

МАШИНОСТРОЕНИЕ, МЕХАНИКА

УДК 539.3

О. Л. ШВЕД

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТА УВЕЛИЧЕНИЯ
ПЛАСТИЧНОСТИ МЕТАЛЛА ПРИ РАСТЯЖЕНИИ
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЫСОКОГО ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ**

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси

(Поступило в редакцию 30. 01. 2014)

Уточненные по результатам исследований определяющие соотношения нелинейной упруго-пластичности предложены в [1, 2]. Активный упругопластический процесс представлен попеременным чередованием пластического и упругого состояний. Модель нелинейной упругости обобщается на упругопластическую. Сохраняется потенциальная природа упругой деформации. Используется концепция поверхности текучести. В пластическом состоянии (при течении) материал предполагается несжимаемым. Формулируются критерии текучести и разрушения. Введены параметры упрочнения и выбраны базовые эксперименты. В упрощающем предположении, что материал является идеально упругопластическим, получены решения модельных задач, в которых реализуются все три возможных случая при формулировке дифференциальных определяющих соотношений.

В данной работе рассматривается явление прерывистости деформации [3]. В опыте Дж. Ф. Белла оно проявляется при мягком простом растяжении алюминиевого образца в виде ступенчатой диаграммы $\sigma \sim \varepsilon$ (рис. 1), состоящей из вертикальных и горизонтальных участков упругости и пластичности ([3], с. 279). Предполагаем, что диаграмма заканчивается при разрушении образца. Модель первоначально изотропного материала [1, 2], который становится трансверсально-изотропным, используем для описания одноосного растяжения и указанной диаграммы. Определим момент начала макроразрушения, который будет зависеть от величины дополнительного гидростатического давления сжатия. Получим сначала необходимые для моделирования соотношения.

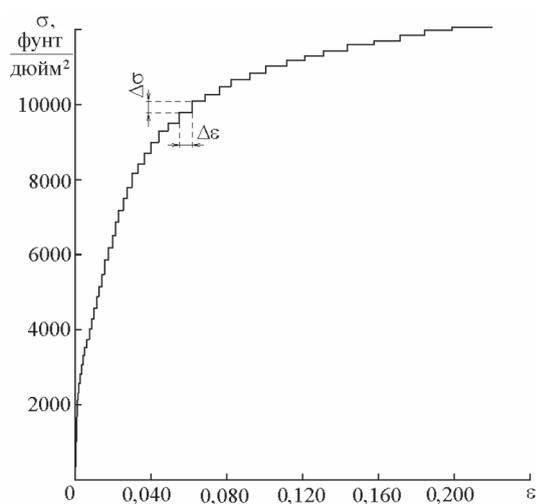


Рис. 1. Диаграмма растяжения $\sigma \sim \varepsilon$ из опыта Дж. Ф. Белла [3]

изотропным, используем для описания одноосного растяжения и указанной диаграммы. Определим момент начала макроразрушения, который будет зависеть от величины дополнительного гидростатического давления сжатия. Получим сначала необходимые для моделирования соотношения.

Пусть $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ – неподвижный ортонормированный триэдр. Введем удельную потенциальную энергию упругой деформации (потенциал напряжений) в форме Мурнагана [4, 5] $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, где $\varepsilon_2 = \delta_1 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1)^2 + \dots$, $\varepsilon_3 = \delta_{22} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1)^3 + \dots$ анизотропные структуры второй и третьей степени по компонентам тензора упругой деформации Коши – Грина. Начальные значения 77 параметров анизотропии $\delta_j = 0$ и тогда ε совпадает с изотропным потенциалом ε_0 . Переходя к мере $\mathbf{G} = 2\mathbf{C} + \mathbf{E}$, получаем

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + 4^{-1}(\delta_1 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 2) + \dots) + 8^{-1}(\delta_{22}((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)^3 + 1) + \dots) + c, \quad (1)$$

где c – минимальная постоянная, такая что $\varepsilon \geq 0$.

Для трансверсально-изотропного материала с осью \mathbf{c}_2 , выбранной направлением растяжения, ненулевыми в (1) могут быть только параметры анизотропии δ_j , где $j \in \{1-3, 7-11, 15, 22-34\}$, и выполняются равенства [2]

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= 2\delta_1 - \delta_{10}, \delta_7 = \delta_{15}, \delta_1 = \delta_3, \quad \delta_9 = \delta_8, \delta_{22} = \delta_{24} = \delta_{26} = \delta_{29}, \\ \delta_{27} &= \delta_{28}, \delta_{25} = \delta_{30} = \delta_{31}, \delta_{33} = \delta_{25}, \delta_{32} = \delta_{34} = 2\delta_{22}. \end{aligned} \quad (2)$$

Доказательство этого утверждения проводится средствами символьных вычислений. Опуская для краткости в дальнейшем слагаемые с параметрами δ_j ($j = 11, 15, 32, 33, 34$), первоначально получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_0 + 4^{-1} \left(\sum_{k,l,j=1,2,3,8,9,10} \delta_j ((\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_k - 1)(\mathbf{c}_l \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_l - 1) - 1) + \delta_7 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2)^2 + \delta_{11} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2 + \delta_{15} (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2 \right) + \\ &+ 8^{-1} \left(\sum_{m,n,j=1,2,\dots,9} \delta_{21+j} ((\mathbf{c}_m \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_m - 1)^2 (\mathbf{c}_n \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_n - 1) + 1) + \delta_{31} \left(\prod_i (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1) + 1 \right) + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2 \sum_i \delta_{31+i} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1) \right) + c \\ &(k=1,2,3,1,2,3; \quad l=1,2,3,2,3,1; \quad m=1,2,3,1,1,2,2,3,3; \quad n=1,2,3,2,3,1,3,1,2; \quad i=1,2,3), \quad (3) \\ \varepsilon_0 &= 4^{-1}(4^{-1}(-12\lambda - 8\mu + 9\nu_1 + 18\nu_2 + 8\nu_3)I_1 + 4^{-1}(2\lambda + 4\mu - 3\nu_1 - 10\nu_2 - 8\nu_3)I_1^2 + \\ &+ (-2\mu + 3\nu_2 + 4\nu_3)I_2 - (\nu_2 + 2\nu_3)I_1 I_2 + 12^{-1}(\nu_1 + 6\nu_2 + 8\nu_3)I_1^3 + 2\nu_3 I_3), \end{aligned}$$

где I_1, I_2, I_3 – первый, второй и третий главные инварианты меры $\mathbf{G} = \mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{F}_e$ и меры упругой деформации Фингера $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_e^T$, λ, μ – постоянные Ляме второго и ν_1, ν_2, ν_3 – третьего порядков. Указанные слагаемые с параметрами анизотропии δ_j в рассматриваемых нагружениях и при построении кривых пластичности являются нулевыми, хотя сами параметры будут определяться по соотношениям (2).

Пусть \mathbf{F}_e – неособенный тензор, заменяющий в упругопластичности деформационный градиент $\nabla_0 \mathbf{R}^T$ ($\mathbf{F}_e = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}^T$ согласно полярному разложению), $L_3 = \sqrt{I_3}$ – третий главный инвариант меры упругих искажений \mathbf{V} . Из уравнения (3) находим соотношение для тензора напряжений Коши

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= 2L_3^{-1} \mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^T = \mathbf{T}_0 + \sum_j \delta_j \mathbf{T}_j, \\ \mathbf{T}_0 &= 2(\sqrt{I_3})^{-1} (\varphi_0 \mathbf{E} + \varphi_1 \mathbf{F} + \varphi_2 \mathbf{F}^2) (\varphi_0 = a_0 I_3, \varphi_1 = b_0 + b_1 I_1 + b_2 I_1^2 + b_3 I_2, \varphi_2 = c_0 + c_1 I_1), \\ a_0 &= 2^{-1} \nu_3, \quad b_0 = 16^{-1}(-12\lambda - 8\mu + 9\nu_1 + 18\nu_2 + 8\nu_3), \quad b_1 = 8^{-1}(2\lambda - 3\nu_1 - 4\nu_2), \\ b_2 &= 16^{-1}(\nu_1 + 2\nu_2), \quad b_3 = -4^{-1}(\nu_2 + 2\nu_3), \quad c_0 = 4^{-1}(2\mu - 3\nu_2 - 4\nu_3), \quad c_1 = -b_3, \\ \mathbf{T}_i &= L_3^{-1} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1) \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V}, \quad \mathbf{T}_8 = L_3^{-1} 2^{-1} \mathbf{V} \cdot ((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 + \\ &+ (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2) \cdot \mathbf{V}, \quad \mathbf{T}_9 = L_3^{-1} 2^{-1} \mathbf{V} \cdot ((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2) \cdot \mathbf{V}, \quad (4) \\ \mathbf{T}_{10} &= L_3^{-1} 2^{-1} \mathbf{V} \cdot ((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3) \cdot \mathbf{V}, \\ \mathbf{T}_7 &= L_3^{-1} 2^{-1} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V}, \quad \mathbf{T}_{21+i} = 4^{-1} 3 L_3^{-1} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V}, \\ \mathbf{T}_{25} &= 4^{-1} L_3^{-1} (2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V}), \\ \mathbf{T}_{26} &= 4^{-1} L_3^{-1} (2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V}), \\ \mathbf{T}_{27} &= 4^{-1} L_3^{-1} (2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{28} &= 4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)^2\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V}), \\
\mathbf{T}_{29} &= 4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)^2\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V}), \\
\mathbf{T}_{30} &= 4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)^2\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V}), \\
\mathbf{T}_{31} &= 4^{-1}L_3^{-1}((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - \\
&- 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V}) \quad (\mathbf{C}_i = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{c}_i = \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{O}, \quad i = 1, 2, 3).
\end{aligned}$$

Уравнения (3), (4) справедливы для упругого и пластического состояний материала.

Обозначим: $\dot{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{\Omega}$ ($\mathbf{\Omega} = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O}$ – тензор упругого спина [6], точка над символом означает материальную производную) – О-производная тензора \mathbf{T} , \mathbf{D} – тензор скорости деформаций, $\nabla \mathbf{v}^T$ – градиент скорости, \mathbf{W} – тензор вихря. Введем девиатор-оператор $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{D})$ как О-производную девиатора $\text{dev } \mathbf{T}$ (4), вычисленную при условии несжимаемости $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ по соотношению $\mathbf{F}_e = \nabla \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{F}_e$. Последнее уравнение задает тензор \mathbf{F}_e в упругом состоянии. Имеем:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}(\mathbf{D}) &= (\mathbf{W} - \mathbf{\Omega}) \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot (\mathbf{W} - \mathbf{\Omega}) + \mathbf{Q}_0(\mathbf{D}) + \mathbf{Q}_1(\mathbf{D}) + \mathbf{Q}_2(\mathbf{D}), \\
\mathbf{Q}_0 &= \text{dev}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{T} + 4L_3^{-1}((b_1 + (2b_2 - c_1)l_1)\mathbf{F} \cdot \mathbf{D} + c_1\mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{D})\mathbf{F} + c_1\mathbf{F} \cdot \mathbf{D}\mathbf{F}^2 - \\
&\quad - \varphi_0\mathbf{D} + \varphi_2\mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}), \\
\mathbf{Q}_1 &= L_3^{-1} \text{dev}(\mathbf{V} \cdot ((2\delta_1\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + \delta_8\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \delta_{10}\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3)\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1 + \\
&\quad + (2\delta_2\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \delta_8\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + \delta_9\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3)\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2 + \\
&\quad + (2\delta_3\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + \delta_9\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \delta_{10}\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1)\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3 + \\
&\quad + \delta_7\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2\mathbf{C}_1)) \cdot \mathbf{V}), \\
\mathbf{Q}_2 &= L_3^{-1} \text{dev}(\mathbf{V} \cdot ((3\delta_{22}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + \delta_{27}(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \\
&\quad + \delta_{29}(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + \delta_{25}((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - \\
&- 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2) + \delta_{26}((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3) + \\
&\quad + \delta_{31}2^{-1}((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2)))\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1 + \\
&\quad + (3\delta_{23}(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \delta_{25}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + \\
&\quad + \delta_{30}(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + \delta_{27}((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - \\
&- 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2) + \delta_{28}((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3) + \\
&\quad + \delta_{31}2^{-1}((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1)))\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2 + \\
&\quad + (3\delta_{24}(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + \delta_{26}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + \\
&\quad + \delta_{28}(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \delta_{29}((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - \\
&- 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3) + \delta_{30}((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3) + \\
&\quad + \delta_{31}2^{-1}((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2)))\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3) \cdot \mathbf{V}).
\end{aligned} \tag{5}$$

В рассматриваемых нагружениях выполняются равенства $\mathbf{O} = \mathbf{E}$, $\mathbf{W} = \mathbf{\Omega} = 0$, $\mathbf{C}_i = \mathbf{c}_i$. Критерий текучести будет $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} > 0$, где $\mathbf{N} = -(\sqrt{6})^{-1}\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 + 2(\sqrt{6})^{-1}\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 - (\sqrt{6})^{-1}\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3$ – вектор внешней нормали к девиаторному сечению поверхности текучести, на котором находится точка процесса в пространстве напряжений, $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1$. Реализуется первый случай в формулировке дифференциальных определяющих уравнений [1]. Запишем дифференциальные определяющие уравнения при течении. Девиаторы \mathbf{N} , \mathbf{D} и \mathbf{Q} , согласно (5), являются пропорциональными. Для тензора \mathbf{T} имеем

$$\dot{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}}^{\Omega} = K(\mathbf{Q} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} \mathbf{N}) = 0, \quad (6)$$

где малый скаляр K , определяемый в эксперименте по двухосному растяжению, не зависит от \mathbf{D} . Определяющее уравнение для потенциала напряжений ε имеет вид

$$(L_3^{-1} \varepsilon) = (1 - \alpha) \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \quad (\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} > 0). \quad (7)$$

Здесь α – относительная часть рассеиваемой работы деформации. Введем определяющее уравнение для параметров анизотропии

$$\dot{\delta}_j = k_j \beta \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}_j (\sqrt{\mathbf{T}_j \cdot \mathbf{T}_j})^{-1} \quad (\mathbf{T}_j \neq 0), \quad (8)$$

где $k_j = \pm 1$, скаляр $\beta \geq 0$ характеризует скорость изменения анизотропии. В случае $\mathbf{T}_j = 0$ используем отмеченные выше соотношения (2) для δ_j . Параметр δ_7 полагаем следующим:

$$\delta_7 = \delta_{15} = \gamma \delta_{11} = \gamma(2\delta_1 - \delta_{10}), \quad (9)$$

где γ – постоянный коэффициент. Независимых параметров δ_j при растяжении по второй оси имеется 8, $j \in \{1, 2, 8, 10, 22, 23, 25, 27\}$. По всем наборам величин k_j из системы уравнений (3), (4), (6)–(8) выбирается набор, обеспечивающий минимальное значение β . Эта процедура несложно реализуется.

При построении девиаторного сечения удобно применить векторное представление девиаторов симметричных тензоров второго ранга в пятимерном векторном пространстве. Для этого задается ортонормированный тензорный базис пространства девиаторов $\mathbf{W}_1 = (\sqrt{6})^{-1}(\mathbf{E} - 3\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3)$, $\mathbf{W}_2 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1\mathbf{c}_1)$, $\mathbf{W}_3 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1)$, $\mathbf{W}_4 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_1)$, $\mathbf{W}_5 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_2)$. Скалярное произведение таких векторов здесь понимается как двойное скалярное произведение тензоров. Любой такой девиатор \mathbf{N} представляется в векторном виде $\mathbf{N} = \sum w_i \mathbf{W}_i$. В силу симметрии, связанной с условием трансверсальной изотропии, можно ограничиться рассмотрением трехмерного подпространства девиаторов $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3\}$. Вектор нормали \mathbf{N} к текущему девиаторному сечению поверхности текучести (содержащему точку процесса в пространстве напряжений) выбирается из двух взаимно ортогональных собственных векторов оператора (5), который имеет вид [1]

$$\begin{pmatrix} p_1 + 2p_2 & \sqrt{3}p_2 & p_3 \\ \sqrt{3}p_2 & -p_1 + 2p_2 & p_4 \\ p_3 & p_4 & p_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Третий вектор физического смысла не имеет. Существуют два семейства поверхностей, и исконая поверхность образуется соединением в сингулярных точках двух представителей этих семейств. Для построения текущего сечения достаточно двух точек на этих поверхностях: точки процесса и точки, определяемой по величине эффекта Баушингера. Перемещением из этих точек по поверхности девиаторного сечения в подпространстве $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3\}$ находятся еще две точки в плоскости $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2\}$. По этим четырем точкам с учетом симметрии строится кривая пластичности.

Если на текущем сечении появляется критическая точка, в которой собственное значение оператора (10), определяющее собственный вектор, являющийся вектором нормали в данной точке поверхности, становится кратным, то однозначный и обоснованный выбор вектора нормали из бесконечного множества собственных векторов становится невозможным. Критерий текучести в этой точке теряет смысл, и именно этот факт является основанием для введения предлагаемого критерия разрушения. Текущее девиаторное сечение вырождается. Следовательно, возникает макротрещина, поскольку альтернативой деформации является разрушение. Появление

точки, названной критической, в данном случае впервые происходит в плоскости $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2\}$ на кривой пластичности, где выполняется условие $p_3 = p_4 = 0$ (10). Наличие кратного собственного значения равносильно существованию нуля функции

$$f(\varphi) = (2p_1^2 + 6p_2^2)^{-1}(p_2^2 + p_3^2 - p_1^2 - 4p_2p_3), \quad (11)$$

где первый множитель взят для нормировки. Угол φ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) отвечает положению точки на кривой пластичности с учетом ее замкнутости, перемещение происходит по кривой из точки процесса по часовой стрелке.

Численное моделирование при течении проводилось на основе вариационного принципа [7], в квазистатическом режиме. После нахождения поля скоростей из системы уравнений (3)–(8) определяются β и \mathbf{V} . В упругом состоянии использовался принцип стационарности в варьируемой актуальной конфигурации [4]. В обоих случаях применялось обращение закона (4).

Ввиду недостатка информации о постоянных Ляме исходные данные об алюминии заменяем данными о сплаве D54S [4]: $\lambda = 0,49$, $\mu = 0,26$, $\nu_1 = -3,8$, $\nu_2 = -2,0$, $\nu_3 = -0,8$ (10^5 МПа).

Результаты расчета представлены на рис. 2 для последней ступеньки диаграммы (рис. 1). Напряжение текучести σ составляет 83,4 (МПа) и значение α выбрано 0,99998785. Функция α взята монотонно убывающей и постоянной на каждой ступеньке диаграммы, согласно которой находим $\gamma = 11$ (9).

Наряду с простым растяжением рассмотрено растяжение при наложении в промежуточном состоянии в начале последней ступеньки давления всестороннего равномерного сжатия величиной $-3^{-1}\sigma P$ ($P > 0$). Учитывалось дополнительное упрочнение, связанное с высоким гидростатическим давлением в размере $0,2P\sigma$.

На рис. 2, а кривые 1 и 2 отвечают промежуточной и конечной деформациям. Кривые 3 и 4 соответствуют растяжению под давлением для $P = 10$ и 100, эти кривые не приводим, так как они расположены в других девиаторных сечениях поверхности текучести. Стрелками обозначены проекции базисных диад $\mathbf{c}_i\mathbf{c}_i$. Проекция $\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2$ направлена вверх, на ней отмечена точка процесса.

На рис. 2, б приведены графики функции $f(\varphi)$ (11) для обозначенных кривых пластичности. На оси абсцисс отмечены малые и большие вертикальные штрихи, соответствующие приращению угла $\pi/6$ и сингулярным точкам кривых. На графике видно, что на соответствующем участке кривой 1 имеются нули функции, т. е. оператор (6) имеет кратное собственное значение.

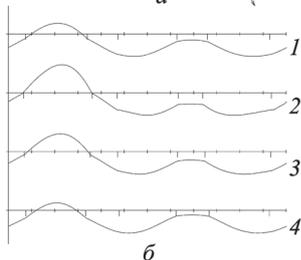
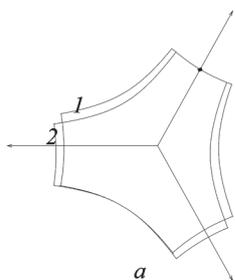


Рис. 2. Результаты расчета для последней ступеньки диаграммы (рис. 1): а – кривые пластичности, б – графики функции f

Однако вектор нормали к кривой пластичности определяется собственным вектором, который находится по простому собственному значению. На графике (кривая 2) участки кривой меняются, там впервые появляется критическая точка при переходе нуля функции на соседний участок. При наложении гидростатического давления замедляется рост параметров анизотропии, нули функции удаляются от границы участка и при тех же удлинениях материал не разрушается (кривые 3, 4). Таким образом, пластичность материала увеличивается.

Диаграмма рис. 1 описывается предложенной в рассмотренных нагружениях моделью. Формально устанавливается момент начала разрушения при вырождении текущего девиаторного сечения. Причиной разрушения является деформационная анизотропия материала. Описываются явления залечивания поврежденности и увеличения пластичности материала под высоким гидростатическим давлением сжатия при учете анизотропных структур второй и третьей степени по компонентам тензора \mathbf{C} . Естественным параметром поврежденности можно считать меру близости нулей функции $f(\varphi)$ к границам соответствующего участка кривой пластичности. Для изотропного материала нули находятся в центрах второго и пятого участков.

Литература

1. *Швед О. Л.* // Тр. VII Всерос. (с международным участием) конф. по механике деформируемого твердого тела. г. Ростов-на-Дону, 2013. Ростов-на-Дону, 2013. Т. II. С. 219–223.
2. *Швед О. Л.* // Тр. VII Всерос. (с международным участием) конф. по механике деформируемого твердого тела. г. Ростов-на-Дону, 2013. Ростов-на-Дону, 2013. Т. II. С. 224–228.
3. *Белл Дж. Ф.* Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. II. Конечные деформации. М., 1984.
4. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М., 1980.
5. *Murnaghan F. D.* Finite deformation of an elastic solid. N. Y., 1951.
6. *Швед О. Л.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 1. С. 52–58.
7. *Швед О. Л.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2008. № 2. С. 66–72.

O. L. SHVED

NUMERICAL MODELING OF THE EFFECT OF INCREASE OF METAL PLASTICITY AT TENSION BY THE IMPACT OF HIGH HYDROSTATIC COMPRESSION

Summary

Based on the model of nonlinear elastic-plastic material the phenomenon of breakup of deformation by F. Bella at soft simple stretching is described. The effects of increase of plasticity and healing of material damage at additional hydrostatic compression are modelled.