

УДК 621.941.1

В. К. ШЕЛЕГ, С. С. ДАНИЛЬЧИК

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И РАСЧЕТ КОНСТРУКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ  
УСТРОЙСТВА ДЛЯ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ИНСТРУМЕНТА  
ПРИ ТОЧЕНИИ С АСИММЕТРИЧНЫМ ЦИКЛОМ КОЛЕБАНИЙ**

*Белорусский национальный технический университет*

*(Поступила в редакцию 05.06.2014)*

Одним из способов стружкодробления в процессе токарной обработки является вибрационное точение, при котором на подачу инструмента накладываются направленные колебательные движения. Колебания резца подчиняются синусоидальному закону. Наряду с высокой эффективностью дробления стружки данный метод имеет существенный недостаток, который заключается в увеличении шероховатости обработанных поверхностей. С целью снижения шероховатости предлагается метод точения с наложением на подачу инструмента асимметричных колебаний [1]. Создание последних возможно кулачками, профилем рабочей поверхности которых задается определенный закон внутрициклового движения. От кулачка колебательное движение передается на исполнительный механизм, в качестве которого используется специальный резцедержатель.

На рис. 1, а приведена схема специального резцедержателя к токарному станку, обеспечивающего возвратно-поворотные движения инструмента. Подвижная резцедержавка 1 механизма, смонтированная на опорах *O* и *A*, поворачивается относительно неподвижного корпуса 2 под действием внешней возмущающей силы  $P_B$ , создаваемой гидроцилиндром 3, жесткозакрепленным на резцедержавке 1. Шток гидроцилиндра упирается в неподвижный корпус 2 и приводит в движение гидроцилиндр вместе с резцедержавкой, возврат которой в начальное положение осуществляется пружинами 4. При малых углах поворота резцедержавки движение инструмента можно рассматривать как возвратно-поступательное. К силам, оказывающим наиболее значимое влияние на процесс движения резцедержавки 1, относятся возмущающая сила  $P_B$ , осевая составляющая силы резания  $P_x$  и сила упругости пружин  $P_{упр}$ . На рис. 1, б изображена схема приложения этих сил, которые принимаются в расчет при разработке математической модели колебательного движения инструмента. Она позволит определить конструктивные параметры кулачка и исполнительного механизма устройства, обеспечивающего асимметричные колебания.

Колебательное движение инструмента вокруг оси *Y* опишем уравнением

$$J_y \ddot{\phi} + M_{P_{тр}} + M_{P_{упр}} + M_{P_x} = M_{P_B},$$

где  $J_y$  – момент инерции относительно оси *Y*,  $M_{P_{тр}}$  – момент сил трения,  $M_{P_{упр}}$  – момент сил упругости,  $M_{P_x}$  – момент силы резания  $P_x$ ,  $M_{P_B}$  – момент возмущающей силы  $P_B$ .

Сила трения в воздушной среде пропорциональна скорости [2]. Следовательно, момент сил трения

$$M_{P_{тр}} = \alpha \dot{\phi} r_{тр},$$

где  $\alpha$  – коэффициент пропорциональности,  $r_{тр}$  – плечо приложения сил трения.

Момент сил упругости определяется по формуле

$$M_{P_{упр}} = j \phi r_N^2,$$

где  $j$  – коэффициент упругости пружины,  $r_N$  – плечо приложения сил упругости.

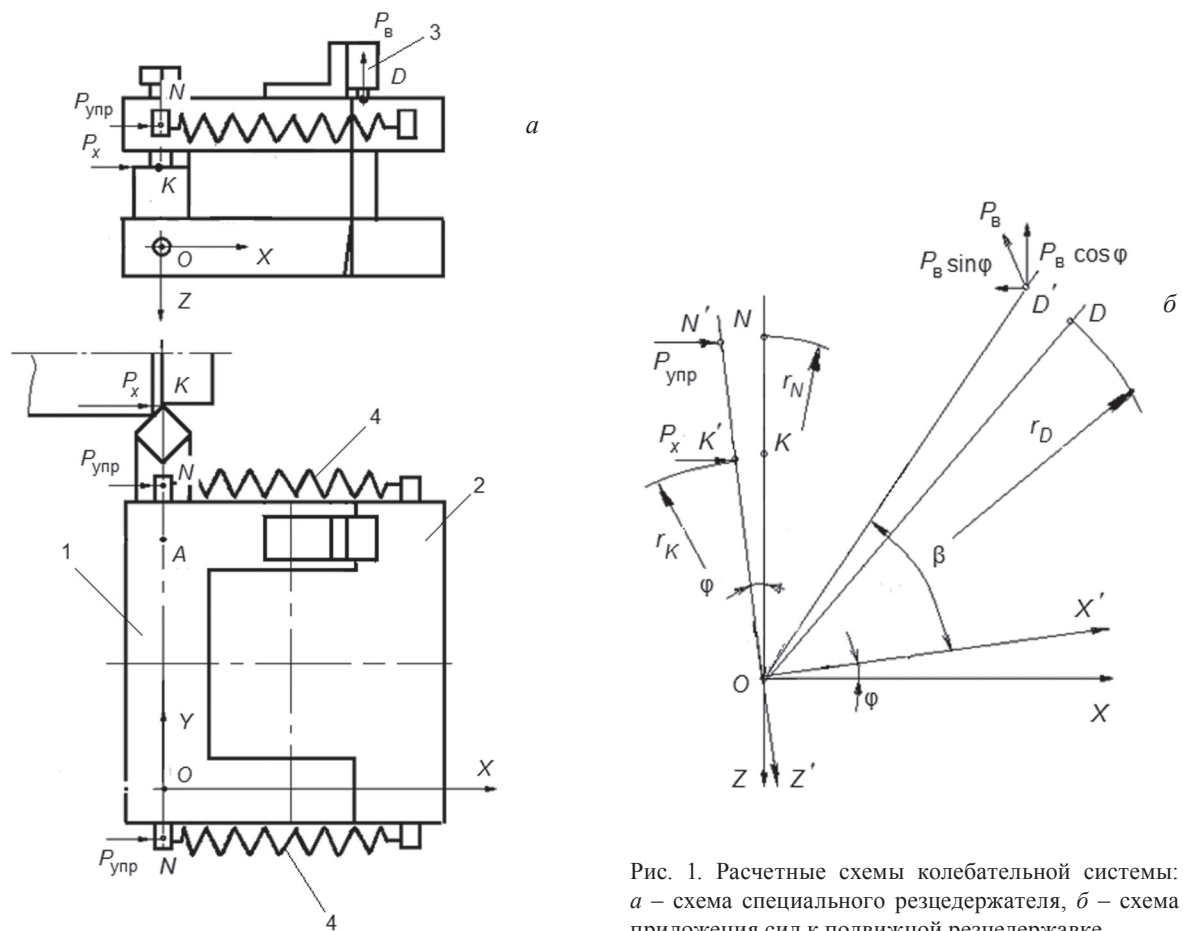


Рис. 1. Расчетные схемы колебательной системы: а – схема специального резцедержателя, б – схема приложения сил к подвижной резцедержавке

Таким образом, дифференциальное уравнение колебательного движения инструмента принимает вид

$$J_y \ddot{\phi} + \alpha \dot{\phi} r_{тр} + j \phi r_N^2 = M_{P_B} - M_{P_x}. \quad (1)$$

Зависимость силы резания  $P_x$  от режимов обработки задается уравнением

$$P_x = C_{P_x} t^{x_{P_x}} S^{y_{P_x}} V^{z_{P_x}} K_{P_x},$$

где  $t, S, V$  – глубина резания, подача, скорость резания соответственно,  $C_{P_x}, x_{P_x}, y_{P_x}, z_{P_x}$  – постоянная и показатели степени, характеризующие определенные условия резания для конкретной марки обрабатываемого материала,  $K_{P_x}$  – поправочный коэффициент [3].

Величина подачи при точении с асимметричными колебаниями периодически изменяется. Следовательно, и сила резания имеет периодический характер. Закон внутрициклового движения инструмента с точки зрения динамики процесса резания из-за малости подач принципиального значения не имеет. Поэтому для упрощения расчетов и облегчения процесса создания колебаний с асимметричным циклом принимаем линейный закон внутрициклового движения инструмента.

На рис. 2 представлена развертка обработанной поверхности диаметром  $d$ , на которой цифрами 0–10 обозначена траектория движения инструмента в процессе точения с асимметричными колебаниями. Каждый элемент стружки (выделен заливкой) образуется за один цикл ко-

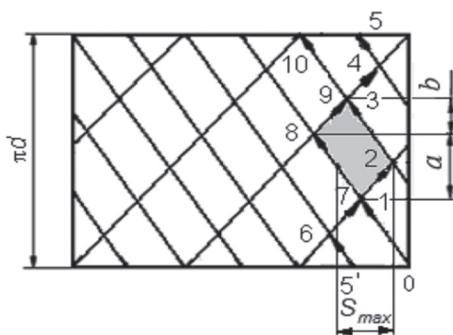


Рис. 2. Траектория движения инструмента при точении с асимметричными колебаниями

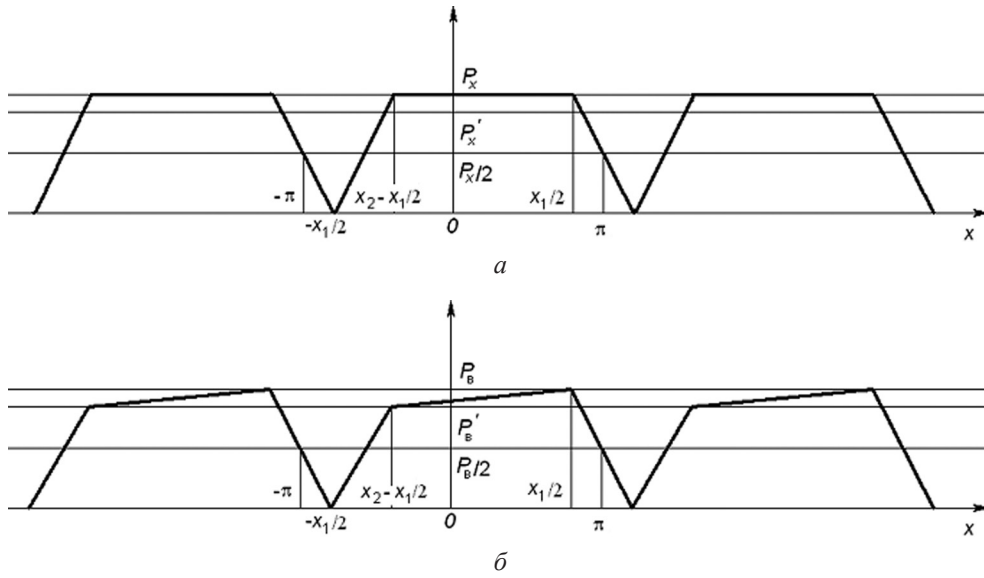


Рис. 3. Графики изменения силы резания  $P_x$  (а) и возмущающей силы  $P_b$  (б)

лебаний, составляющие  $a$  и  $b$  которого предусмотрены для врезания и отвода инструмента. При этом отношение  $\frac{a}{b}$  есть коэффициент асимметрии  $\xi$  цикла колебательного движения инструмента. Исходя из траектории движения инструмента на этапе врезания  $a$ , подача  $S$  изменяется от нулевого до максимального значения и сохраняет его до начала отвода инструмента, на этапе  $b$  ее значение вновь уменьшается до нуля. Изменение подачи приводит к аналогичному изменению силы резания  $P_x$ , которую можно представить периодической функцией с периодом  $2\pi = x_1 + x_2$ , при этом отношение  $\frac{x_1}{x_2} = \xi$ . Рассмотрим течение с коэффициентом асимметрии колебаний  $\xi > 1$  (рис. 3, а).

Изменение силы  $P_x$  в процессах врезания и отвода инструмента описываются различными зависимостями. Можно задать периодическую функцию одним выражением, разложив ее в ряд Фурье. Для этого необходимо определить ее в периоде  $2\pi$  [4]. Для разложения функции  $P_x(x)$  в ряд Фурье определим ее следующим образом:

$$\begin{aligned}
 P_x(x) &= -\frac{P_x(x+\pi)}{x_2} + \frac{P_x}{2} \text{ при } -\pi \leq x \leq -\frac{x_1}{2}, \\
 P_x(x) &= P_x \frac{x_1 + 2x}{2x_2} \text{ при } -\frac{x_1}{2} \leq x \leq x_2 - \frac{x_1}{2}, \\
 P_x(x) &= P_x \text{ при } x_2 - \frac{x_1}{2} \leq x \leq \frac{x_1}{2}, \\
 P_x(x) &= \frac{P_x(\pi-x)}{x_2} + \frac{P_x}{2} \text{ при } \frac{x_1}{2} \leq x \leq \pi.
 \end{aligned}$$

Представив функцию  $P_x(x)$  в виде ряда Фурье, получим уравнение

$$\begin{aligned}
 P_x(x) &= \frac{P_x x_1}{2\pi} + \frac{P_x}{\pi x_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left( \left( \cos k \left( x_2 - \frac{x_1}{2} \right) - \cos \left( -k \frac{x_1}{2} \right) \right) \cos kx + \right. \\
 &\quad \left. + \left( 3 \sin k \frac{x_1}{2} + \sin k \left( x_2 - \frac{x_1}{2} \right) \right) \sin kx \right).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Колебательные движения инструмента генерируются возмущающей силой, величина которой также периодически изменяется. Поэтому и возмущающую силу  $P_b$  можно рассматривать как периодическую функцию  $P_b(x)$  с периодом  $2\pi$ . График функции  $P_b(x)$  обусловлен характером

изменения сил упругости пружин  $P_{\text{упр}}$  и резания  $P_x$ . Сила упругости на этапе врезания изменяется линейно в зависимости от величины удлинения пружин. Сила резания  $P_x$ , как показано на рис. 3, а, возрастает до максимальной величины и остается постоянной до начала отвода инструмента. Предварительными исследованиями установлено, что для обеспечения траектории движения инструмента (рис. 2) сила  $P_B$  должна изменяться согласно графику (рис. 3, б).

Функция  $P_B(x)$  в соответствии с рис. 3, б может быть определена следующим образом:

$$\begin{aligned} P_B(x) &= -\frac{P_B(x+\pi)}{x_2} + \frac{P_B}{2} \text{ при } -\pi \leq x \leq -\frac{x_1}{2}, \\ P_B(x) &= P_B' \frac{x_1+2x}{2x_2} \text{ при } -\frac{x_1}{2} \leq x \leq x_2 - \frac{x_1}{2}, \\ P_B(x) &= P_B - (P_B - P_B') \frac{x_1-2x}{2(x_1-x_2)} \text{ при } x_2 - \frac{x_1}{2} \leq x \leq \frac{x_1}{2}, \\ P_B(x) &= P_B \frac{\pi-x}{x_2} + \frac{P_B}{2} \text{ при } \frac{x_1}{2} \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

В результате разложения функции  $P_B(x)$  в ряд Фурье она примет вид

$$\begin{aligned} P_B(x) &= \frac{(P_B + P_B')x_1}{4\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{P_B'x_1 - P_Bx_2}{k^2x_2(x_1-x_2)} \left[ \cos\left(k\left(x_2 - \frac{x_1}{2}\right)\right) - \cos\frac{kx_1}{2} \right] \cos(kx) + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{P_B}{k^2(x_1-x_2)} \left[ \frac{2x_1-x_2}{x_2} \sin\frac{kx_1}{2} - \sin\left(k\left(x_2 - \frac{x_1}{2}\right)\right) \right] \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{P_B'}{k^2x_2(x_1-x_2)} \left[ x_1 \sin\left(k\left(x_2 - \frac{x_1}{2}\right)\right) + (x_1-2x_2) \sin\frac{kx_1}{2} \right] \sin kx \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставив выражения (2), (3) в уравнение (1), получим уравнение колебательного движения инструмента с коэффициентом асимметрии цикла колебаний  $\xi > 1$ :

$$\begin{aligned} J_y \varphi'' + \alpha r_{\text{тр}} \varphi' + jr_N^2 \varphi &= \frac{(P_B + P_B')x_1 r_D \cos \beta}{4\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{(P_B'x_1 - P_Bx_2) r_D \cos \beta}{k^2x_2(x_1-x_2)} \times \right. \\ &\quad \times \left( \cos k\left(x_2 - \frac{x_1}{2}\right) - \cos\frac{kx_1}{2} \right) \cos kx + \left[ \frac{P_B r_D \cos \beta}{k^2(x_1-x_2)} \left( \frac{2x_1-x_2}{x_2} \sin\frac{kx_1}{2} - \sin k\left(x_2 - \frac{x_1}{2}\right) \right) \right] + \\ &\quad \left. + \frac{P_B' r_D \cos \beta}{k^2x_2(x_1-x_2)} \left[ x_1 \sin k\left(x_2 - \frac{x_1}{2}\right) + (x_1-2x_2) \sin\frac{kx_1}{2} \right] \sin kx \right\} - \frac{P_x x_1 r_K}{2\pi} - \\ &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_x r_K}{k^2 \pi x_2} \left[ \left( \cos k\left(x_2 - \frac{x_1}{2}\right) - \cos\frac{kx_1}{2} \right) \cos kx + \left( 3 \sin\frac{kx_1}{2} + \sin k\left(x_2 - \frac{x_1}{2}\right) \right) \right] \sin kx, \end{aligned}$$

где  $r_D \cos \beta$  – плечо действия возмущающей силы.

Разделив данное уравнение на  $J_y$ , получим неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} \varphi'' + \frac{\alpha r_{\text{тр}} \varphi'}{J_y} + \frac{jr_N^2 \varphi}{J_y} &= \frac{(P_B + P_B')x_1 r_D \cos \beta}{4\pi J_y} + \frac{1}{\pi J_y} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{(P_B'x_1 - P_Bx_2) r_D \cos \beta}{k^2x_2(x_1-x_2)} \times \right. \\ &\quad \times \left( \cos k\left(x_2 - \frac{x_1}{2}\right) - \cos\frac{kx_1}{2} \right) \cos kx + \left[ \frac{P_B r_D \cos \beta}{k^2(x_1-x_2)} \left( \frac{2x_1-x_2}{x_2} \sin\frac{kx_1}{2} - \sin k\left(x_2 - \frac{x_1}{2}\right) \right) \right] + \\ &\quad \left. + \frac{P_B' r_D \cos \beta}{k^2x_2(x_1-x_2)} \left[ x_1 \sin k\left(x_2 - \frac{x_1}{2}\right) + (x_1-2x_2) \sin\frac{kx_1}{2} \right] \sin kx \right\} - \frac{P_x x_1 r_K}{2\pi J_y} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_x r_K}{k^2 \pi x_2 J_y} \times \\ &\quad \times \left[ \left( \cos k\left(x_2 - \frac{x_1}{2}\right) - \cos\frac{kx_1}{2} \right) \cos kx + \left( 3 \sin\frac{kx_1}{2} + \sin k\left(x_2 - \frac{x_1}{2}\right) \right) \right] \sin kx. \end{aligned} \quad (4)$$

Его общее решение представляет собой сумму частного решения  $\Phi^*$  и общего решения  $\bar{\Phi}$  соответствующего однородного уравнения. Для решения уравнения (4) вначале рассмотрим однородное дифференциальное уравнение, которое имеет вид

$$\Phi'' + \frac{\alpha r_{\text{TP}} \Phi'}{J_y} + \frac{j r_N^2 \Phi}{J_y} = 0. \quad (5)$$

Характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (5), запишется таким образом:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Поскольку корни характеристического уравнения являются комплексными числами, принимаем

$$\lambda_1 = \gamma + i\beta, \quad \lambda_2 = \gamma - i\beta,$$

где  $\gamma = -\frac{p}{2}$ ,  $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ .

В этом случае решение однородного уравнения (5), согласно [4], ищем в виде

$$\bar{\Phi} = e^{\gamma x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Так как  $\gamma < 0$ , то значение  $e^{\gamma x}$  с увеличением  $x$  стремится к нулю. Это означает, что решение уравнения (5) описывает затухающие колебания, имеющие место лишь в момент пуска, и их амплитуда стремится к нулю. Поэтому для описания колебательного движения инструмента в процессе течения ограничимся частным решением, определяющим вынужденные колебания.

Частное решение уравнения (4) ищем в виде

$$\Phi^* = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kx + B_k \sin kx) + C, \quad (6)$$

где  $A_k, B_k$  – коэффициенты,  $C$  – константа.

Если принять, что частота колебательных движений инструмента в секунду равна  $f$ , то  $x$  в формуле (6) можно выразить через время  $t$  (с):

$$x = 2\pi f t.$$

Определив коэффициенты  $A_k, B_k$  и постоянную  $C$ , запишем уравнение колебаний инструмента в виде

$$\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{m_k J_y - \alpha r_{\text{TP}} k \frac{n_k (j r_N^2 - k^2 J_y) + m_k k \alpha r_{\text{TP}} J_y}{(j r_N^2 - k^2 J_y)^2 + (k \alpha r_{\text{TP}})^2}}{j r_N^2 - k^2 J_y} \cos 2k\pi f t + \right. \\ \left. + \frac{n_k (j r_N^2 - k^2 J_y) + m_k k \alpha r_{\text{TP}} J_y}{(j r_N^2 - k^2 J_y)^2 + (k \alpha r_{\text{TP}})^2} \sin 2k\pi f t \right] + \frac{(P_B + P_B') x_1 r_D \cos \beta - 2P_x x_1 r_K}{4\pi j r_N^2},$$

где

$$m_k = \frac{(P_B' x_1 - P_B x_2) r_D \cos \beta - P_x r_K (x_1 - x_2)}{k^2 \pi x_2 (x_1 - x_2) J_y} \left( \cos k \left( x_2 - \frac{x_1}{2} \right) - \cos \frac{k x_1}{2} \right), \\ n_k = \frac{P_B r_D \cos \beta}{\pi k^2 (x_1 - x_2) J_y} \left( \frac{2x_1 - x_2}{x_2} \sin \frac{k x_1}{2} - \sin k \left( x_2 - \frac{x_1}{2} \right) \right) + \frac{P_B' r_D \cos \beta}{\pi k^2 x_2 (x_1 - x_2) J_y} \times \\ \times \left( x_1 \sin k \left( x_2 - \frac{x_1}{2} \right) + (x_1 - 2x_2) \sin \frac{k x_1}{2} \right) - \frac{P_x r_K}{k^2 \pi x_2 J_y} \left( 3 \sin \frac{k x_1}{2} + \sin k \left( x_2 - \frac{x_1}{2} \right) \right).$$

Умножив угол  $\varphi$  поворота резцедержателя на расстояние  $r_K$  от оси вращения до вершины резца (рис. 1, б), получим математическую модель возвратно-поступательного колебательного движения инструмента в процессе точения с асимметричными колебаниями для коэффициента асимметрии  $\xi > 1$

$$W = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{m_k J_y - \alpha r_{\text{тр}} k \left( n_k (j r_N^2 - k^2 J_y) + m_k k \alpha r_{\text{тр}} \right) J_y}{(j r_N^2 - k^2 J_y)^2 + (k \alpha r_{\text{тр}})^2} \cos 2k \pi f t + \right. \\ \left. + \frac{\left( n_k (j r_N^2 - k^2 J_y) + m_k k \alpha r_{\text{тр}} \right) J_y}{(j r_N^2 - k^2 J_y)^2 + (k \alpha r_{\text{тр}})^2} \sin 2k \pi f t \right] r_K + \frac{(P_B + P'_B) x_1 r_D \cos \beta - 2 P_x x_1 r_K}{4 \pi j r_N^2} r_K. \quad (7)$$

Математическая модель (7) позволяет рассчитать для определенных размеров резцедержателя и силы резания  $P_x$  соотношение между возмущающей силой  $P_B$  и соответствующей ей силой  $P'_B$ , а также жесткость пружин, обеспечивающие необходимую траекторию и минимальную амплитуду колебательных движений инструмента. К примеру, при точении с  $P_x = 170\text{--}350$  Н резцедержателем с радиусами приложения сил  $r_K = 32$  мм,  $r_N = 63$  мм и  $r_D = 105$  мм для выполнения заданной траектории движения инструмента необходимо использовать пружины с жесткостью  $j = 7,5$  Н/мм. Возмущающая сила  $P_B$  при этом изменяется в пределах от 85 до 180 Н. Соотношение между  $P_B$  и  $P'_B$  составляет 1,03, что обеспечивается рабочим профилем кулачка, генерирующего колебания инструмента с асимметричным циклом. Рабочую поверхность профиля кулачка, обеспечивающую врезание инструмента, необходимо разбить на два участка. На первом участке профиль кулачка имеет более крутой подъем для создания силы  $P'_B$ , в конце второго участка обеспечивается действие на резцедержавку возмущающей силы  $P_B$ .

Аналогичным образом может быть получена математическая модель и для колебательного движения с коэффициентом асимметрии  $\xi < 1$ .

## Выводы

1. Наибольшее влияние на колебательное движение резцедержавки с инструментом оказывают возмущающая сила  $P_B$ , осевая составляющая силы резания  $P_x$  и сила упругости пружин  $P_{\text{упр}}$ . Поэтому они используются при разработке математической модели колебательного движения инструмента. Возмущающая сила  $P_B$  и сила резания  $P_x$  имеют периодически изменяющийся характер и могут быть представлены рядами Фурье, что упрощает процесс разработки математической модели.

2. Математическая модель колебательного движения инструмента с асимметричными колебаниями является результатом решения неоднородного дифференциального уравнения вынужденных колебаний. Она учитывает конструктивные параметры устройства для точения с асимметричными колебаниями. Исходя из величины максимальной силы резания  $P_x$ , зависящей от режимов резания и, в частности, от подачи, которая имеет периодический характер, и принятых для конструкции резцедержателя радиусов приложения сил, можно определить необходимую минимальную жесткость пружин, а также соотношение между максимальной возмущающей силой  $P_B$  и силой  $P'_B$ , которое следует учесть при проектировании задающего кулачка.

## Литература

1. Данильчик С. С., Шелег В. К. // Наука и техника. 2013. № 4. С. 16–21.
2. Бутенин Н. В., Луниц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. СПб., 2006.

3. Барановский Ю. В., Брахман Л. А., Гдалевич А. И. и др. Режимы резания металлов. М., 1995.  
4. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. М., 1985. Т. 2.

*V. K. SHELEH, S. S. DANILCHYK*

**MATHEMATICAL MODEL AND CALCULATION OF MACHINE DESIGN PARAMETERS  
OF A OSCILLATION DEVICE FOR A TOOL AT TURNING  
WITH ASYMMETRIC CYCLE OF OSCILLATIONS**

**Summary**

Machine model for turning operations with asymmetric tool oscillations based on transducer-coupling system feed technology is considered.

Mathematical model of oscillatory motions of tools with asymmetric cycle permitting to determine the design parameters is developed.