

ISSN 1561-8358 (Print)

ISSN 2524-244X (Online)

УДК 699.531.433

<https://doi.org/10.29235/1561-8358-2020-65-2-205-214>

Поступила в редакцию 24.06.2019

Received 24.06.2019

О. М. Дьяконов*Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь***БРИКЕТИРОВАНИЕ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНЫХ ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ**

Аннотация. Выполнено решение осесимметричной задачи теории прессования пористых тел с практическим применением в виде силового расчета металлургических процессов брикетирования мелкофракционных сыпучих материалов: порошковых, стружковых, гранулированных и других отходов металлообработки. У таких материалов форма частиц (структурных элементов) не является геометрически правильной или вообще определенной. Это послужило основанием для того, что в основу решения была положена континуальная модель пористого тела. В результате приведения этой модели к двумерной пространственной модели получено замкнутое аналитическое решение методом совместного решения дифференциальных уравнений равновесия и энергетического условия пластичности Губера–Мизеса. В качестве рабочих гипотез приняты следующие допущения: нормальное радиальное напряжение равно тангенциальному, коэффициент бокового давления равен относительной плотности прессовки. В силу того что задача решена в общем виде и в общей постановке, само решение следует рассматривать как методологическое применительно к любой схеме осесимметричного нагружения. Получены трансцендентные уравнения деформационного уплотнения пористого тела как для идеального процесса прессования, так и с учетом сил контактного трения. В результате разработки метода решения этих уравнений выведены формулы для расчета локальных характеристик напряженного состояния прессовки, а также интегральных параметров процесса прессования: давления, усилия и работы деформации.

Ключевые слова: металл, пористость, модель, континуум, прессование, симметрия, напряжение, давление, усилие, деформация

Для цитирования: Дьяконов, О. М. Брикетирование структурно-неоднородных пористых материалов / О. М. Дьяконов // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2020. – Т. 65, №2. – С. 205–214. <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2020-65-2-205-214>

Oleg M. Dyakonov*Belarusian National Technical University, Minsk, Republic of Belarus***BRIQUETTING OF STRUCTURALLY INHOMOGENEOUS POROUS MATERIALS**

Abstract. The work is devoted to solving the axisymmetric problem of the theory of pressing porous bodies with practical application in the form of force calculation of metallurgical processes of briquetting small fractional bulk materials: powder, chip, granulated and other metalworking wastes. For such materials, the shape of the particles (structural elements) is not geometrically correct or generally definable. This was the basis for the decision to be based on the continual model of a porous body. As a result of bringing this model to a two-dimensional spatial model, a closed analytical solution was obtained by the method of jointly solving differential equilibrium equations and the Guber–Mises energy condition of plasticity. The following assumptions were adopted as working hypotheses: the normal radial stress is equal to the tangential one, the lateral pressure coefficient is equal to the relative density of the compact. Due to the fact that the problem is solved in a general form and in a general formulation, the solution itself should be considered as methodological for any axisymmetric loading scheme. The transcendental equations of the deformation compaction of a porous body are obtained both for an ideal pressing process and taking into account contact friction forces. As a result of the development of a method for solving these equations, the formulas for calculating the local characteristics of the stressed state of the pressing, as well as the integral parameters of the pressing process are derived: pressure, stress, and deformation work.

Keywords: metal, porosity, model, continuum, pressing, symmetry, stress, pressure, force, deformation

For citation: Dyakonov O. M. Briquetting of structurally inhomogeneous porous materials. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2020, vol. 65, no. 2, pp. 205–214 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2020-65-2-205-214>

Введение. Пористые тела образуют порошковые, стружковые, гранулированные и другие сыпучие металлические материалы, которые в силу классификации по химическому составу и размерам частиц (структурных элементов) следует отнести к разряду структурно-неоднородных

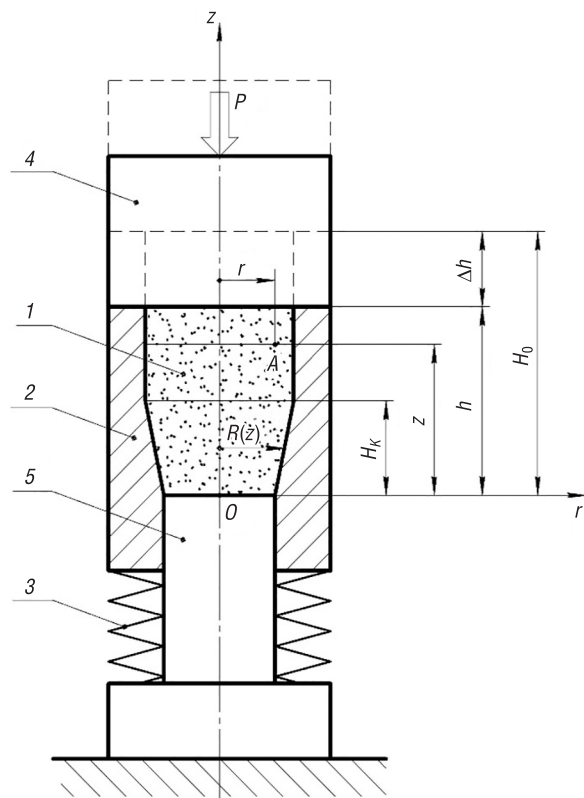


Рис. 1. Технологическая схема прессования пористого тела в подвижной матрице

Fig. 1. Technological scheme of pressing a porous body in a moving matrix

момент осесимметричного нагружения описывается уравнением $R = R(z)$. Силовой расчет производим без учета сил контактного трения.

Для любой точки очага деформации дифференциальные уравнения равновесия в цилиндрических координатах записываются следующим образом:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} = 0. \tag{2}$$

Условие пластичности Губера–Мизеса имеет вид

$$(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{rz}^2 = 2\sigma_s^2. \tag{3}$$

Элементарный объем прессовки с компонентами тензора напряженного состояния показан на рис. 2. В условиях осесимметричного нагружения в меридианных плоскостях, проходящих через ось z (плоскостях φ), касательные напряжения равны нулю. Компоненты напряжений не зависят от координаты φ .

Согласно условию полной пластичности Хаара–Кармана [1], когда течение металла в радиальном направлении ограничено стенкой матрицы, а в тангенциальном кинематически запрещено вследствие симметричного разграничения в плоскостях φ , можно принять, что $\sigma_r = \sigma_\varphi$. При этом как осевое нормальное σ_z , так и нормальное радиальное σ_r напряжения зависят от непрерывно увеличивающейся плотности прессовки ρ . Между собой они связаны коэффициентом бокового давления, который при условии полной пластичности равен относительной плотности прессовки δ [2–4]:

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \delta \sigma_z. \tag{4}$$

материалов. В большинстве случаев форма частиц не является геометрически правильной или вообще определенной, из-за чего ставится под сомнение возможность применения к ним контактно-дискретной модели деформационного уплотнения. Гораздо более предпочтительным в таких случаях является применение сжимаемой континуальной модели с реологической характеристикой (пределом текучести), определяющей сопротивление металла деформированию.

Модель пористого тела. Условие полной пластичности. Решение осесимметричной задачи теории прессования пористых тел предполагает определение локальных характеристик напряженного состояния прессовки по координатам, а также интегральных параметров: давления, усилия и работы деформации. В качестве модели пористого тела принимаем сплошное сжимаемое жесткопластическое тело с пределом текучести σ_s . Процесс прессования заготовки 1 производим в жесткой матрице 2, опирающейся на пружину 3 (рис. 1). Матрица 2 перемещается со скоростью верхнего пуансона 4, при этом нижний пуансон 5 остается неподвижным. Боковая поверхность прессовки, по форме представляющей собой тело вращения, в любой фиксированный

В пределе, когда плотность прессовки становится равной плотности компактного материала, то есть при $\delta = 1$, σ_r достигает значения σ_z (по аналогии с законом Паскаля для несжимаемых жидких сред).

Относительная плотность так же, как и путь деформирования или время, является общим переменным параметром процесса прессования, но для рассматриваемого фиксированного момента выступает в качестве константы при расчете напряженного состояния.

С учетом допущения (4), закона парности касательных напряжений $\tau_{rz} = \tau_{zr} = \tau$ и обозначения $\sigma_z = \sigma$ система уравнений (1)–(3) запишется следующим образом:

$$\delta \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0; \tag{5}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{\tau}{r} = 0; \tag{6}$$

$$(1 - \delta)^2 \sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_s^2. \tag{7}$$

Условие пластичности (7) устанавливает следующую взаимозависимость между компонентами тензора напряжений:

$$\sigma = \frac{1}{p} \sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2}; \tag{7.1}$$

$$\tau = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\sigma_s^2 - p^2 \sigma^2}. \tag{7.2}$$

Для последующих расчетов составим таблицу производных от этих выражений, используя известное в математике понятие взятия производной от неявно заданной функции. С учетом (5)

$$\sigma'_r = -\frac{3}{p} \frac{\tau \tau'_r}{\sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2}} = -\frac{3\tau}{p^2 \sigma} \tau'_r = -\frac{\tau'_z}{\delta}; \tag{7.3}$$

$$\sigma'_z = -\frac{3}{p} \frac{\tau \tau'_z}{\sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2}} = -\frac{3\tau}{p^2 \sigma} \tau'_z; \tag{7.4}$$

$$\tau'_r = -\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{p^2 \sigma \sigma'_r}{\sqrt{\sigma_s^2 - p^2 \sigma^2}}; \tag{7.5}$$

$$\tau'_z = -\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{p^2 \sigma \sigma'_z}{\sqrt{\sigma_s^2 - p^2 \sigma^2}} = -\delta \sigma'_r. \tag{7.6}$$

Здесь $\sigma(z, r)$, $\tau(z, r)$ – искомые напряжения (функции независимых координат z, r) при заданной относительной плотности прессовки δ .

Геометрическая интерпретация условия пластичности. Условие пластичности (7) геометрически интерпретируется как окружность радиусом σ_s , каждой точке которой соответствует напряженное состояние, вызывающее и поддерживающее пластическое течение металла. На рис. 3 оси σ, z повернуты на 90° , то есть условно показаны в плоскости номинального сечения (сечение перпендикулярное усилию прессования). Каждой точке очага деформации (допустим, это будет точка A с координатами z, r) соответствует искомый тензор напряжений σ, τ (точка B на окружности пластичности) с проекциями на оси напряжений $\sqrt{3}\tau$ и $p\sigma$. Углы прямоугольного

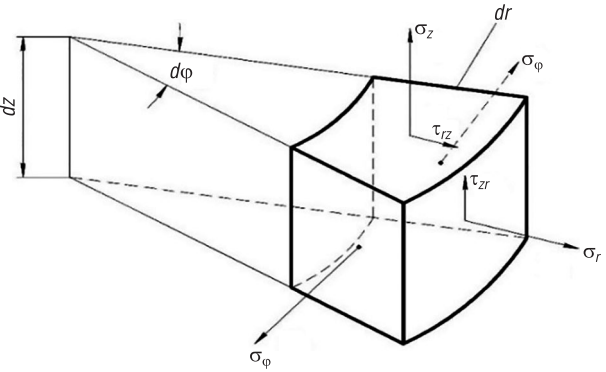


Рис. 2. Элементарный объем очага деформации с компонентами тензора напряжений

Fig. 2. Elemental volume of the deformation zone with components of the stress tensor

треугольника OBC (назовем его треугольником пластичности) определяются из следующих соотношений:

$$\alpha = \arcsin \frac{p\sigma}{\sigma_s}; \quad \beta = \arcsin \frac{\sqrt{3}\tau}{\sigma_s} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\tau}{p\sigma}; \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}. \quad (8)$$

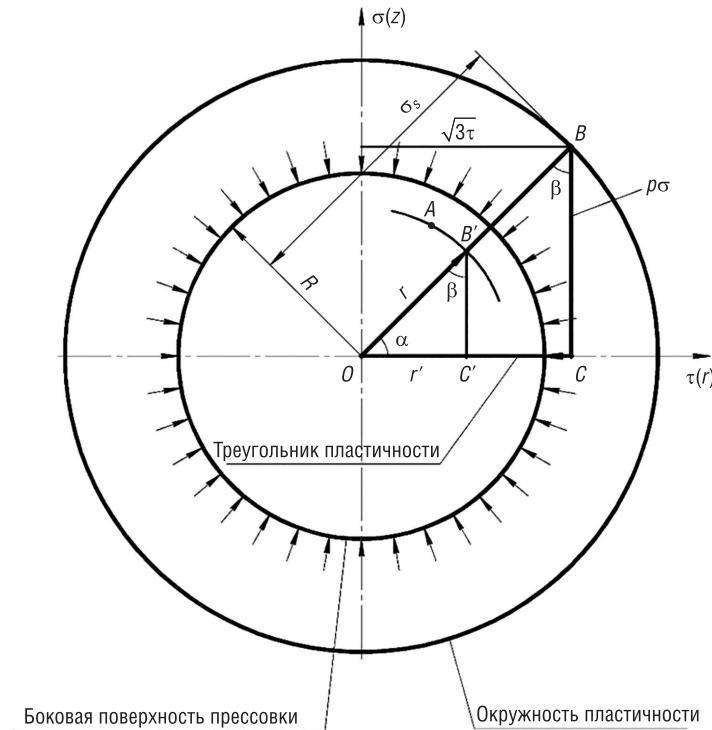


Рис. 3. Геометрическая интерпретация условия пластичности
Fig. 3. Geometric interpretation of plasticity condition

На оси симметрии z касательное напряжение τ равно нулю ($r = 0, \tau = 0$) по всей высоте прессовки при любой степени деформации сжатия. При этом нормальное напряжение σ согласно условию пластичности (7) имеет максимальное значение: $\sigma = \frac{1}{p}\sigma_s$. По мере удаления от оси z в радиальном направлении ($0 \leq r \leq R$) σ уменьшается, а τ возрастает. Эти параметры достигают своих экстремальных значений при $r = R$. Соответственно, угол α треугольника пластичности OBC изменяется в пределах от $\frac{\pi}{2}$ до 0, а угол β – от 0 до $\frac{\pi}{2}$. На боковой поверхности прессовки при $r = R$ в радиальном направлении есть напряжение, но нет деформации. По мере увеличения относительной плотности ($\delta_0 \leq \delta \leq 1$) $\sigma \rightarrow \infty$, в то время как τ не может превысить величины $\tau_{\max} = k = \frac{\sqrt{3}}{3}\sigma_s$.

Уравнение деформационного уплотнения. Для определения напряженного состояния пористого тела первое и второе слагаемые уравнения (6) представим в виде функции τ и ее производной τ'_z с использованием выражений (7.5), (7.3), (7.2), (7.1):

$$\tau'_r = -\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{p^2 \sigma \sigma'_r}{\sqrt{\sigma_s^2 - p^2 \sigma^2}} = \frac{p}{3\delta} \frac{\sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2}}{\tau} \tau'_z.$$

Уравнение (6) запишем в виде

$$\frac{p}{3\delta} \frac{\sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2}}{\tau} \frac{\partial \tau}{\partial z} - \frac{3}{p} \frac{\tau}{\sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2}} \frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\tau}{r} = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\frac{p\sqrt{3}}{3\delta} \int \frac{\sqrt{\left(\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\right)^2 - \tau^2}}{\tau^2} d\tau - \frac{\sqrt{3}}{p} \int \frac{d\tau}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\right)^2 - \tau^2}} + \frac{1}{r} \int dz = 0;$$

$$\frac{p}{3\delta} \frac{\sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2}}{\tau} + \left(\frac{\sqrt{3}p}{3\delta} + \frac{\sqrt{3}}{p}\right) \arcsin \frac{\sqrt{3}\tau}{\sigma_s} - \frac{z}{r} = C,$$

или с учетом (7.1), (8)

$$\frac{\sigma}{\omega\tau} + \gamma\beta - \frac{z}{r} = C, \tag{9}$$

где $\gamma = \frac{\sqrt{3}p}{3\delta} + \frac{\sqrt{3}}{p}$; $\beta = \arcsin \frac{\sqrt{3}\tau}{\sigma_s}$; $\omega = \frac{3\delta}{p^2}$.

Постоянную интегрирования C найдем из начальных и граничных условий. В момент начала пластической деформации на поверхности контакта прессовки с верхним пуансоном, то есть при $z = h = H_0$, $r = R$, касательное напряжение достигает величины, равной константе пластичности:

$\tau_{\max} = k = \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma_s$. Как следует из условия (7), нормальное напряжение обращается в нуль: $\sigma = 0$.

Таким образом,

$$C = \gamma \frac{\pi}{2} - \frac{H_0}{R}; \tag{10}$$

$$\frac{\sigma}{\omega\tau} + \gamma\beta - \frac{z}{r} = \gamma \frac{\pi}{2} - \frac{H_0}{R}. \tag{11}$$

Граничные условия удовлетворяются подстановкой в (11) значения $R = R(z)$. Для цилиндрической матрицы $R = \text{const}$, для конической $R = R_0 + z\text{tg}\alpha$, где R_0 – радиус матрицы у ее основания, α – угол наклона образующей конуса.

Уравнение (11) представляет собой уравнение деформационного уплотнения пористого тела, связывающее воедино все параметры процесса. Для определения напряжений σ и τ это уравнение необходимо решать совместно с условием пластичности (7), то есть подстановкой выражений (7.1), (7.2):

$$\frac{\sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2}}{p\omega\tau} + \gamma\beta - \frac{z}{r} = \gamma \frac{\pi}{2} - \frac{H_0}{R}; \tag{12}$$

$$\frac{\sqrt{3}\sigma}{\omega\sqrt{\sigma_s^2 - p^2\sigma^2}} + \gamma\beta - \frac{z}{r} = \gamma \frac{\pi}{2} - \frac{H_0}{R}. \tag{13}$$

Уравнения (11)–(13) являются трансцендентными, функции $\sigma(z, r)$, $\tau(z, r)$ заданы в неявном виде. Их решение возможно лишь численным методом. Тем не менее эти уравнения представляют собой замкнутое решение осесимметричной задачи при условии пластичности Губера–Мизеса.

Частные выражения условия пластичности в уравнении деформационного уплотнения.

Первое слагаемое уравнения (6) представим в виде функции σ и ее производной σ'_z с использованием выражений (7.5), (7.3), (7.6):

$$\tau'_r = -\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{p^2 \sigma \sigma'_r}{\sqrt{\sigma_s^2 - p^2 \sigma^2}} = \frac{\sqrt{3} p^2}{3\delta} \frac{\sigma \tau'_z}{\sqrt{\sigma_s^2 - p^2 \sigma^2}} = -\frac{p^4}{3\delta} \frac{\sigma^2 \sigma'_z}{\sigma_s^2 - p^2 \sigma^2}.$$

Уравнение (6) запишется в виде

$$-\frac{p^4}{3\delta} \frac{\sigma^2}{\sigma_s^2 - p^2 \sigma^2} \frac{d\sigma}{dz} + \frac{d\sigma}{dz} + \frac{\tau}{r} = 0.$$

Разделим левую и правую часть равенства на τ с подстановкой выражения (7.2):

$$-\frac{p^4}{3\delta} \frac{\sigma^2}{\sigma_s^2 - p^2\sigma^2} \frac{1}{\tau} \frac{d\sigma}{dz} + \frac{1}{\tau} \frac{d\sigma}{dz} + \frac{1}{r} = 0;$$

$$-\frac{\sqrt{3}p}{3\delta} \frac{\sigma^2}{\left[\left(\frac{\sigma_s}{p}\right)^2 - \sigma^2\right]^{\frac{3}{2}}} \frac{d\sigma}{dz} + \frac{\sqrt{3}}{p} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_s}{p}\right)^2 - \sigma^2}} \frac{d\sigma}{dz} + \frac{1}{r} = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$-\frac{\sqrt{3}p}{3\delta} \int \frac{\sigma^2 d\sigma}{\left[\left(\frac{\sigma_s}{p}\right)^2 - \sigma^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\sqrt{3}}{p} \int \frac{d\sigma}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_s}{p}\right)^2 - \sigma^2}} + \int \frac{dz}{r} = 0;$$

$$-\frac{\sqrt{3}p}{3\delta} \left[\frac{\sigma}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_s}{p}\right)^2 - \sigma^2}} - \arcsin \frac{p\sigma}{\sigma_s} \right] + \frac{\sqrt{3}}{p} \arcsin \frac{p\sigma}{\sigma_s} + \frac{z}{r} = C;$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}p}{3\delta} + \frac{\sqrt{3}}{p} \right) \arcsin \frac{p\sigma}{\sigma_s} - \frac{\sqrt{3}p^2}{3\delta} \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma_s^2 - p^2\sigma^2}} + \frac{z}{r} = C,$$

или с учетом (7.2), (8)

$$\gamma\alpha - \frac{\sigma}{\omega\tau} + \frac{z}{r} = C.$$

Постоянную интегрирования C , как и в предыдущем случае, найдем из начальных и граничных условий, то есть при $z = h = H_0$, $r = R$. В момент начала пластической деформации $\tau = k = \frac{\sqrt{3}}{3}\sigma_s$, $\sigma = 0$, $C = H_0 / R$. Решение окончательно принимает следующий вид:

$$\gamma\alpha - \frac{\sigma}{\omega\tau} + \frac{z}{r} = \frac{H_0}{R}. \quad (14)$$

Сопоставляя уравнения (11), (14), приходим к выводу, что эти уравнения представляют собой одно и то же уравнение, выраженное в одном случае углом β (11), а во втором – углом α (14), (см. рис. 3). Если сложить их левые и правые части, то получим условие пластичности (7), выраженное углами α , β :

$$\arcsin \frac{\sqrt{3}\tau}{\sigma_s} + \arcsin \frac{p\sigma}{\sigma_s} = \beta + \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Уравнение (14) можно получить также из уравнения (11) простой заменой угла β углом α : $\beta = \pi/2 - \alpha$.

Присутствие в уравнении деформационного уплотнения тригонометрических функций углов треугольника пластичности есть следствие того, что нормальное и касательное напряжения σ и τ жестко связаны между собой алгебраической зависимостью (7).

Изменение напряженного состояния прессовки в радиальном направлении. Второе слагаемое уравнения (6) представим в виде функции τ и ее производной τ'_r с использованием выражений (7.4), (7.3), (7.5):

$$\sigma'_z = -\frac{3}{p} \frac{\tau\tau'_z}{\sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2}} = \frac{3\delta}{p} \frac{\tau\sigma'_r}{\sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2}} = -\frac{9\delta\tau^2\tau'_r}{p^2(\sigma_s^2 - 3\tau^2)}.$$

Уравнение (6) запишем в виде

$$\frac{d\tau}{dr} - \frac{9\delta\tau^2}{p^2(\sigma_s^2 - 3\tau^2)} \frac{d\tau}{dr} + \frac{\tau}{r} = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\frac{d\tau}{\tau} - \frac{9\delta\tau d\tau}{p^2(\sigma_s^2 - 3\tau^2)} = -\frac{dr}{r};$$

$$\int \frac{d\tau}{\tau} + \frac{3\delta}{2p^2} \int \frac{d(\sigma_s^2 - 3\tau^2)}{\sigma_s^2 - 3\tau^2} = -\int \frac{dr}{r};$$

$$\ln \tau + \ln r + \frac{\omega}{2} \ln(\sigma_s^2 - 3\tau^2) = \ln C';$$

$$\tau r (\sigma_s^2 - 3\tau^2)^{\frac{\omega}{2}} = C', \text{ или с учетом (7.1) } \tau \sigma^{\omega} r = \frac{C'}{p^{\omega}} = C.$$

Полученное выражение не содержит координату z , поэтому постоянную интегрирования C найдем из граничных условий при $r = R$:

$$C = \tau_R \sigma_R^{\omega} R.$$

Как будет показано далее, константы τ_R и σ_R для каждого рассматриваемого номинального сечения прессовки находятся из уравнения деформационного уплотнения (11) с учетом координаты z . Таким образом, равенство, демонстрирующее зависимость компонентов тензора напряжений от координаты r при вполне конкретном значении z , имеет вид

$$\tau \sigma^{\omega} = \tau_R \sigma_R^{\omega} \frac{R}{r}. \tag{15}$$

Из него следует несколько важных соотношений:

$$\sigma = \sigma_R \left(\frac{\tau_R R}{\tau r} \right)^{\frac{1}{\omega}}; \tau = \tau_R \left(\frac{\sigma_R}{\sigma} \right)^{\omega} \frac{R}{r}; \frac{\sigma}{\tau} = \frac{\sigma_R}{\tau_R} \left(\frac{\sigma}{\sigma_R} \right)^{\omega} \left(\frac{\tau_R R}{\tau r} \right)^{\frac{1}{\omega}} \frac{r}{R}.$$

Анализ уравнения (15) показывает, что изменение напряженного состояния пористого тела в радиальном направлении подчинено гиперболическому закону с отклонениями, вызванными пористостью и сжимаемостью материала.

Определение напряжений по координатам точек очага деформации. Решение трансцендентных уравнений. Для определения напряжений σ и τ с помощью простейших формул воспользуемся особенностями осесимметричного нагружения. Для этого вновь обратимся к рис. 3. Номинальное сечение прессовки так же, как и круг пластичности, имеет форму круга радиусом R . Рассматриваемая точка A лежит на окружности радиусом r . Пересечение последней с диагональю OB треугольника пластичности OBC дает точку B' , которая имеет те же координаты z, r и находится в том же напряженном состоянии, что и точка A . Проекция радиуса r (OB') на ось r (совпадает с осью напряжений τ) дает отрезок r' (OC') и образует координатный треугольник $OB'C'$. Прямоугольные треугольники OBC и $OB'C'$ с равными углами α, β геометрически подобны, следовательно

$$\frac{\sqrt{3}\tau}{\sigma_s} = \frac{r'}{r} = \sin \beta = \mu; \frac{p\sigma}{\sigma_s} = \frac{\sqrt{r^2 - (r')^2}}{r} = \sqrt{1 - \left(\frac{r'}{r}\right)^2} = \sqrt{1 - \mu^2} = \cos \beta;$$

$$\frac{\sigma}{\tau} = \frac{\sqrt{3}}{p \operatorname{tg} \beta} \approx \frac{\sqrt{3}}{p \beta}; \sigma = \frac{\sigma_s}{p} \sqrt{1 - \mu^2}; \tau = \mu \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma_s. \tag{16}$$

Для расчета напряжений σ и τ по формулам (16) достаточно найти величины угла β и коэффициента μ . Подставим соотношение σ/τ из (16) в (11). После несложных преобразований получаем квадратный трехчлен, из которого определяется угол β , а затем и коэффициент μ :

$$a\beta^2 + b\beta + c = 0; \beta_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (17)$$

где $a = \gamma\omega\rho$; $b = -K\omega\rho$; $c = \sqrt{3}$; $K = \gamma \frac{\pi}{2} - \frac{H_0}{R} + \frac{z}{r}$; $\mu = \sin \beta$.

Коэффициент μ является сложной функцией координат точек очага деформации, относительной плотности прессовки и предела текучести деформируемого металла при заданном температурно-скоростном режиме прессования.

Система уравнений (4), (16), (17) представляет собой замкнутое аналитическое решение исходной системы дифференциальных уравнений (5)–(7). Помимо расчета и анализа локальных характеристик напряженного состояния прессовки, эти уравнения позволяют определить интегральные параметры процесса прессования: давление, усилие и работу деформации.

Силовой расчет процесса прессования. Построение силовых диаграмм и определение работы деформации связано с определением среднеинтегральной величины давления на поверхности контакта прессовки с верхним пуансоном S при $z = h$, $R = R_k$. Среднее давление без учета сил контактного трения рассчитывается по формуле

$$\begin{aligned} q_i &= \frac{1}{S} \iint_S q_i(S) dS = \frac{1}{S} \iint_S (\sigma_z + \tau_{zr}) dS = \frac{1}{\pi R_k^2} \int_0^R \left(\frac{\sigma_s}{p} \sqrt{1-\mu^2} + \mu \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma_s \right) d\pi r^2 = \\ &= \frac{2\sigma_s}{R_k^2} \int_0^R \left(\frac{1}{p} \sqrt{1-\mu^2} + \mu \frac{\sqrt{3}}{3} \right) r dr. \end{aligned} \quad (18)$$

По результатам численного интегрирования (18) строится диаграмма прессования $q_i(\delta)$ с учетом того, что $p = 1 - \delta$.

Здесь необходимо заметить, что пластическая деформация металла не наступает при нулевом значении среднего по площади контакта давления прессования. В начале процесса среднее давление имеет строго определенную величину, которая была учтена при определении начальных и граничных условий и которую можно рассчитать по формуле (18).

Формула для расчета усилия прессования имеет вид

$$P_i = q_i S = 2\pi\sigma_s \int_0^R \left(\frac{1}{p} \sqrt{1-\mu^2} + \mu \frac{\sqrt{3}}{3} \right) r dr. \quad (19)$$

Влияние сил контактного трения. Силовые параметры процессов брикетирования сыпучих материалов в значительной степени зависят от трения боковой поверхности прессовки о стенку

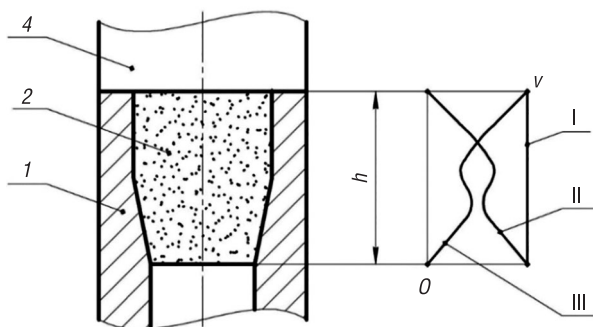


Рис. 4. Графики скоростей перемещения матрицы и прессуемого металла

Fig. 4. Graphs of the speeds of movement of the matrix and the pressed metal

матрицы, которое возникает при наличии их относительного перемещения. На рис. 4 показаны графики скоростей перемещения: I – матрицы 2 (скорость матрицы 2 равна скорости v перемещения верхнего пуансона 4), II – частиц металла I по высоте прессовки h , III – матрицы 2 относительно прессуемого металла I. Видно, что скорость частиц металла по высоте прессовки уменьшается от максимального значения v до нуля, то есть матрица, движущаяся с постоянной скоростью v , обгоняет прессуемый металл. Следовательно, результирующая сила бокового трения всегда направлена в сторону действующего усилия прессования, что свидетельствует об эффективности

технологической схемы, приводит к значительному снижению сопротивления деформированию и работы деформации (энергетических затрат).

Среднеинтегральная величина нормального бокового давления определяется следующим образом:

$$q_r = \frac{1}{h} \int_0^h [\sigma_r(z) + \tau_{rz}(z)] dz = \frac{1}{h} \int_0^h [\delta \sigma(z) + \tau(z)] dz = \frac{\sigma_s}{h} \int_0^h \left(\frac{\delta}{p} \sqrt{1-\mu^2} + \mu \frac{\sqrt{3}}{3} \right) dz. \quad (20)$$

В соответствии с законом Амонтона–Кулона удельная сила трения прямо пропорциональна боковому давлению:

$$\tau = f q_r = \frac{\sigma_s f}{h} \int_0^h \left(\frac{\delta}{p} \sqrt{1-\mu^2} + \mu \frac{\sqrt{3}}{3} \right) dz. \quad (21)$$

Сила бокового трения равна произведению удельной силы трения на площадь боковой контактной поверхности прессовки:

$$F = \tau S_r = 2\pi R \sigma_s f \int_0^h \left(\frac{\delta}{p} \sqrt{1-\mu^2} + \mu \frac{\sqrt{3}}{3} \right) dz. \quad (22)$$

Усилие прессования пористого тела в подвижной матрице с учетом сил контактного трения рассчитывается по формуле

$$P = P_i - F = \sigma_s \left[2\pi \int_0^R \left(\frac{1}{p} \sqrt{1-\mu^2} + \mu \frac{\sqrt{3}}{3} \right) r dr - 2\pi R f \int_0^h \left(\frac{\delta}{p} \sqrt{1-\mu^2} + \mu \frac{\sqrt{3}}{3} \right) dz \right]. \quad (23)$$

Путь деформирования и относительная плотность прессовки связаны между собой зависимостью: $\Delta h = (H_0 - H_k)/\delta$. Соответственно, выражения для определения текущего значения работы деформации и полной работы имеют вид

$$A = \int_0^{\Delta h} P(\Delta h) d(\Delta h) = \int_{\delta_0}^{\delta} P(\delta) d\delta; \quad (24)$$

$$A = \int_0^{H_0 - H_k} P(\Delta h) d(\Delta h) = \int_{\delta_0}^{\delta_k} P(\delta) d\delta. \quad (25)$$

Выводы

1. В результате применения континуальной модели к силовому расчету процесса прессования пористых тел получено замкнутое аналитическое решение осесимметричной задачи методом совместного решения дифференциальных уравнений равновесия и условия пластичности Губера–Мизеса. В силу того что задача решена применительно к телам вращения в общем виде и в общей постановке, само решение следует рассматривать как методологическое при любой схеме осесимметричного нагружения.

2. Получены уравнения деформационного уплотнения пористого тела как для идеального процесса прессования, так и с учетом сил контактного трения.

3. Разработан метод расчета локальных характеристик напряженного состояния прессовки по координатам очага пластической деформации и интегральных параметров процесса прессования: давления, усилия и работы деформации.

Обозначения, принятые в работе

- H_0 – начальная высота прессовки;
- H_k – конечная высота прессовки;
- h – текущее значение высоты прессовки;
- Δh – путь деформирования;
- R – радиус прессовки в заданном сечении z ;
- ρ – текущее значение плотности;

ρ_k – предельное значение плотности беспористого брикета;

$\delta = \frac{\rho}{\rho_k}$ – относительная плотность прессовки;

δ_0 – начальное значение относительной плотности;

δ_k – конечное значение относительной плотности;

$p = 1 - \delta$ – относительная пористость;

σ_s – предел текучести металла;

k – константа пластичности;

f – коэффициент трения

Список использованных источников

1. Хаар, А. К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах / А. Хаар, Т. Карман // Теория пластичности: сб. ст. / [ред.: Ю. Н. Работнов]. – М., 1948. – С. 41–56.
2. Ивлев, Д. Д. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучей среды / Д. Д. Ивлев // Прикладная математика и механика. – 1958. – Т. 22, вып. 1. – С. 90–96.
3. Ивлев, Д. Д. Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М.: Физматлит, 1966. – 232 с.
4. Роман, О. В. Теоретический анализ зависимости давления на стенки матрицы от плотности прессуемого материала / О. В. Роман, В. Е. Перельман // Порошковая металлургия: материалы IX Всесоюз. конф. по порошковой металлургии, май 1968 г. / Центр. и Латв. правл. НТО Машпрома [и др.]; [ред. В. С. Раковский]. – Рига, 1968. – С. 73–79.

References

1. Haar A., Karman T. On the theory of stress states in plastic and granular media. Rabotnov Yu. N. (ed.) *The Theory of Plasticity: Digest of Articles*. Moscow, 1948, pp. 41–56 (in Russian).
2. Ivlev D. D. On general equations of the theory of ideal plasticity and static of a flowing medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1958, vol. 22, iss. 1, pp. 119–128. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(58\)90087-X](https://doi.org/10.1016/0021-8928(58)90087-X)
3. Ivlev D. D. *The Theory of Ideal Plasticity*. Moscow, Fizmatlit Publ., 1966. 232 p. (in Russian).
4. Roman O. V., Perel'man V. E. Theoretical analysis of the pressure dependence on the walls of the matrix from the density of the pressed material. *Poroshkovaya metallurgiya. Materialy IX vsesoyuznoi konferentsii po poroshkovoy metallurgii, May, 1968* [Powder Metallurgy: Materials of the IX All-Union. Conference Powder Metallurgy, May 1968]. Riga, 1968, pp. 73–79 (in Russian).

Информация об авторе

Дьяконов Олег Михайлович – доктор технических наук, профессор, кафедра порошковой металлургии, сварки и технологии материалов, Белорусский национальный технический университет (пр. Независимости, 65, 220013, Минск, Республика Беларусь). E-mail: deaconco@mail.ru

Information about the author

Oleg M. Dyakonov – D. Sc. (Engineering), Professor, Department of the Powder Metallurgy, Welding and Technology of Materials, Belarusian National Technical University (65, Nezavisimosti Ave., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: deaconco@mail.ru