УДК 539.3

А. С. КРАВЧУК, Е. В. ТОМИЛО

ЧИСТЫЙ ИЗГИБ СЛОИСТЫХ И КОМПОЗИЦИОННЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ БРУСЬЕВ ИЗ ЛИНЕЙНО-УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

Белорусский государственный университет,

Белорусский национальный технический университет

(Поступила в редакцию 03.04.2014)

Введение. В настоящее время теория чистого изгиба призматического бруса является классической и настолько простой, что складывается впечатление, что провести какое-либо обобщение данных исследований довольно сложно. Создано столько новых конструкционных материалов, что использование гипотезы однородности в этой теории выглядит слишком узким.

Данная работа призвана расширить круг решаемых теоретических задач с помощью технической теории чистого изгиба бруса и существенно приблизить классические теоретические модели к определению напряженного состояния современных технических изделий.

При построении обобщенной технической теории чистого изгиба призматическую балку постоянной толщины можно разделить на элементарные призматические волокна (рис. 1). Под чистым изгибом будем понимать изгиб, при котором продольные призматические волокна в балке не взаимодействуют в поперечном направлении [1].

Предполагается, что брус имеет прямоугольное сечение с постоянной высотой h и толщиной, равной Δ. Это значит, что отклонения в размерах поперечного сечения малы по сравнению с радиусом кривизны бруса и при его нагружениии не вносят существенной поправки в определение перемещения бруса и его напряженного состояния. Будем предполагать, что у призматического бруса постоянной толщины при чистом изгибе существует нейтральный слой, длина которого не изменяется при изгибе. Предполагается, что брус длиной ℓ можно условно разделить на волокна с постоянным прямоугольным сечением $\lambda \times \eta$ в плоскости XOY $(\lambda, \eta << \ell)$ (рис. 1).

Исследование деформации и распределения напряжений прямоугольного бруса в условиях чистого изгиба. Будем предполагать, что брус разделен поперечными плоскостями на конечное число поперечных элементов длиной нейтрального слоя dz. Следуя [1], рассмотрим деформацию любого поперечного элемента бруса. Исходя из очевидных рассуждений о геометрическом подобии длин элементарных волокон длине нейтрального слоя, можно установить, что деформации элементарных волокон относительно геометрического положения нейтрального слоя распределены следующим образом [1]:

$$\varepsilon_z = \frac{y-\delta}{\rho}, \tag{1}$$

где δ – координата нейтрального слоя относительно середины бруса, ρ – радиус кривизны нейтрального слоя. В этом случае для однородного линейно-упругого материала имеем

$$\sigma_z = E\frac{y-\delta}{\rho}, \tag{2}$$

где E – модуль упругости.

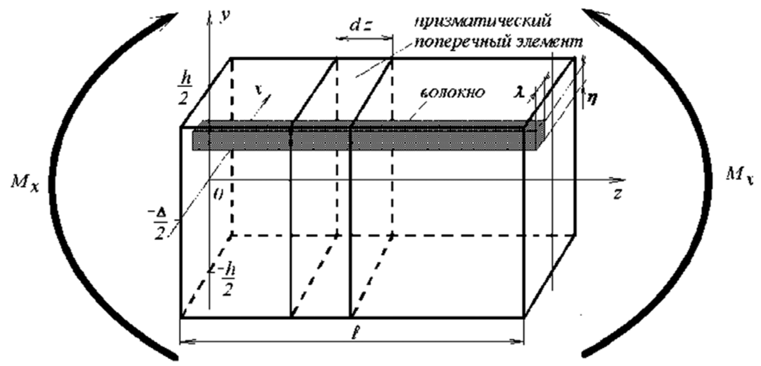

Рис. 1. Чистый изгиб призматического бруса

Исходя из того, что касательные напряжения, по нашему предположению, отсутствуют и чистый изгиб происходит в плоскости *YOZ*, необходимо удовлетворить три уравнения равновесия [1]:

$$\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int\limits_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \sigma_z dxdy = 0,\quad \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int\limits_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \left(\sigma_z y\right)dxdy = M_x,\quad \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int\limits_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \left(\sigma_z x\right)dxdy = 0. \qquad (3)$$

Подставляя выражение (2) в уравнения (3), получаем два уравнения, определяющие в общем случае положение нейтрального слоя δ относительно середины высоты бруса (рис. 1) и радиус кривизны ρ.

Для однослойного упругого однородного бруса уравнения равновесия (3) преобразуются к виду

$$\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(y-\delta\right)dy = 0,\quad \frac{E}{\rho}\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(y-\delta\right)ydy = \frac{M_x}{\Delta}. \qquad (4)$$

Окончательно можно получить известное решение: $\delta = 0,\ \frac{1}{\rho} = 12\frac{M_x}{h^3 E\Delta}$ [1].

Рассмотрим деформацию призматического горизонтально-слоистого упругого бруса постоянной толщины и ширины размером $\Delta\times h\times\ell$, состоящего из *N* слоев. При этом *k*-й слой ($k=\overline{1,N}$) имеет высоту h_k и модуль упругости E_k материала слоя (рис. 2, *а*).

Будем использовать гипотезу об однородном деформированном состоянии всех горизонтальных слоев призматического поперечного элемента бруса длиной *dz* (рис. 2, *а*), т. е. будем считать, что для всех слоев существуют постоянные $\langle\delta\rangle, \langle\rho\rangle$, такие что

$$\varepsilon_z = \frac{y-\langle\delta\rangle}{\langle\rho\rangle}. \qquad (5)$$

Пусть в точке *y* находится слой с номером *k*, тогда напряжения в нем определяются выражением

$$\sigma_{z,k} = E_k\frac{y-\langle\delta\rangle}{\langle\rho\rangle},\ y\in\left[-\frac{h}{2}+\sum_{i=0}^{k-1}h_i, -\frac{h}{2}+\sum_{i=0}^{k}h_i\right),\ k=\overline{1,N}, \qquad (6)$$

где $h_0 = 0$, E_k – модуль упругости *k*-го слоя. Подставляя выражение (6) в формулы (3), получаем

$$\sum_{k=1}^{N}E_k\left(\int\limits_{-\frac{h}{2}+\sum_{i=0}^{k-1}h_i}^{-\frac{h}{2}+\sum_{i=0}^{k}h_i}\left(y-\langle\delta\rangle\right)dy\right)=0,\ \frac{1}{\langle\rho\rangle}\sum_{k=1}^{N}E_k\left(\int\limits_{-\frac{h}{2}+\sum_{i=0}^{k-1}h_i}^{-\frac{h}{2}+\sum_{i=0}^{k}h_i}\left(y-\langle\delta\rangle\right)ydy\right)=\frac{M_x}{\Delta}. \qquad (7)$$

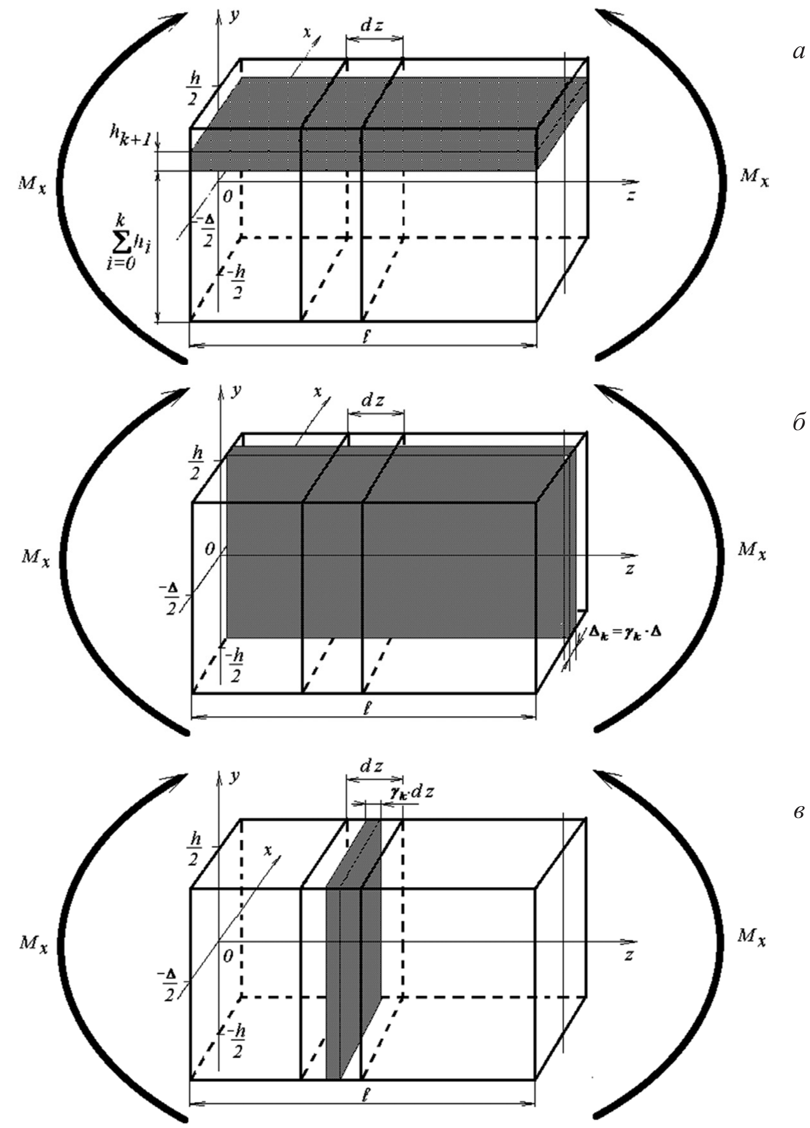

Рис. 2. Схемы нагружения горизонтально продольно-слоистого бруса (*а*), вертикально продольно-слоистого бруса (*б*), поперечно-слоистого бруса (*в*)

Вычисляя в формуле (7) интегралы и суммируя полученные выражения, имеем

$$\langle\delta\rangle = \frac{h}{2}\left(\frac{E_1{\gamma_1}^2 + \sum\limits_{k=2}^{N} E_k\left({\gamma_k}^2 + 2\gamma_k\sum\limits_{i=1}^{k-1}\gamma_i\right)}{\left(\sum\limits_{k=1}^{N}\gamma_k E_k\right)} - 1\right), \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\langle\rho\rangle = \frac{\Delta}{M_x}\frac{h^3}{12}E_1\left(3\left(1+2\frac{\langle\delta\rangle}{h}\right)\gamma_1 - 6\left(1+\frac{\langle\delta\rangle}{h}\right){\gamma_1}^2 + 4{\gamma_1}^3\right) + \\ +\sum_{k=2}^{N}E_k\left(3\left(1+2\frac{\langle\delta\rangle}{h}\right)\gamma_k + 6\left(1+\frac{\langle\delta\rangle}{h}\right)\left(\sum_{i=1}^{k-1}\gamma_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{k-1}\gamma_i\right)^3 + \right. \\ \left. +2\left(\sum_{i=1}^{k-1}\gamma_i\right)^2\left(2\sum_{i=1}^{k}\gamma_i - 3\left(1+\frac{\langle\delta\rangle}{h}\right)\right)\right),\end{aligned} \tag{9}$$

где $\gamma_k = \dfrac{h_k}{h}$ – объемные доли (относительные высоты слоев) материала с номером k $(k = \overline{0, N})$. Очевидно, что среднее смещение $\langle\delta\rangle$ нейтрального слоя в многослойном пакете (8), средний радиус $\langle\rho\rangle$ кривизны изгибаемого пакета (9) зависят от объемных долей γ_k и от последовательности материалов (модулей упругости) в изгибаемом многослойном пакете.

Перейдем к моделированию деформации композиционного структурно-неоднородного упругодеформируемого бруса. Анализ литературных источников позволяет выделить следующий теоретический подход, используемый при исследовании процессов в структурно-неоднородных средах, основанный на введении параметров, усредненных по элементарным макрообъемам, значительно превосходящим размеры неоднородностей, но достаточно малым по сравнению с характерными размерами области взаимодействия тел. При таком методе основные уравнения механики сплошной среды формулируются в пространстве, точками которого являются элементарные макрообъемы (макроточки), размеры которых значительно превосходят характерные размеры неоднородностей, однако существенно меньше размеров тела. Будем предполагать, что призматический поперечный элемент бруса длиной dz (рис. 1) с прямоугольным сечением высотой h и толщиной Δ представляет собой макроточку.

Для решения задачи определения эффективного модуля упругости рассматривается элемент композиционного материала (макроточка), на границе которого задаются воздействия, имитирующие воздействия, возникающие в твердом теле, т. е. в данном случае рассматривается чистый изгиб призматического поперечного элемента бруса длиной dz (рис. 1).

Методика вычисления эффективных коэффициентов линейно-деформируемого композиционного материала. Принцип реализации метода гомогенизации для чистого изгиба призматического поперечного элемента бруса длиной dz (рис. 1) заключается в следующем: если композиционный материал состоит из N компонент (фаз) и в среднем изотропен (например, имеет место хаотическое армирование и т. п.), то в первом случае можно использовать гипотезу Фойгта для призматического стержня о том, что в простейших опытах на чистый изгиб предполагается, что деформация макроточки композиционного материала призматического стержня однородна по переменной y [2]. Второй предельный случай (гипотеза Рейсса) заключается в том, что в тех же простейших экспериментах на чистый изгиб предполагается, что напряженное состояние макроточки композиционного материала призматического стержня однородно по переменной y [3].

Формулы, полученные на основании этих гипотез, имеют практическую ценность, так как являются соответственно верхней и нижней оценками истинных модулей композиционного материала [4].

Исходные данные для получения усредненных характеристик композиционного призматического бруса. Предполагается, что значения объемных долей γ_k $(k = \overline{1, N})$ (концентраций) компонент композиционного материала известны для бруса в целом, они же являются объемными долями компонент для каждого из призматических поперечных элементов бруса длиной dz (рис. 1). При усреднении упругих характеристик композиционного материала бруса предполагается, что модули упругости E_k известны для каждой компоненты k $(k = \overline{1, N})$.

Применение гипотезы Фойгта для вычисления эффективных коэффициентов линейно-упругого материала из N компонент для призматического бруса [2]. В данном случае следует решить задачу усреднения параметров материалов, исходя из чистого изгиба вертикально продольно-слоистого призматического поперечного элемента бруса длиной dz (рис. 2, *б*), так как при таком нагружении гипотеза об однородной деформации каждого слоя многокомпонентного бруса удовлетворяется по определению. Данная расчетная схема, очевидно, позволяет рассмотреть вертикально продольно-слоистый стержень не более чем из N слоев.

При этом k-й вертикальный слой $(k = \overline{1, N})$ имеет высоту h вдоль направления Y, а вдоль направления X – толщину $\Delta_k = \gamma_k \Delta$ (рис. 2, *б*). Будем считать, что для каждого вертикального продольного слоя значения $\langle\delta\rangle_{\Phi}$ и $\langle\rho\rangle_{\Phi}$ будут одинаковыми. Кроме того, для деформации выполнено уравнение (5). Последовательность материалов в вертикально продольно-слоистом пакете не имеет значения и можно записать среднюю величину напряжения $\langle \sigma_z \rangle_\Phi$, действующую на все вертикальные продольные слои:

$$\langle \sigma_z \rangle_\Phi = \frac{1}{h\Delta} \sum_{k=1}^{N} \sigma_{z,k} h\Delta_k = \sum_{k=1}^{N} E_k \frac{h_k}{h} \left(\frac{y - \langle \delta \rangle}{\langle \rho \rangle} \right) = \langle E \rangle_\Phi \frac{y - \langle \delta \rangle_\Phi}{\langle \rho \rangle_\Phi}, \tag{10}$$

где $\langle E \rangle_\Phi = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k E_k$. Из формулы (10) в отличие от выражения (8) получаем $\langle \delta \rangle_\Phi = 0$, а $\langle \rho \rangle_\Phi$ находится из уравнения:

$$\langle \rho \rangle_\Phi = 12h^3 \Delta \frac{\langle E \rangle_\Phi}{M_x}. \tag{11}$$

Применение гипотезы Рейсса [3] при вычислении эффективных параметров деформирования композиционного бруса. В данном случае следует воспользоваться решением задачи усреднения модулей упругости поперечно-слоистого бруса постоянной толщины (рис. 2, *в*), так как при таком нагружении гипотеза об однородном напряженном состоянии всех компонент многокомпонентного бруса удовлетворяется по определению.

Для k-го поперечного слоя в призматическом поперечном элементе бруса длиной dz можно вычислить деформацию (рис. 2, *в*)

$$\varepsilon_{z,k} = \frac{y - \delta_k}{\rho_k}. \tag{12}$$

Из формул (2) и (12) можно получить очевидное равенство для напряжений, действующих в поперечном слое:

$$\frac{\sigma_z}{E_k} = \left(\frac{y}{\rho_k} - \frac{\delta_k}{\rho_k} \right).$$

Поскольку для среднего напряжения, действующего на каждый поперечный слой, выполнено равенство $\langle \sigma_z \rangle_\text{Р} = \sigma_z$ и толщина поперечного слоя с номером k равна $\gamma_k dz$, то, переходя к значению средней деформации для всего пакета поперечных слоев призматического поперечного элемента, получаем

$$\langle \sigma_z \rangle_\text{Р} = \langle E \rangle_\text{Р} \left(\frac{y - \langle \delta \rangle_\text{Р}}{\langle \rho \rangle_\text{Р}} \right), \tag{13}$$

где $\langle E \rangle_\text{Р} = \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\gamma_k}{E_k} \right)^{-1}$, $\langle \delta \rangle_\text{Р} = \langle \rho \rangle_\text{Р} \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \frac{\delta_k}{\rho_k} = 0$, $\langle \rho \rangle_\text{Р}$ находится из следующего уравнения:

$$\langle \rho \rangle_\text{Р} = 12h^3 \Delta \frac{\langle E \rangle_\text{Р}}{M_x}. \tag{14}$$

Для вычисления эффективных параметров чистого изгиба призматического бруса, исходя из (10), (13) и следуя гипотезе Хилла [4, 5], для рассматриваемой модели структурно-неоднородного призматического бруса постоянного поперечного сечения можно записать

$$\langle \sigma_z \rangle_\text{Х} = \langle E \rangle_\text{Х} \frac{y}{\langle \rho \rangle_\text{Х}},$$

где

$$\langle E \rangle_\text{Х} = \frac{1}{2} \left(\langle E \rangle_\text{Р} + \langle E \rangle_\Phi \right), \tag{15}$$

$$\langle \rho \rangle_\text{Х} = \frac{\langle \rho \rangle_\Phi \langle \rho \rangle_\text{Р} \langle E \rangle_\text{Х}}{\langle E \rangle_\Phi \langle \rho \rangle_\text{Р} + \langle E \rangle_\text{Р} \langle \rho \rangle_\Phi}. \tag{16}$$

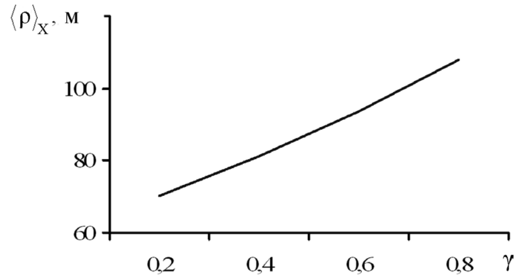

Рис. 3. Зависимость радиуса кривизны бруса из композиционного двухкомпонентного материала от концентраций компонент $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma_2 = 1 - \gamma$ ($M_x = 10^5$ Н, $h = 0{,}1$ м, $\Delta = 0{,}01$ м, $E_1 = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ Па, $E_2 = 1 \cdot 10^{11}$ Па)

Установлено, что радиус кривизны изгибаемого бруса существенно зависит от концентраций компонент (рис. 3).

Заключение. Впервые предлагается естественное обобщение технической теории чистого изгиба однородного призматического бруса постоянной толщины и высоты на случай слоистого и композиционного линейно деформируемого бруса. Вычислены усредненные по гипотезам Фойгта и Рейсса значения параметров деформирования композиционного бруса при чистом изгибе. Определены эффективные значения модулей упругости (15) и радиуса кривизны нейтрального слоя (16) изгибаемого бруса. Установлено, что эффективные значения по Хиллу модулей упругости (15) при изгибе и при одноосном растяжении/сжатии [5] композиционных стержней из линейно-упругих материалов совпадают.

Литература

1. *Филин А. П.* Прикладная механика твердого деформируемого тела. Т 2: Сопротивление материалов с элементами теории сплошных сред и строительной механики. М., 1978.
2. *Voigt W.* Lehrbuch der Kristallphysik. Berlin, 1928.
3. *Reuss A.* // Z. Angew. Math. Und Mech. 1929. Bd 9, N 1. S. 49–58.
4. *Hill R.* // J. Mech. Phys. Solids. 1965. Vol. 13. N 4. P. 213–222.
5. *Кравчук А. С., Кравчук А. И.* // APRIORI. Сер. «Естественные и технические науки» [Электронный ресурс]. 2014. № 1. Режим доступа: http://apriori-journal.ru/seria2/1–2014/Kravchuk-Kravchuk.pdf

A. S. KRAVCHUK, Y. V. TAMILA

**PURE BENDING OF LAYERED COMPOSITE PRISMATIC BEAMS
FROM LINEAR PLASTIC MATERIALS**

Summary

It is proposed a natural generalization of the technical theory of pure bending uniform prismatic beam of constant thickness and height to the case of a layered and composite linearly deformable beam. The averaged by Voigt and Reuss values of deformation parameters of the composite beam at pure bending are calculated. The effective values of the elastic moduli and the radius of curvature of the neutral layer of a flexible beam are obtained. It is established that the Hill's effective values of the elastic moduli at bending and uniaxial tension / compression of composite rods from linear elastic materials are the same.