

О.Л. Швед

*Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь*

## ПОСТРОЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ТЕКУЧЕСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОГО ИДЕАЛЬНО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА МУРНАГАНА

**Аннотация.** Описывается проблема построения поверхности текучести. Поясняется графически величина потенциала скорости напряжений. Вводятся параметры упругопластического процесса: модифицированный параметр Р. Шмидта и аналог параметра Лоде, знак которого меняется только при переходе сингулярной точки кривой пластичности. Вычисляется формальная рабочая область закона Мурнагана, реальная область будет значительно меньше. Предполагается справедливый эффект, подобный эффекту Баушингера для девиатора тензора напряжений. В базовых экспериментах одноосных и двухосных растяжении, сжатии и чистом сдвиге определяется кусочно-линейная образующая с вершинами в соответствующих сингулярных точках кривых пластичности. Величина эффекта аппроксимируется кусочно-линейной зависимостью по параметру места и по параметру упрочнения. По величине эффекта в точке активного процесса находится сингулярная точка кривой, в которую перемещается базовая образующая. Поверхность текучести строится проведенными через образующую кривыми пластичности. Рассматривается определение величины эффекта при повторном нагружении после разгрузки.

**Ключевые слова:** упругопластичность, эффекты Баушингера и ему подобный, закон Мурнагана, параметры упрочнения и места, базовые эксперименты, поверхность текучести, образующая поверхности, кривые пластичности

**Для цитирования:** Швед, О.Л. Построение поверхности текучести для ортотропного идеально упругопластического материала Мурнагана / О.Л. Швед // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2021. – Т. 66, № 3. – С. 298–306. <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2021-66-3-298-306>

Oleg L. Shved

*United Institute of Informatics Problems of National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus*

## SURFACE CONSTRUCTION FOR ORTHROTROPIC PERFECTLY ELASTIC-PLASTIC MURNAGHAN MATERIAL

**Abstract.** The problem of constructing a yield surface is described. The magnitude of the stress velocity potential is explained graphically. The parameters of an elastic-plastic process are introduced: a modified R. Schmidt parameter and an analogue of the Lode parameter, the sign of which changes only when the singular point of the plasticity curve passes. The formal work area of the Murnaghan law is calculated, the real area will be much smaller. An effect similar to the Bauschinger effect for the deviator of the stress tensor is assumed to be fair. In the basic experiments of uniaxial and biaxial tension, compression and shear, a piecewise-linear generator with vertices at the corresponding singular points of the plasticity curves is determined. The magnitude of the effect is approximated by a quadratic dependence in the place parameter and piecewise-linear one in the hardening parameter. According to the magnitude of the effect, at the point of the active process there is a singular point of the curve, into which the basic generator moves. The yield surface is constructed by ductility curves drawn through the generator. Determination of the magnitude of the effect under repeated loading after unloading is considered.

**Keywords:** elastic-plasticity, Bausinger effects and the like, Murnaghan law, hardening parameters and places, basic experiments, yield surface, surface forming, plasticity curves

**For citation:** Shved O. L. Surface construction for orthotropic perfectly elastic-plastic Murnaghan material. *Vesti Natsyonal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2021, vol. 66, no. 3, pp. 298–306 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2021-66-3-298-306>

**Введение.** Проблема создания геометрически нелинейной теории упругопластичности, использующей понятие поверхности текучести, является актуальной. В одном из последних обзоров работ в этом направлении [1] рассматриваются разные точки зрения, идеи и подходы.

Новый подход состоит в обобщении подходящей модели упругого материала. Модель Мурнагана [2, 3] представляется наиболее совершенной конструкцией в механике сплошных сред и соответствует идее обобщения: максимального учета информации об упругом поведении материала для ее использования в пластичности. Для изотропного материала пять его упругих постоянных Ламе второго и третьего порядка  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $\nu_3$  определяются в физических экспериментах, а также согласно полиномиальному представлению удельной потенциальной энергии упругой деформации возможно описание появления и развития упругой деформационной анизотропии в активном процессе.

При мягком нагружении справедливы определяющие уравнения упругопластического материала Мурнагана, поскольку во всех экспериментах с мягким нагружением отчетливо проявляется эффект Савара–Массона (Портвена–Ле Шателье) [4], описываемый этими уравнениями. Нагружение тела считается мягким, если на его поверхности неизвестны скорости перемещений, а заданы лишь нагрузки. В этом случае упругопластический процесс происходит со скоростью, определяемой самим материалом, а не условиями эксперимента [5].

*Цель исследования* – построение поверхности текучести для важного частного случая обобщенной на упругопластичность модели упругого материала американского математика Ф. Мурнагана [6]. Настоящая работа является расширенным вариантом доклада на XX международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (15–18 июня 2020 г., г. Ростов-на-Дону, Россия).

**Потенциал скорости напряжений.** Непрерывная поверхность текучести (поверхность нагружения, предельная поверхность) в пространстве напряжений определяется для элемента деформируемого твердого тела, и ее непрерывное изменение зависит от истории нагружения элемента. Применяем векторное представление симметричного тензора второго ранга.

Следует отметить, что в [7], где рассматривался вопрос о поверхности текучести, допущен ряд неточностей, связанных со сложностью объекта исследования и недостаточной проработкой проблемы. Они исправлены в последующих работах. Устранена неопределенность в выборе вектора нормали в сингулярной точке поверхности текучести [6]. Используется только один модифицированный параметр Р. Шмидта. Потенциалы напряжений и скорости напряжений получены в самом общем виде для триклинного материала [8]. Из потенциала напряжений удалено слагаемое первой степени тензора упругих деформаций. Ф. Д. Мурнаган его использовал [3], однако сейчас это не считается правильным. Существенно уточнены определяющие уравнения в скоростях [6].

Учитывались следующие соображения: эксперимент должен включаться в теорию, чем позже, тем лучше [2]; поверхность текучести, как выяснилось недавно, невозможно найти экспериментальным методом [5]; конкретное описание поверхности в литературе отсутствует [1, 9]. Информация о поверхности получена теоретическим методом, сохраняющим, по возможности, полезное свойство потенциальности в скоростях напряжений.

В пассивном процессе потенциал скорости напряжений существует [2]. Рассмотрим активный процесс:  $\mathbf{Q}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{N} > 0$ ,  $\mathbf{Q}(\mathbf{D})$  – критериальный девиатор;  $\mathbf{D}$  – тензор скорости деформаций;  $\mathbf{N}$  – нормированный вектор нормали. Потенциал скорости напряжений в регулярной точке поверхности (первый случай в дифференциальных определяющих уравнениях [6]) имеет вид:

$$\varphi(\mathbf{D}) = K \left( \varphi_0(\mathbf{D}) + \varphi_{23}(\mathbf{D}) - 2^{-1} \omega (\mathbf{N} \cdot \mathbf{D})^2 \right), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{D}} = \overset{\Omega}{\mathbf{T}} = K(\mathbf{Q} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} \mathbf{N}) \quad (\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} > 0, \mathbf{N} \cdot \mathbf{D} > 0), \quad (1)$$

где  $\mathbf{T}$  – тензор напряжений Коши;  $\overset{\Omega}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{\Omega}$  – его объективная О-производная, тензор упругого спина  $\mathbf{\Omega} = 0$  для ортотропного материала;  $\varphi_0$  – потенциал изотропного слагаемого в выражении  $\mathbf{Q}$ ;  $\varphi_{23}$  – потенциал анизотропного слагаемого;  $\omega$  – собственное значение оператора  $\mathbf{Q}$ , соответствующее собственному вектору  $\mathbf{N}$ ;  $K$  – малое положительное число. Для иллюстрации изложения используем данные по рекристаллизованному вольфраму [2].

Кривая скаляра  $\varphi_0 + \varphi_{23}$  имеет эллиптическую форму в отличие от кривой скаляра  $\varphi$  на рис. 1. Точки кривой откладывались радиус-вектором из точки процесса по направлению нормированного вектора  $\mathbf{D}$ . Правый конец кривой на рис. 1 при двухосном растяжении соответствует факту

дальнейшего отсутствия потенциала скорости напряжений, полезное свойство не сохраняется, материал становится недиссипативным при  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \leq 0$ . Тогда реализуется второй особый случай в дифференциальных определяющих уравнениях [6].

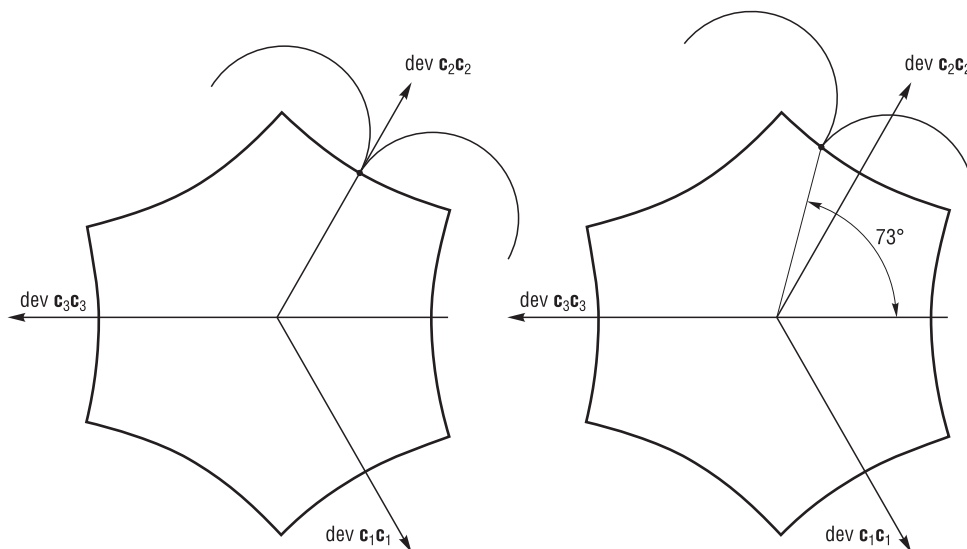


Рис. 1. Величина потенциала скорости напряжений при одноосном растяжении (слева) и двухосном растяжении (справа)

Fig. 1. The magnitude of the stress velocity potential for uniaxial tension (left) and biaxial tension (right)

Другой конец построенной кривой находится на касательной прямой к кривой пластичности в точке процесса, что означает последующую разгрузку:  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} \leq 0$  (то же самое наблюдается при одноосном растяжении). Далее потенциал скорости напряжений существует, как указано выше. При сжатии ситуация аналогичная. Величина радиус-вектора, очерчивающего кривую, изображена без учета скаляра  $K$  в (1), то есть увеличена на несколько порядков. Для сингулярной точки, когда О-производная тензора  $\mathbf{T}$  равна нулю (третий случай в дифференциальных определяющих уравнениях [6]),  $\varphi = 0$ .

Потенциал напряжений ввел в механику Дж. Грин [10], физический смысл понятия – накопленная энергия упругой деформации  $\varepsilon$  [2]. Потенциал скорости напряжений использовал В. Д. Ключников [11]. Информация о физическом смысле потенциала скорости напряжений при течении в литературе отсутствует. Вероятно, это величина изменения запасенной энергии, вычисленная по направлению девиатора  $\mathbf{D}$ , в векторной интерпретации тензора. В упругости потенциал скоростей напряжений называется удельной потенциальной энергией в варьируемой конфигурации. При совпадении направлений векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{N}$  значение потенциала  $\varphi$  наименьшее (см. рис. 1), но не нулевое. Направления  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{Q}$  близки, при одноосном нагружении и разгрузке совпадают. Большая часть работы деформации рассеивается, малая часть идет на перестройку структуры, вызванную ростом анизотропии, и приращение  $\varepsilon$ . Линия уровня скаляра  $\varphi$  похожа на осевое сечение конуса с малым углом при вершине, где ось задается вектором  $\mathbf{N}$ .

Из (1) следует потенциальность девиатора  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}$ . Отсюда вытекает, что поверхность текучести в пространстве напряжений образуется своими пятимерными девиаторными сечениями. Поверхность сечения получается соединением частей поверхностей представителей двух взаимно ортогональных семейств вогнутых регулярных поверхностей в сингулярных точках. Поверхности первого и второго представителя семейства, соответственно пересекающие (при одноосном растяжении) и не пересекающие (при одноосном сжатии) проекцию на девиаторное сечение орта исходного неподвижного триэдра, определяются по известной на них точке (например, точке процесса). Если точка сингулярная, то находится вся поверхность девиаторного сечения. В общем случае требуется вторая такая точка.

Для ортотропного материала поверхность текучести с точкой процесса рассматривается в трехмерном векторном пространстве напряжений  $\{\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2\}$ , натянутом на векторы  $\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_0 = (\sqrt{3})^{-1}\mathbf{E}, \mathbf{W}_1 = (\sqrt{6})^{-1}(\mathbf{E} - 3\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3), \mathbf{W}_2 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1\mathbf{c}_1)$ , где  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$  – неподвижный ортонормированный триэдр осей материала,  $\mathbf{E}$  – единичный тензор [2]. Она создается своими плоскими сечениями – замкнутыми шестизвенными кусочно-гладкими кривыми пластичности. Расчеты кривых проводятся с использованием основных трехмерных девиаторных подпространств  $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3\}, \{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_4\}, \{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_5\}$ , где  $\mathbf{W}_3 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1), \mathbf{W}_4 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_1), \mathbf{W}_5 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_2)$ .

**Предположение и допущения.** *Дополнительное модельное предположение.* С целью устранения указанной неопределенности при нахождении кривой пластичности полагаем, что для упругопластического материала имеет место вызванный возникновением и развитием анизотропии материала эффект, подобный эффекту Баушингера, для пространства девиаторов напряжений. Основанием является условие равномерного изменения поверхности и результаты численного моделирования чистого сдвига [12]. Ограничимся при расчетах для необходимого упрощения случаем идеально упругопластического материала. Это позволит выполнить численную реализацию теории, однако при этом утрачивается возможность численного описания проблемных течений металла, таких как экструзия свинца [5].

**Параметры упругопластического процесса.** Вводятся необходимые для модели материала безразмерные параметры: аналог предназначенного для изотропного материала параметра Лоде  $L$ , параметр места  $M$  точки процесса на регулярном участке кривой пластичности и модифицированный параметр упрочнения Шмидта. Вектор нормали к поверхности девиаторного сечения поверхности текучести выбирается из пяти собственных векторов критериального оператора, образующих локальный девиаторный базис [6]. Удельная мощность в соотношении параметра упрочнения Шмидта  $\dot{\chi} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}$  может быть отрицательной, поэтому заменяется произведением компонент сомножителей при векторе нормали в разложении девиаторов по векторам локального базиса:

$$\dot{\chi} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} \mathbf{N} \cdot \mathbf{D} \quad (\chi(0) = 0). \tag{2}$$

Неотрицательный параметр упрочнения  $\chi$  в (2) монотонно увеличивается только при течении.

Параметр места определяется отношением величин: угла между радиус-векторами девиаторной точки процесса и ближайшей к ней точки-конца участка кривой пластичности, к половине угла, между точками-концами участка. Если участок принадлежит представителю первого семейства, то параметр берется со знаком минус:

$$M(\text{dev } \mathbf{T}) = k \frac{\arccos \max(\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_0)}{2^{-1} \arccos \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2} \quad (|M| \leq 1), \tag{3}$$

где  $\mathbf{w}_0 = \text{dev } \mathbf{T} \|\text{dev } \mathbf{T}\|^{-1}, \mathbf{w}_1 = \text{dev } \mathbf{T}_1 \|\text{dev } \mathbf{T}_1\|^{-1},$

$\mathbf{w}_2 = \text{dev } \mathbf{T}_2 \|\text{dev } \mathbf{T}_2\|^{-1} \left( \|\mathbf{T}\| = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T})^{\frac{1}{2}} \right), \text{dev } \mathbf{T}_1,$

$\text{dev } \mathbf{T}_2$  – крайние точки звена,  $k = 1$  при сжатии,  $k = -1$  при растяжении.

Параметр места (3) в отличие от параметра Лоде позволяет эффективно найти вектор нормали, по которому происходит построение кривой пластичности, так как знак его меняется только при переходе сингулярной точки кривой (рис. 2). Точка процесса находится в начале координат, сингулярные точки отмечены чертой [12].

**Область существования модели Мурнагана.** Установим формальные границы применимости изотропного закона Мурнагана и укажем дополнительное ограничение, вызванное

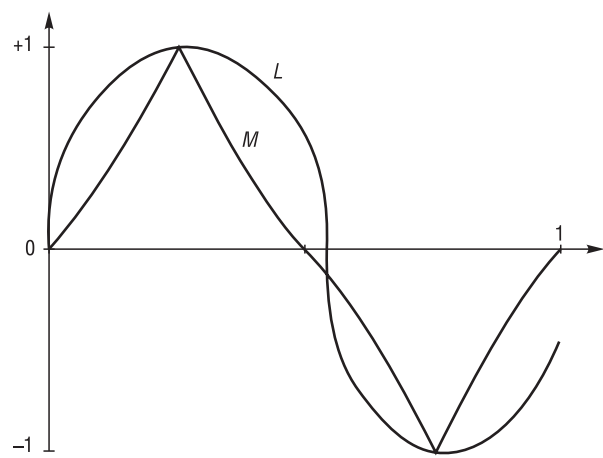


Рис. 2. Параметры места  $M$  и Лоде  $L$  при чистом сдвиге на двух соседних звеньях кривой пластичности

Fig. 2. The parameters of the place  $M$  and Lode  $L$  at a pure shift at two adjacent links of the plasticity curve

упругой деформационной анизотропией. Для упругопластического материала требуется возможность численного обращения закона. Необходимым является отличие от нуля якобиана отображения  $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{F})$ . Выполняются условия  $\mathbf{T} = t_1 \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1 + t_2 \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2 + t_3 \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_3$ ,  $\mathbf{F} = f_1 \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1 + f_2 \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2 + f_3 \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_3$ .

С точностью до ненулевого постоянного множителя вычисляем якобиан  $J = \left| \frac{\partial t_k}{\partial f_l} \right|_{k,l=1,2,3}$  [1]:

$$\begin{aligned}
 J = & a_1 \sum_{i \neq k} f_i^6 + a_2 \sum_{i \neq k} f_i f_k^5 + a_3 \sum_{i \neq k} f_i^2 f_k^4 + a_4 f_1 f_2 f_3 \sum_{i \neq k} f_i f_k^2 + a_5 (f_1 f_2 f_3)^2 + a_6 f_1 f_2 f_3 \sum f_i^3 + \\
 & + a_7 \sum_{i \neq k} (f_i f_k)^3 + a_8 \sum f_i^5 + a_9 \sum_{i \neq k} f_i f_k^4 + a_{10} \sum_{i \neq k} f_i^2 f_k^3 + a_{11} \sum_{l \neq i, l \neq k, i \neq k} f_l f_i^2 f_k^2 + \\
 & + a_{12} f_1 f_2 f_3 \sum f_i^2 + a_{13} \sum f_i^4 + a_{14} \sum_{i \neq k} f_i f_k^3 + a_{15} f_1 f_2 f_3 \sum f_i + a_{16} \sum (f_i f_k)^2 + \\
 & + a_{17} \sum f_i^3 + a_{18} f_1 f_2 f_3 + a_{19} \sum_{i \neq k} f_i f_k^2 + a_{20} \sum f_i^2 + a_{21} \sum_{i \neq k} f_i f_k + a_{22} \sum f_i + a_{23},
 \end{aligned} \tag{4}$$

где  $a_i = a_i(\lambda, \mu, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$  ( $l, i, k \in \{1, 2, 3\}$ ). Конкретизируем материал для получения наглядного представления области существования модели. Для вольфрама коэффициенты  $a_i$  имеют вид:

$$\begin{aligned}
 a_1 = & 2^{-10} \cdot 5,955583725, \quad a_2 = 2^{-9} \cdot 34,580198835, \quad a_3 = 2^{-10} \cdot 137,683252035, \\
 a_4 = & -2^{-8} \cdot 36,517858965, \quad a_5 = 2^{-9} \cdot 160,347539817, \quad a_6 = 2^{-9} \cdot 42,557106375, \\
 a_7 = & -2^{-8} \cdot 82,533078171, \quad a_8 = -2^{-9} \cdot 3,801777525, \quad a_9 = -2^{-9} \cdot 99,779252625, \\
 a_{10} = & -2^{-8} \cdot 147,683920437, \quad a_{11} = 2^{-8} \cdot 33,1029306765, \quad a_{12} = -2^{-7} \cdot 53,142401025, \\
 a_{13} = & -2^{-10} \cdot 191,972925765, \quad a_{14} = -2^{-8} \cdot 263,121227373, \quad a_{15} = -2^{-8} \cdot 655,625977059, \\
 a_{16} = & -2^{-10} \cdot 2849,976779631, \quad a_{17} = 2^{-8} \cdot 253,662908645, \quad a_{18} = 2^{-7} \cdot 1974,551887127, \\
 a_{19} = & 2^{-8} \cdot 1510,038432355, \quad a_{20} = -2^{-10} \cdot 1154,1366579437, \quad a_{21} = -2^{-9} \cdot 1670,715533033, \\
 a_{22} = & -2^{-9} \cdot 1289,425458373, \quad a_{23} = 2^{-10} \cdot 2567,413523557.
 \end{aligned}$$

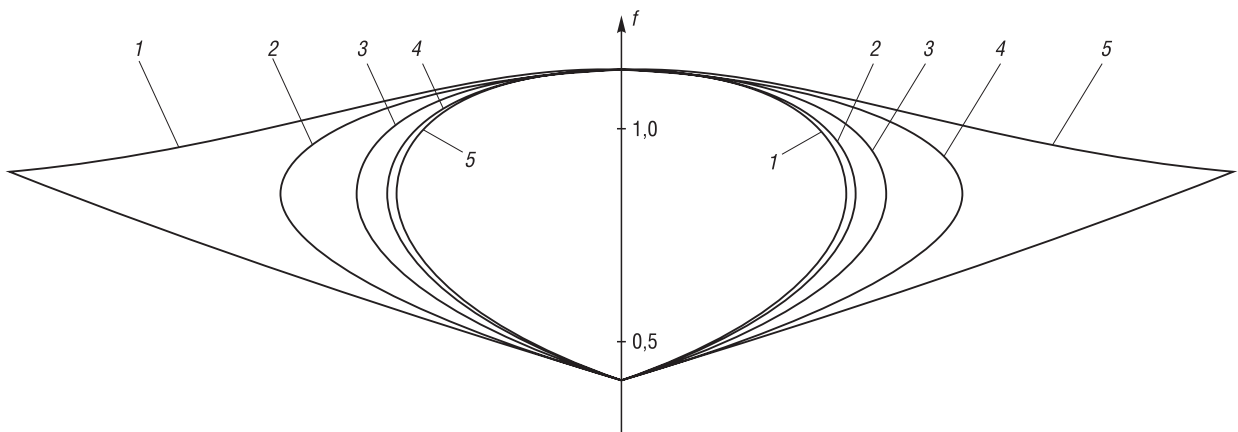


Рис. 3. Формальная область существования изотропного закона Мурнагана, ограниченная нулевыми значениями якобиана его отображения. Совмещенные плоские сечения 1–5 поверхности  $J(f_1, f_2, f_3) = 0$

Fig. 3. The formal region of existence of the isotropic Murnaghan law, limited by zero values of the Jacobian of its mapping. Combined flat sections 1 to 5 of the surface  $J(f_1, f_2, f_3) = 0$

Согласно (4) проводим построение якобиана. Исходная плоскость с кривой 1 натянута на направляющий вектор  $\mathbf{W}_0$  шаровой оси, обозначенный на рис. 3 стрелкой, и ортогональный ему вектор  $\text{dev } \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i (\text{dev } \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i \cdots \text{dev } \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i)^{\frac{1}{2}}$ , направленный влево от оси. Плоскость расположена в векторном пространстве меры  $\mathbf{F}$  и последовательно поворачивается на угол  $(12)^{-1}\pi$ . В повернутых



плоскостях расположены кривые 2–5. При дальнейших поворотах в силу изотропии кривые повторяются в обратном порядке от кривой 5 до кривой 1. Угол общего поворота будет составлять  $3^{-1}2\pi$ . Вектор, направленный влево от шаровой оси, будет теперь вектором проекции на девятую торную плоскость следующей базисной диады  $\mathbf{c}_k \mathbf{c}_k$ ,  $k = i + 1$ ;  $i, k \in \{1, 2, 3\}$  с учетом круговой перестановки индексов.

Масштабы на рис. 3 по горизонтали и вертикали совпадают. Внутренняя область, ограниченная поверхностью  $J(f_1, f_2, f_3) = 0$ , задает формальную область существования закона Мурнагана. Необходимое условие  $f_i > 0$  имеет место. На шаровой оси выполняется  $f_1 = f_2 = f_3 = f$ ,  $f_- \leq f \leq f_+$ ,  $f_- \approx 0,412$ ,  $f_+ \approx 1,139$ . На шаровой оси в пространстве напряжений выполняется  $t_1 = t_2 = t_3 = t$ ,  $t_- \leq t \leq t_+$ ,  $t_- \approx -1065$  ГПа,  $t_+ \approx 25,6$  ГПа. При  $f = 1$  будет  $t = 0$ .

При наложении высокого гидростатического давления сжатия  $p$  пластичность материала увеличивается. Известно, что для вольфрама существует пороговое напряжение, до которого увеличение пластичности не происходит. При простом сжатии, согласно численным экспериментам, оно находится в интервале  $(-90, -75)$  ГПа. Увеличение пластичности происходит только до значения  $p = -300$  ГПа, которому соответствует величина  $f = f_-^0 \approx 0,688$ , а дальше пластичность уменьшается. Значит, рабочая область на шаровой оси составляет  $f_-^0 < f < f_+^0 \leq f_+$ ,  $f_+^0$  подлежит дальнейшему определению. Рабочая область для упругопластического материала Мурнагана в трехмерном пространстве меры Фингера образуется для рассматриваемого материала окрестностью отрезка шаровой оси  $[f_-^0, f_+^0]$ , которая определится физическими и численными экспериментами.

**Схема построения. Базовые эксперименты.** Выбраны минимально необходимые, проводимые до момента разрушения образца, базовые эксперименты: растяжение одноосное ( $R_1$ ), двухосное ( $R_2$ ); сжатие одноосное ( $G_1$ ), двухосное ( $G_2$ ) и чистый сдвиг ( $S$ ) [12, 13].

Важнейшая функция теории  $\alpha$  – относительная часть величины рассеиваемой удельной мощности деформации, входит в определяющее уравнение [6]

$$(L_3^{-1}\epsilon) = (1 - \alpha)\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \quad (\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} > 0), \tag{5}$$

где  $L_3$  – третий главный инвариант меры упругих искажений. Задание величины  $\alpha$  в (5) определяет момент разрушения.

При чистом сдвиге величины обоих эффектов по определению должны совпадать. Наблюдается лишь качественное соответствие результатов физического и численного экспериментов [12]. Это вызвано неучетом свойства вязкости материала в упругопластической модели Мурнагана. В отличие от опытных значений наблюдается также с увеличением параметра упрочнения линейное уменьшение величины введенного эффекта  $W_e$  ( $W$  – эффект Баушингера) без всякого участка стабилизации. Поэтому в численных базовых экспериментах величины нового эффекта в момент разрушения увеличиваем пропорционально случаю чистого сдвига, сохраняя при этом обнаруженную линейную зависимость.

Данные по экспериментам получаются следующие:

( $R_1$ )	$\alpha = 0,99595$ ;	$W = 0,8$ ;	$W_e = 0,957$ ;	$\chi = 0,0296$ ;
( $R_2$ )	$\alpha = 0,992$ ;	$W = 0,85$ ;	$W_e = 0,96$ ;	$\chi = 0,0063$ ;
( $G_1$ )	$\alpha = 0,99757$ ;	$W = 0,7$ ;	$W_e = 0,97$ ;	$\chi = 0,0456$ ;
( $G_2$ )	$\alpha = 0,99358$ ;	$W = 0,75$ ;	$W_e = 0,95$ ;	$\chi = 0,018823$ ;
( $S$ )	$\alpha = 0,9865$ ;	$W = 0,4$ ;	$W_e = 0,91$ ;	$\chi = 0,0033$ .

Расчеты в [13] обновлены в связи с конкретным построением поверхности текучести. Вычислены величины параметров места и упрочнения. При одноосных растяжении, сжатии значения параметра места составили  $\pm 1$ ; при чистом сдвиге значение 0 (как для параметра Лоде); при двухосных  $\pm 0,5$  и немного увеличивались с увеличением параметра упрочнения. Большее значение параметра упрочнения получается при простом сжатии, меньшее – при чистом сдвиге.

**Базовая образующая поверхности текучести.** Определяются базовые сингулярные точки на фиксированной образующей для полученных величин параметра упрочнения. Кусочно-линейная поверхностная образующая, соединяющая сингулярные базовые точки и еще две

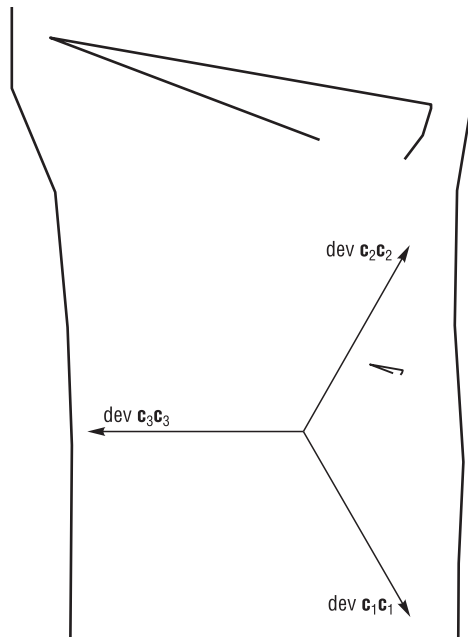


Рис. 4. Три проекции образующей на плоскости  $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_0\}, \{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2\}, \{\mathbf{W}_2, \mathbf{W}_0\}$

Fig. 4. Three projections of the generator on the plane  $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_0\}, \{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2\}, \{\mathbf{W}_2, \mathbf{W}_0\}$

удаленные крайние точки, жестко перемещалась вместе с перемещением любой своей точки. Крайние точки ограничивают рабочую область использования упругого закона Мурагана. Крайние звенья образующей при ее перемещении оставляем параллельными отрезками. Начальную базовую образующую считаем прямолинейной.

Вторая проекция увеличена (изображение сверху на рис. 4) и точки нагружений слева направо по часовой стрелке расположены так:  $(R_1), (R_2), (G_1), (G_2), (S)$ . На крайних проекциях точки образующей располагаются снизу вверх так: удаленная нижняя точка,  $(G_2), (G_1), (S), (R_1), (R_2)$ , удаленная верхняя точка.

Все шесть возможных базовых образующих зависимости: две тройки из них связаны поворотом на  $120^\circ$ , а каждые две соседние – зеркальным отражением от соответствующей девиаторной проекции базисной диады.

**Произвольное нагружение.** Используем кусочно-линейную аппроксимацию данных базовых экспериментов по параметрам места и упрочнения. При фиксированном параметре места  $M$  последняя аппроксимация имеет вид:

$$W_e(\chi) = -2^{-1}(Y - y)(X - x)^{-1}(|\chi - X| - (\chi - X)) + Y \quad (X > x, Y < y), \quad (6)$$

где  $x, X$  – фиксированные значения  $\chi, y, Y$ , значения  $W_e$ , начальные и конечные. Ломаная состоит из двух участков, величина эффекта на втором участке постоянная (6).

Величины эффекта в экспериментах для значений параметра упрочнения, превышающих максимальные, продолжаем постоянными величинами. Для всякого нагружения при течении находится величина эффекта в зависимости от параметра места при известных значениях параметра упрочнения и определяется ближайшая сингулярная точка. В эту точку перемещается базовая образующая поверхности текучести, по точкам которой строятся конкретные кривые пластичности. Изменение анизотропных свойств материала в точке процесса влияет на строение всей последующей поверхности текучести, при этом обеспечивается непрерывность поверхности.

**Возможные дополнения и обобщения.** При разгрузке по известной образующей строится поверхность текучести. Для возможных следующих значений параметра упрочнения величина эффекта задается по параметру места и начальной величине эффекта. Вопрос, как это реализовать, является непростым и нуждается в дальнейшем рассмотрении. В первом приближении возможен следующий вариант.

Обозначим начальные величины при повторном нагружении  $\chi = \chi_1, W_e = W_1$ . Начальные значения в (6) для нового параметра места будут  $x = 0, y = 1$ . Рассмотрим линейную функцию  $y_1(\chi) = (Y - 1)X^{-1}\chi + 1$  и постоянную  $y_2(\chi) = Y$ , которые определяют левый и правый участки кусочно-линейной функции в (6). Для удовлетворения начальным условиям повторного нагружения  $y_1(\chi_1) = y_2(\chi_1) = W_1$  изменяем эти функции  $y_1(\chi) = (Y - 1)X^{-1}(\chi - \chi_1) + W_1, y_2(\chi) = W_1$ . Построим из них, используя усреднение с весом, искомую функцию в виде  $W_e(\chi) = (1 - \chi_1 X^{-1})y_1(\chi) + \chi_1 X^{-1}y_2(\chi)$ . Тогда получаем

$$W_e(\chi) = (1 - \chi_1 X^{-1})(Y - 1)X^{-1}(\chi - \chi_1) + W_1 \quad (\chi_1 \leq \chi \leq X). \quad (7)$$

Если разгрузка происходит при  $\chi_1 = 0$ , материал остается изотропным и выполняется  $W_1 = 1, W_e(X) = L$ . Величина угла наклона прямой  $W_e(\chi)$  к оси абсцисс с увеличением  $\chi_1$  до  $X$  монотонно стремится к нулю. Далее функция в (7) продолжается постоянным значением  $W_e(X)$ . Учитывается история нагружения и данные базовых экспериментов.

Отказ от условия идеальности упругопластического процесса потребует большого количества необходимой информации. В упругом состоянии точка активного процесса перемещается по соотношениям нелинейной упругости. По величине эффекта также находятся точка, противоположная девиаторной точке процесса, и затем сингулярная точка, в которую также перемещается базовая образующая, и проводятся кривые пластичности, то есть перестраивается поверхность текучести.

Из результатов расчета процесса чистого сдвига [12] следует важный вывод: для практического использования рассматриваемой модели материала необходимо ее обобщение на упруго-вязкопластичность. Можно ввести закон анизотропно-кинематического упрочнения, следуя основному предположению: материал проявляет вязкие свойства только в активном процессе [14]. Этот вопрос требует дальнейшего рассмотрения.

**Заключение.** Обсуждаемая модель разрабатываемого нелинейно упругопластического материала Мурнагана имеет самостоятельное значение для численного моделирования мягкого нагружения [4, 5] (см. также введение). Построенная поверхность текучести является необходимым элементом теории. Информация о попытках найти поверхность имеется в [7], любопытный экземпляр поверхности предложен в работе [15]. Возможно простое обобщение ортотропного материала [6] на моноклинный материал и далее более сложное обобщение – на триклинный, включающее описание поверхности текучести в общем случае. Видимо, в дальнейшем потребуются информация о зависимости  $W = W(\mathbf{D})$ .

### Список использованных источников

1. Xiao, H. Elastoplasticity beyond small deformations / H. Xiao, O. T. Bruhns, A. Meyers // *Acta Mech.* – 2006. – Vol. 182. – P. 31–111. <https://doi.org/10.1007/S00707-005-0282-7>
2. Лурье, А. И. Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
3. Murnaghan, F. D. Finite deformation of an elastic solid / F. D. Murnaghan. – N. Y.: Dover, 1951. – 140 p.
4. Белл, Дж. Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел / Дж. Ф. Белл. – М.: Наука, 1984. – Ч. 2: Конечные деформации. – 432 с.
5. Жилин, П. А. Основные уравнения неупругих сред / П. А. Жилин // Актуальные проблемы механики: труды XXVIII летней школы. – СПб., 2001. – С. 14–58.
6. Швед, О. Л. Модель упругопластического материала Мурнагана / О. Л. Швед // *Приклад. математика и механика.* – 2019. – Т. 83, № 1. – С. 158–172.
7. Швед, О. Л. К теории упругопластичности при конечных упругих деформациях и поворотах / О. Л. Швед // *Докл. Нац. акад. наук Беларуси.* – 2005. – Т. 49, № 3. – С. 44–48.
8. Швед, О. Л. Вычисление критериального девиатора и вектора нормали к девиаторному сечению поверхности текучести для упругопластического материала Мурнагана / О. Л. Швед // *Информатика.* – 2019. – Т. 16, № 3. – С. 48–58.
9. Шевченко, Ю. Н. Построение поверхности нагружения в теории пластичности / Ю. Н. Шевченко // *Приклад. механика.* – 1996. – Т. 32, № 11. – С. 31–37.
10. Green, G. On the laws of reflection and refraction of light at the common surface of two non-crystallized media / G. Green // *Mathematical Papers of the Late George Green.* – Cambridge Univ. Press, 2014. – P. 243–270. <https://doi.org/10.1017/SBO9781107325074.009>
11. Ключников, В. Д. Математическая теория пластичности / В. Д. Ключников. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979. – 208 с.
12. Швед, О. Л. Численное моделирование чистого сдвига для идеально упругопластического материала (материала Мурнагана) / О. Л. Швед // *Вест. Нац. акад. Навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук.* – 2019. – Т. 64, № 2. – С. 182–189. <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2019-64-2-182-189>
13. Швед, О. Л. Численное моделирование базовых экспериментов для упругопластического материала Мурнагана / О. Л. Швед // *Сборник трудов XII Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики.* Уфа 19–25 авг. 2019 г. – Т. 3. – С. 406–408.
14. Пежина, П. Основные вопросы вязкопластичности / П. Пежина. – М.: Мир, 1968. – 176 с.
15. Gurta, N. K. A Study of Yield Surface upon Reversal of Loading under Biaxial Stress / N. K. Gurta, H. A. Laert // *J. Appl. Math. Mech. (ZAMM).* – 1983. – Vol. 63. – P. 497–504. <https://doi.org/10.1002/zamm.19830631005>

### References

1. Xiao H., Bruhns O. T., Meyers A. Elastoplasticity beyond small deformations. *Acta Mechanica*, 2006, vol. 182, pp. 31–111. <https://doi.org/10.1007/S00707-005-0282-7>
2. Lurie A. I. *Nonlinear Theory Elasticity*. Moscow, Nauka Publ., 1980. 512 p. (in Russian).
3. Murnaghan F. D. *Finite Deformation of an Elastic Solid*. New York, Dover, 1951. 140 p.



4. Bell J.F. *Experimental Foundations of the Mechanics of Deformable Solids. Part II. Final deformations*. Moscow, Nauka Publ., 1984. 432 p. (in Russian).
5. Zhilin P.A. Basic equations of inelastic media. *Aktual'nye problemy mekhaniki: trudy XXVIII letnei shkoly* [Actual Problems of Mechanics: Proceedings of the XXVIII Summer School]. St. Petersburg, 2001, pp. 14–58 (in Russian).
6. Shved O.L. Murnaghan elastic-plastic material model. *Prikladnaya matematika i mekhanika = Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, vol. 83, no. 1, pp. 158–172 (in Russian).
7. Shved O.L. To the theory of elastic-plasticity at finite elastic strains and rotations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2005, vol. 49, no. 3, pp. 44–48 (in Russian).
8. Shved O.L. Calculation of the criterion deviator and the normal vector to the deviatorial cross section of the yield surface for the Murnaghan elastic-plastic material. *Informatika = Informatics*, 2019, vol. 16, no. 3, pp. 48–58 (in Russian).
9. Shevchenko Yu. N. Construction of a loading surface in the theory of plasticity. *International Applied Mechanics*, 1996, vol. 32, no. 11, pp. 845–850 <https://doi.org/10.1007/bf02086658>
10. Green G. On the laws of reflection and refraction of light at the common surface of two non-crystallized media. *Mathematical Papers of the Late George Green*. Cambridge University Press, 2014, pp. 243–270. <https://doi.org/10.1017/CBO9781107325074.009>
11. Klyushnikov V.D. *Mathematical Theory of Plasticity*. Moscow, Publ. House of Moscow. University, 1979. 208 p. (in Russian).
12. Shved O.L. Numerical modeling of a clean shift for perfectly elastic-plastic material (Murnaghan's material). *Vestsi Natsyonal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2019, vol. 64, no. 2, pp. 182–189 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2019-64-2-182-189>
13. Shved O.L. Numerical modeling of basic experiments for the elastic-plastic material of Murnaghan. *Sbornik trudov XII Vserossiiskogo s'ezda po fundamental'nykh problemam teoreticheskoi i prikladnoi mekhaniki. Ufa 19–25 avgusta 2019 g.* [Proceedings of the XII All-Russian Congress on the fundamental problems of theoretical and applied mechanics. Ufa, August 19–25, 2019], vol. 3, pp. 406–408 (in Russian).
14. Pezhina P. *Key Issues of Viscoplasticity*. Moscow, Mir Publ., 1968. 176 p. (in Russian).
15. Gurta N. K., Laert H. A. A Study of Yield Surface upon Reversal of Loading under Biaxial Stress. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics (ZAMM)*, 1983, vol. 63, pp. 497–504. <https://doi.org/10.1002/zamm.19830631005>

### Информация об авторе

Швед Олег Лаврентьевич – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории идентификации систем, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 6, 220012, Минск, Республика Беларусь). E-mail: [swed@newman.bas-net.by](mailto:swed@newman.bas-net.by)

### Information about the author

Oleg L. Shved – Ph. D. (Engineering), Leading Researcher of the Laboratory of System Identification, United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (6, Sarganov Str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [swed@newman.bas-net.by](mailto:swed@newman.bas-net.by)