\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1)), \\ \mathbf{Q}_3 &= L_3^{-1} \text{dev}(\mathbf{V} \cdot (\sum 3\delta_{21+i}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)\mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i + \\ &\quad + \delta_{25}(((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1)\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 + \\ &\quad + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2) + \\ &\quad + \delta_{26}(((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1)\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 + \\ &\quad + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3) + \\ &\quad + \delta_{27}(((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2)\mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 + \\ &\quad + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1) + \\ &\quad + \delta_{28}(((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2)\mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 + \\ &\quad + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3) + \\ &\quad + \delta_{29}(((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1)\mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 + \\ &\quad + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1) + \\ &\quad + \delta_{30}(((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2)\mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 + \\ &\quad + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2) + \\ &\quad + \delta_{31}2^{-1}(((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2)\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 + \\ &\quad + ((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1)\mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 + \\ &\quad + ((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2)\mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3)) \cdot \mathbf{V}). \end{aligned} \quad (11)$$

Используя условия потенциальности [3], переходим к представлению девиатора  $\mathbf{Q}(\mathbf{D})$  (11) в пятимерном векторном пространстве в базисе  $\mathbf{W}_1 = (\sqrt{6})^{-1}(\mathbf{E} - 3\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3)$ ,  $\mathbf{W}_2 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1\mathbf{c}_1)$ ,  $\mathbf{W}_3 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1)$ ,  $\mathbf{W}_4 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_1)$ ,  $\mathbf{W}_5 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_2)$  с матрицей оператора  $\mathbf{Q} = (q_{ik})_{\substack{i=1,3 \\ k=1,5}}$ , которая для ортотропного материала может содержать только 7 ненулевых элементов:  $q_{11} = p_1 + 2p_2$ ,  $q_{22} = -p_1 + 2p_2$ ,  $q_{12} = q_{21} = \sqrt{3}p_2$ ,  $q_{33} = p_3$ ,  $q_{44} = p_4$ ,  $q_{55} = p_5$ .

Матрица  $\mathbf{Q}$  с учетом всегда возможного численного обращения закона Мурнагана (8) полностью определяется тензором напряжений Коши. Через точку процесса  $\text{dev}\mathbf{T} = \mathbf{T}$  в плоскости  $W_2 = \{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2\}$  проводится кусочно-гладкая кривая пластичности. Базисные векторы  $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$  задают направления осей в декартовой системе координат. Для чистого сдвига точка процесса находится в сингулярной точке. На кривой пластичности рассматривается расчетная точка, в кото-

рой вычисляется матрица  $Q$ . Расчетная точка перемещается на кривой пластичности по часовой стрелке из точки процесса, и ее расположение определяется углом  $\theta$  между радиус-векторами точки процесса и расчетной точки. Функция критерия разрушения, обнаруживающая недопустимое совпадение собственных значений матрицы  $Q$ , с учетом нормирования запишется в виде

$$X(\theta) = (p_1^2 + 3p_2^2)^{-3} \prod_{m=3}^5 (p_2^2 - p_1^2 - 4p_2p_m + p_m^2) \quad (p_n = p_n(\theta), \quad n = \overline{1,5}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi). \quad (12)$$

**Результаты численных экспериментов.** Разработаны алгоритмы и комплексы программ на языке Фортран для численного моделирования чистого сдвига при известных скоростях перемещений [6], проведенных до момента разрушения. Точка процесса расположена в основном двумерном подпространстве пространства девиаторов напряжений. Используются общие программные модули для триклинного материала Мурнагана. Головные программы комплексов выполняют процедуры: численного моделирования нагружений согласно соотношениям (4), (5), (7)–(12); построения сингулярных точек кривой пластичности в двумерном подпространстве  $W_2$  при обходах из точки процесса по поверхности девиаторного сечения в трех трехмерных подпространствах  $W_3 = \{W_1, W_2, W_3\}$ ,  $W_4 = \{W_1, W_2, W_4\}$ ,  $W_5 = \{W_1, W_2, W_5\}$  ( $W_2 = W_3 \cap W_4 \cap W_5$ ) ортогонально проекциям третьей, второй и первой осей соответственно; построения кривой пластичности; построения графика знакопеременной и непрерывной, критериальной функции (12) согласно полученному критерию разрушения вследствие пластической деформации.

На рис. 1 показаны результаты численного моделирования чистого сдвига, проведенного до момента разрушения: кривые пластичности и соответствующие функции разрушения. Стрелками обозначены проекции базисных диад  $c_i c_i$  на девиаторную плоскость  $W_2$ . Проекция первой диады направлена вниз, а проекция второй диады – вверх. Функция  $X(\theta)$  вычисляется из соотношения (12) в расчетной точке. Точка процесса отмечена на кривых пластичности чертой. На оси абсцисс большие штрихи соответствуют положениям сингулярных точек кривой пластичности, малые штрихи соответствуют приращению угла поворота  $\theta = 6^{-1}\pi$ . Появление макротрещины вследствие пластической деформации происходит при переходе нуля функции  $X(\theta)$  с одного регулярного участка кривой на другой [3], в данном случае в точке процесса.

Наблюдается проявление эффекта Баушингера. Его величина, определяемая отношением длин радиус-векторов расчетной противоположной точки (при  $\theta = \pi$ ) и точки процесса, составляет приблизительно 0,907. Противоположная точка вычислялась для проверки двумя способами с одним и тем же результатом: последовательным обходом в подпространствах  $W_4, W_5, W_3$  и  $W_3, W_5, W_4$ .

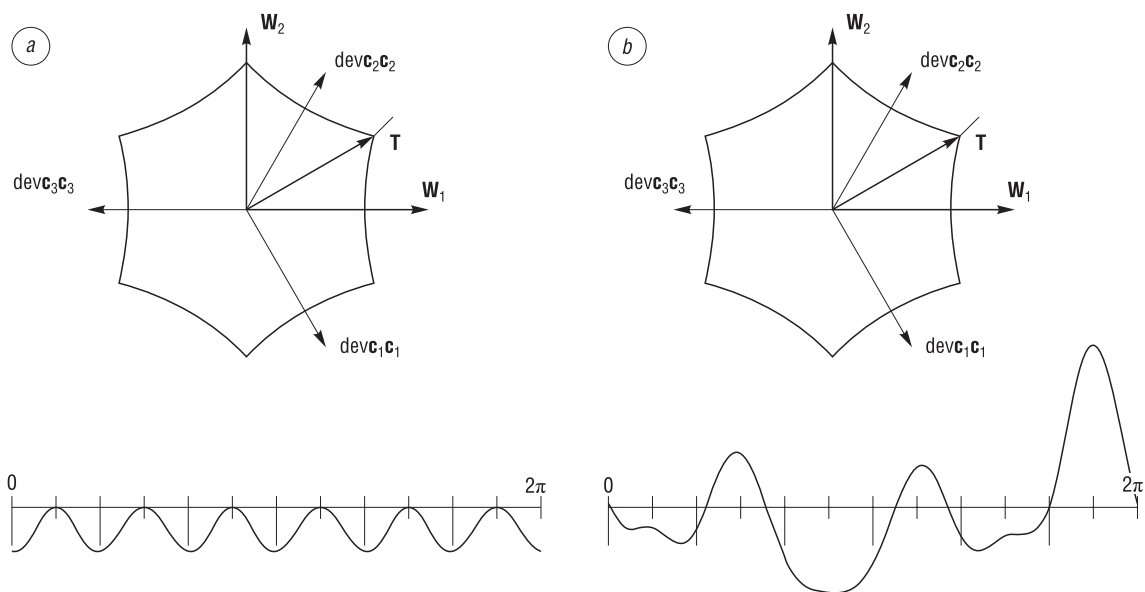


Рис. 1. Чистый сдвиг: *a* – изотропный материал, *b* – анизотропный материал  
 Fig. 1. Pure shear: *a* – isotropic material, *b* – anisotropic material

На рис. 2 и 3 представлены результаты численного моделирования явления увеличения пластичности материала при высоком гидростатическом давлении сжатия для чистого сдвига. Величина деформации была такая же, как при обычном чистом сдвиге на рис. 1. Для труднодеформируемых материалов, согласно опытам Бриджмена [5], при деформировании под высоким всесторонним давлением сжатия  $p$  существует такое пороговое напряжение  $p_0$ , что при  $|p| < |p_0|$  увеличения пластичности материала не происходит.

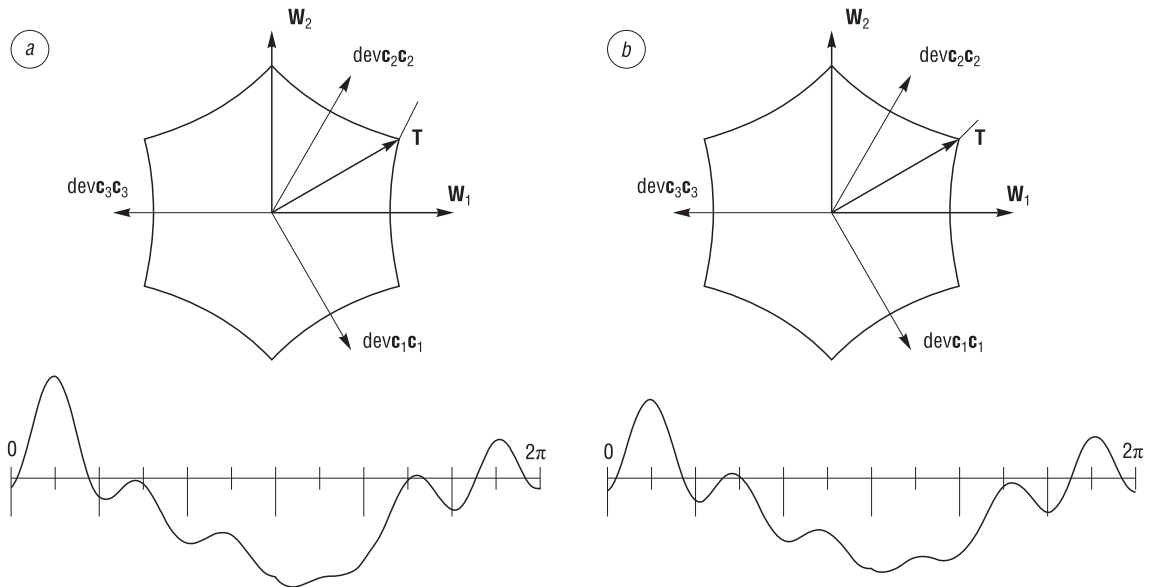


Рис. 2. Чистый сдвиг при высоком гидростатическом давлении сжатия  $p$ :  $a - p = 550\sigma_0$ ,  $b - p = 600\sigma_0$

Fig. 2. Pure shear with high hydrostatic pressure  $p$ :  $a - p = 550\sigma_0$ ,  $b - p = 600\sigma_0$

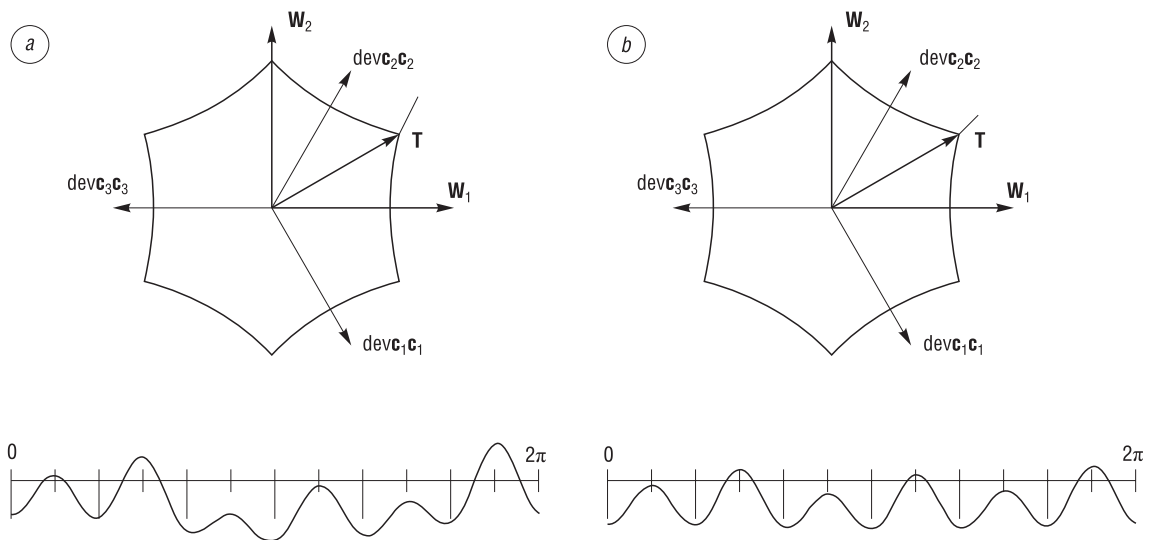


Рис. 3. Чистый сдвиг при высоком гидростатическом давлении  $p$ :  $a - p = 1000\sigma_0$ ,  $b - p = 1500\sigma_0$

Fig. 3. Pure shear with high hydrostatic pressure  $p$ :  $a - p = 1000\sigma_0$ ,  $b - p = 1500\sigma_0$

На рис. 2 наблюдается начальная стадия описания этого явления. На рис. 3,  $b$  имеет место конечная стадия. При дальнейшем повышении давления картина описания явления ухудшается. Возможно, это значение указывает границу применимости закона Мурнагана. Следует учитывать и предположение о том, что материал считается идеально упругопластическим. В случае описания увеличения пластичности при высоком гидростатическом давлении для простого сжатия получаются аналогичные результаты по величине  $p$  согласно ранее проведенным исследованиям.

При чистом сдвиге найдены следующие значения величин (в (10) и отмеченных ниже этого соотношения  $A_{11}, A_{22}$ ):  $A_1 = 0,48958$ ,  $A_2 = 0,51042$ ,  $A_{11} = 0,33035$ ,  $A_{22} = 0,66965$ ,  $\varphi_1 = \psi_1 = 0,77$ ,  $\varphi_2 = \psi_2 = 0,8$ ,  $\alpha_1 = 0,993$ ,  $\alpha_2 = 0,986$ . Реализуется случай  $A_2 < A_{22}$ ,  $\alpha = \alpha_2$ .

Вычислены также значения других величин при чистом сдвиге: дополняющие (6) параметры  $X = 0,00685$ ,  $Y = -0,00696$ , объем параллелепипеда  $V = 1,0000058$  ( $p = 0$ );  $X = -0,0642$ ,  $Y = -0,07699$ ,  $V = 0,80275$  ( $p = 550\sigma_0$ );  $X = -0,13474$ ,  $Y = -0,149$ ,  $V = 0,6318$  ( $p = 1500\sigma_0$ ).

**Заключение.** Обсуждаемая модель разрабатываемого нелинейно упругопластического материала имеет немаловажное теоретическое значение. Определяются девиаторные сечения поверхности текучести, которыми она образуется из представителей двух семейств поверхностей. Описывается процесс образования упругой деформационной анизотропии. Вследствие возможной неопределенности поверхности сечения получается нестандартный критерий разрушения [3].

Выполненные расчеты в задаче чистого сдвига подтвердили реальные возможности разрабатываемой модели материала и комплексов программ для численного моделирования. Благоприятной особенностью задачи о чистом сдвиге является то, что по точке процесса находятся оба представителя семейств кривых, которыми образуется кривая пластичности. Для одноосных и двухосных растяжения и сжатия требуется еще дополнительное предположение. Естественным образом обнаруживается проявление эффекта Баушингера (см. рис. 1, б). Описывается явление увеличения пластичности материала при дополнительном высоком гидростатическом давлении сжатия (см. рис. 2, 3). Однако величина порогового напряжения получается, вероятно, завышенной. Видимо, это связано с ограничительным предположением об идеальной упругопластичности материала.

### Список использованных источников

1. Лурье, А. И. Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
2. Murnaghan, F. D. *Finite Deformation of an Elastic Solid* / F. D. Murnaghan. – N. Y.: Dover, 1951. – 140 p.
3. Швед, О. Л. Модель упругопластического материала Мурнагана / О. Л. Швед // Прикладная математика и механика. – 2019. – Т. 83, № 1. – С. 158–172.
4. Швед, О. Л. Выбор параметров определяющих уравнений при течении нелинейно упругопластического материала / О. Л. Швед // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2017. – № 3. – С. 46–54.
5. Бриджмен, П. У. Исследование больших пластических деформаций и разрыва / П. У. Бриджмен. – М.: Иностранная литература, 1955. – 444 с.
6. Швед, О. Л. Вычисление изменения состояния упругопластического материала Мурнагана в условиях течения при известных скоростях перемещений / О. Л. Швед // Информатика. – 2018. – Т. 15, № 4. – С. 59–70.

### References

1. Lurie A. I. *Nonlinear Theory Elasticity*. Moscow, Nauka Publ., 1980. 512 p. (in Russian).
2. Murnaghan F. D. *Finite Deformation of an Elastic Solid*. N. Y., Dover, 1951. 140 p.
3. Shved O. L. Model of the Murnaghan elastic-plastic Material. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika = Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, vol. 83, no. 1, pp. 158–172 (in Russian).
4. Shved O. L. Setting determining equations for the flow nonlinear elastic-plastic material. *Vesti Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2017, no. 3, pp. 46–54 (in Russian).
5. Bridgman P. W. *Study of Large Plastic Deformation and Fracture*. McGraw-Hill, 1964. 362 p. <https://doi.org/10.4159/harvard.9780674731349>
6. Shved O. L. Calculation of the change in the state of the Murnaghan elastic-plastic material under flow conditions at known movement speeds. *Informatika = Computer Science*, 2018, vol. 15, no. 4, pp. 59–70 (in Russian).

### Информация об авторе

Швед Олег Лаврентьевич – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории идентификации систем, Объединенный институт проблем информатики Национальной Академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 6, г. Минск, 220012, Республика Беларусь). E-mail: swed@newman.bas-net.by

### Information about author

Oleg L. Shved – Ph. D. (Engineering), Leading Researcher of the Laboratory of System Identification, United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (6, Sarganov Str., Minsk, 220012, Belarus). E-mail: swed@newman.bas-net.by