

УДК 533.73+57.037

*М. Л. ЛЕВИН, А. А. МАХАНЁК***СРАВНЕНИЕ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ  
ОБЩЕЙ ГАЗОВОЙ КРИОТЕРАПИИ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ  
И РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ***Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси**(Поступила в редакцию 15.08.2014)*

**Введение.** Общая газовая криотерапия (ОГКТ) является высокоэффективным способом оздоровления людей, лечения при многих патологиях, повышения работоспособности и сокращения сроков восстановления спортсменов после больших физических нагрузок [1–3]. Лечебные и другие положительные эффекты, возникающие в результате прохождения пациентом курса ОГКТ, являются следствием кратковременного, но сильного воздействия сверхнизких температур на кожный покров человека. Физиологические, биохимические и биофизические механизмы реализации данных эффектов до сих пор не ясны. Одним из направлений исследования этих механизмов является теоретическое описание процессов теплопереноса в организме пациента при ОГКТ. Оно включает оценку характерных тепловых параметров и сопоставление их изменений в ходе курса процедур с наблюдаемыми изменениями биохимических и физиологических характеристик пациента. Моделирование теплового состояния человека во время ОГКТ необходимо для оценки допустимых (безопасных) температурно-временных экспозиций [4], а также для разработки методик, учитывающих некоторые индивидуальные особенности пациентов [5].

Физико-математическое описание процесса теплопереноса при ОГКТ принципиально не отличается от аналогичной тепловой задачи для общей гипотермии человека. Отличия обусловлены лишь характерными условиями проведения криотерапевтической процедуры: достаточно малое время воздействия (несколько минут) газообразным хладагентом (воздухом или смесью воздуха и паров жидкого азота) при температуре  $-110\text{ }^{\circ}\text{C}$  и ниже. Известны два способа описания поля температур в теле человека: осреднение температур и других параметров в пределах кожного покрова и других слоев биоткани (костной, мышечной, жировой) – модели с сосредоточенными параметрами и разбиение этих слоев на малые подобласти для более детального описания изменения свойств тканей, кровотока в них и поля температур. Модель с сосредоточенными параметрами позволяет получать лишь средние значения температур в слоях. Для кожи такое осреднение означает одновременно и менее точное описание конвективного теплообмена с внешней средой, так как при этом используется заведомо завышенное значение температуры. Более того, средняя температура фактически не может быть измерена. Термометрия кожи дает температуру поверхности кожных покровов. С этой точки зрения более предпочтительным представляется количественное описание теплопереноса и поля температур в организме пациента при криотерапии, основанное на модели с распределенными параметрами.

Одним из ключевых параметров, обуславливающих температуру кожи человека во время криопроцедуры, является коэффициент теплоотдачи от поверхности кожи. Знание коэффициентов теплоотдачи  $\alpha$  от поверхности разных участков кожи применительно к условиям ОГКТ необходимо для корректной оценки и прогноза теплового состояния пациента, разработки эффективных безопасных режимов проведения данной процедуры. Ранее авторами получены оценки критических значений параметра  $\alpha$ , основанные на тепловой модели с сосредоточенными параметрами [4].

Обзор литературных источников по теплообмену человека с окружающей средой показал отсутствие данных для условий ОГКТ. Количественные измерения коэффициентов теплоотдачи от тела человека выполнены для комнатных условий [6–8].

Цель настоящей работы – сравнение результатов, получаемых при моделировании теплового состояния пациента во время ОГКТ с использованием моделей с сосредоточенными и распределенными параметрами, а также определение коэффициентов теплоотдачи по экспериментальным данным, полученным методом инфракрасной термометрии, и их сравнение с литературными источниками. Оценки выполнены на основе тепловой модели с распределенными параметрами, позволяющей более точно описывать распределение поля температур в теле человека и тепловой поток через кожные покровы.

**Математическая модель с распределенными параметрами.** Постановка тепловой задачи с распределенными параметрами для  $k$ -го слоя  $j$ -го компартмента имеет вид

$$\left(\rho C_p\right)_{j,k} \frac{\partial T_{j,k}}{\partial t} = \nabla \left(\lambda_{j,k} \nabla T_{j,k}\right) + \left(\rho C_p\right)_b \omega_{j,k} \left(T_{j,k} - T_b\right) + Q_{j,k}, \quad k = 0-3; \quad (1)$$

$$T_{j,k} \Big|_{\Gamma_{jk}} = T_{j,k-1} \Big|_{\Gamma_{jk}}; \quad \lambda_{j,k} \nabla T_{j,k} \Big|_{\Gamma_{jk}} = \lambda_{j,k-1} \nabla T_{j,k-1} \Big|_{\Gamma_{jk}}, \quad k = 1, 2, 3; \quad (2)$$

$$-\lambda_{j,k} \nabla T_{j,k} \Big|_{\Gamma_{j4}} = \alpha_j \left(T_{j,k} \Big|_{\Gamma_{j4}} - T_{env}\right), \quad (3)$$

$$T_{j,k}(t=0) = T_{j,k}^0. \quad (4)$$

Слагаемое  $Q_{jk}$  в уравнении энергии (1) учитывает мощность внутренних источников тепла метаболизма, тепла, выделяемого во время мышечной работы (в мышечном слое), и стоков тепла в ядре компартмента «грудная клетка», обусловленных испарительным охлаждением в легких при дыхании. Индекс  $b$  показывает, что теплофизический параметр относится к крови,  $\omega$  – величина перфузии крови. Учет изменения интенсивности кровотока в биоткани осуществляется по модели Столвика–Харди для мышцы и кожи [9]. Согласно нашим более ранним оценкам, основанным на модели с сосредоточенными параметрами, влиянием кровотока в коже на теплообмен при ОГКТ можно пренебречь [10], однако он учитывается на этапах, предшествующих криопроцедуре.

Особенностью рассматриваемой тепловой задачи является определение коэффициента теплоотдачи  $\alpha$ , при котором к моменту времени  $t$  температура поверхности кожи рассматриваемого участка достигает заданной величины  $T_{эксп}$ . Похожая задача ранее рассмотрена авторами в [4] применительно к модели с сосредоточенными параметрами и критическим условиям теплообмена, при которых кожа охлаждается до температуры ниже терминального порога, при достижении которого возможно холодовое повреждение тканей пациента. Отличия связаны с более детальным описанием поля температур в рамках модели с распределенными параметрами (1)–(4).

Алгоритм решения рассматриваемой задачи состоит в том, что при некотором начальном приближении параметра  $\alpha^{(0)}$  решается прямая нестационарная тепловая задача (1)–(4) с определением температуры поверхности кожи заданного участка. Определяется величина целевой (минимизируемой) функции: абсолютное значение отклонения вычисленной температуры от заданной температуры, измеренной в эксперименте. Коэффициент теплоотдачи варьируется в заданных пределах и при каждом его значении решается прямая тепловая задача (1)–(4) с определением поля температур по глубине биоткани и на поверхности кожи. Расчетная температура кожных покровов для каждой части тела сравнивается с заданной температурой, полученной из эксперимента. Определяется значение коэффициента теплоотдачи, при котором величина рассогласования между заданной и расчетной температурами минимальна.

Тепловую задачу решали в приближении отсутствия вынужденной конвекции и однородности температуры в кабине криосауны. Полагали, что степень черноты стен кабины и кожи пациента равна 1, а стены имеют температуру окружающего их воздуха ( $-110$  °С).

Решение нестационарной тепловой задачи предполагает задание начального распределения температур. С целью определения теплового состояния пациента перед общим криовоздействием рассматривали дополнительно три этапа. Первый этап – определение установочных (set-point) температур, необходимых для применения терморегуляционной модели Столвика [11]. Эти температуры характерны для конкретного человека с его специфическими антропометрическими и возрастными данными. Под следующими этапами подразумеваем пребывание обнаженного пациента при комнатной температуре 20 °С в течение 15 мин (второй этап), адаптация пациента к низкой температуре в предкамере криоустановки при –60 °С на протяжении 30 с (третий этап). Завершающий (четвертый этап) нашего моделирования – нахождение пациента в основной процедурной камере криоустановки при –110 °С в течение 3 мин. Восстановление после ОГКТ температуры кожных покровов пациента при комнатных условиях в данной статье не рассматривалось.

С использованием разработанной нами компьютерной программы выполнен тепловой расчет для двух моделей: с сосредоточенными и распределенными параметрами (далее условно называемых моделями 0D и 1D). Вычисленные по обеим моделям величины коэффициентов теплоотдачи сравнивались между собой, а также со справочными значениями, получаемыми из известных аппроксимационных соотношений для коэффициентов теплообмена вертикального цилиндра при ламинарном и турбулентном режимах естественной конвекции воздуха [12], учитывающих и радиационную составляющую.

В качестве исходных данных использованы температуры поверхности разных частей тела спортсменов академической гребли, полученные методом инфракрасной термометрии сразу после прохождения процедуры. Температуры усреднялись по поверхности компартментов «грудная клетка», «живот», «плечо» и «бедро».

**Результаты моделирования.** Величины всех терморегуляционных сигналов, а также интенсивность метаболических источников тепла зависят от рассогласования между текущей температурой биоткани в некоторой точке или слое и характерной (set-point) температурой в этой же точке или слое. Характерные температуры вычислялись для полностью обнаженного человека, находящегося в термонеutralных условиях (температура окружающего воздуха 29 °С, отсутствие мышечной работы, положение лежа). Исходные данные и основные результаты моделирования теплового состояния пациента и теплообмена (полученные значения коэффициентов теплоотдачи) представлены в табл. 1–4. В табл. 3 приведены установочные значения температур слоев биоткани разных компартментов для модели 0D и средние по каждому слою значения установочных температур для модели 1D. Моделирование показало, что при стандартных для модели Столвика удельных мощностях метаболических тепловыделений температура мозга (ядра компартмента «голова») существенно зависит от комплекции человека. Значение температуры мозга 37 °С, отраженное в табл. 3, получено при соответствующей коррекции этих мощностей. Чтобы в рамках нашей антропометрической модели у 22-летнего мужчины ростом 180 см, массой тела 80 кг и мышечной массой 40 кг температура мозга была равна 37 °С, необходимо увеличить характерные для термонеutralных условий удельные мощности метаболических тепловыделений у стандартного человека, полученные Столвиком, на 6,3 и 8,8 % для моделей 0D и 1D соответственно.

Т а б л и ц а 1. **Параметры пациента**

Параметр	Значение	Слой	Масса слоев и крови, кг
Возраст, лет	22	Ядро	18,61 (23,3%)
Рост, см	180	Мышцы	40,02 (50,1%)
Масса, кг	80	Жир	12,25 (15,3%)
Площадь поверхности кожи, м <sup>2</sup>	1,98	Кожа	3,29 (4,1%)
		Кровь	5,78 (7,2%)

Т а б л и ц а 2. **Измеренные средние температуры участков кожи пациента**

Компартмент	«Грудная клетка»	«Живот»	«Плечо»	«Предплечье»	«Бедро»	«Голень»
Температура, °С	18,45	18,82	15,47	16,87	15,42	19,17

Таблица 3. Установочные (set-point) температуры слоев биоткани

Компартмент	Ядро		Мышца		Жировая клетчатка		Кожа	
	0D	1D	0D	1D	0D	1D	0D	1D
«Голова»	37,00	37,00	36,86	36,82	36,42	36,49	36,32	36,38
«Лоб»	36,84	36,84	36,85	36,77	36,51	36,54	36,43	36,45
«Лицо»	36,85	36,80	36,85	36,76	36,56	36,53	36,34	36,35
«Шея»	36,97	36,95	36,80	36,71	35,50	35,98	35,32	35,82
«Грудная клетка»	36,84	36,79	36,87	36,76	35,56	35,90	34,97	35,41
«Живот»	37,06	37,03	36,88	36,79	35,53	35,79	34,79	35,18
«Плечо»	36,72	36,85	36,71	36,62	35,39	35,89	35,18	35,70
«Предплечье»	36,72	36,85	36,71	36,62	35,39	35,89	35,18	35,70
«Кисть»	36,20	36,15	36,18	36,07	35,78	35,80	35,55	35,62
«Бедро»	36,80	36,88	36,79	36,70	35,49	35,88	35,05	35,52
«Голень»	36,79	36,87	36,79	36,69	35,46	35,86	35,02	35,49
«Ступня»	36,49	36,43	36,46	36,34	35,96	35,97	35,61	35,71

Таблица 4. Сравнение результатов для моделей 0D и 1D на трех этапах

Параметр	Комфортные условия		Комнатные условия		После ОГКТ	
	0D	1D	0D	1D	0D	1D
Тепло метаболизма, Вт*	81,6	83,0	79,2	80,3	76,4	76,1
Работа мышц (без учета миокарда), Вт	0	0	23,6	24,1	71,6	73,0
Средний коэффициент теплоотдачи, Вт/(м <sup>2</sup> ·К)**	14,50	11,26	14,39	11,20	5,91	9,87
Средняя температура кожи, °С	35,03	35,43	32,09	33,40	17,48	17,48
Температура крови, °С	36,84	36,79	36,67	36,56	36,70	36,45
Температура мозга, °С	37	37	36,83	36,78	36,85	36,70
Ректальная температура (ядро компартмента «живот»), °С	37,06	37,03	36,93	36,85	36,92	36,79
Сердечный выброс, л/мин	5,51	5,46	5,54	5,56	5,68	5,66

\*Учитывается также 10 Вт тепла, выделяемого сердцем в ядре компартмента «грудная клетка».

\*\*Для первых двух этапов показаны справочные значения коэффициентов теплообмена. Для этапа ОГКТ – вычисленные значения с учетом экспериментальных температур поверхности кожи.

Максимальные различия между установочными температурами, вычисленными по моделям 0D и 1D, составили 0,13 °С в ядре компартментов «плечо» и «предплечье», 0,12 °С в мышечном слое ступней, 0,50 и 0,52 °С в жировом слое и коже руки (плеча и предплечья) соответственно. Наибольшие установочные температуры (37,06 и 37,03 °С для моделей 0D и 1D) наблюдались в ядре компартмента «живот», а наименьшие (34,79 и 35,18 °С) – в слое кожи этой же части тела.

Сравнение основных результатов для моделей 0D и 1D на трех этапах расчета теплового состояния пациента (табл. 4), обнаруживает очень слабое различие между рассматриваемыми моделями по величинам теплопродукции за счет тепла метаболизма и мышечной работы, а также по значению минутного сердечного выброса. Детализация геометрии расчетной области наиболее существенно проявилась на вычисленных коэффициентах теплоотдачи: различия между моделями 0D и 1D составили 28,8, 28,5 и 67,0 % для этапов «комфортные условия», «комнатные условия» и ОГКТ соответственно. Для этих же этапов различия в температуре крови составили 0,05, 0,11, 0,25 °С, температуры мозга различались на 0, 0,05, 0,15 °С, разница в ректальной температуре составила 0,03, 0,08, 0,13 °С. Различия в средней температуре кожи были 0,40, 1,31 и 0 °С. Тождественность средних температур участков кожного покрова для моделей 0D и 1D обусловлена зада-

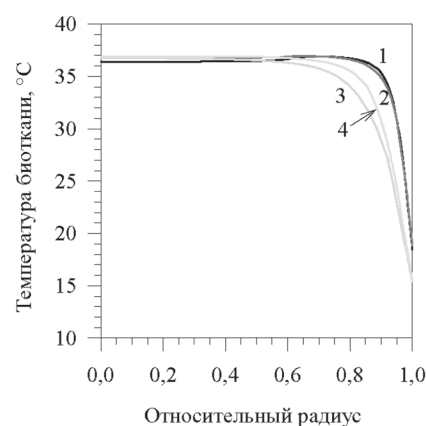


Рис. 1. Профиль температур по толщине биоткани компартментов: 1 – «грудная клетка», 2 – «живот», 3 – «плечо», 4 – «бедро»

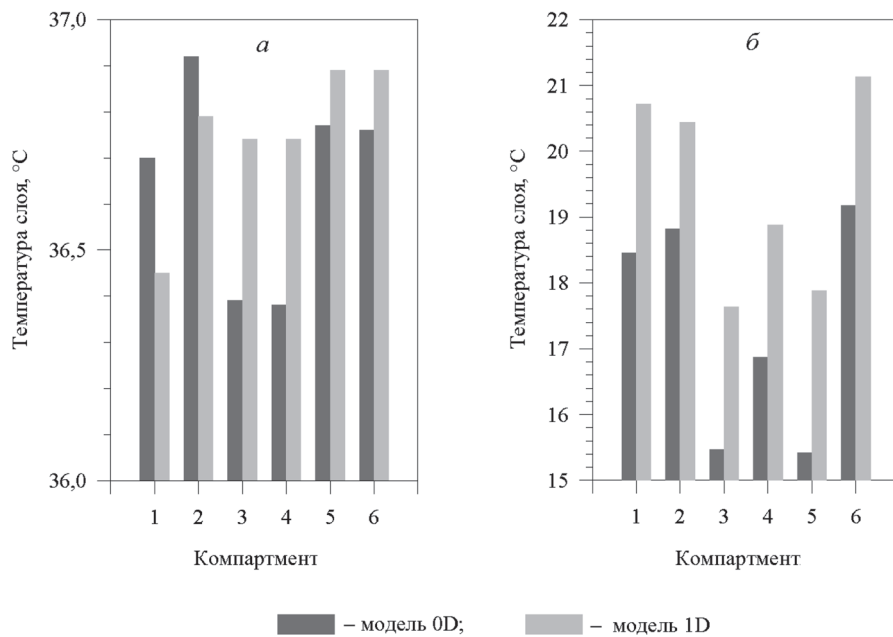


Рис. 2. Сравнение средних температур ядра (а) и кожи (б) компартментов «грудная клетка» (1), «живот» (2), «плечо» (3), «предплечье» (4), «бедро» (5), «голень» (6) после завершения ОГКТ

нием предопределенных (экспериментальных) значений температур поверхности кожи и соответствующим выбором (определением) коэффициентов теплоотдачи на этапе ОГКТ.

Вычисленные распределения температур по относительной координате, представляющей собой отношение текущего радиуса точки в глубине биоткани к радиусу поверхности кожи для рассмотренных частей тела, приведены на рис. 1. Можно отметить близость распределений температур в слое кожи для компартментов «грудная клетка» и «живот», а также некоторое увеличение температур в мышечном слое по сравнению с ядром. Температура компартментов «плечо»

и «бедро» монотонно снижается от центра к периферии. В компартменте «бедро», более крупном, чем компартмент «плечо», на одинаковых относительных глубинах наблюдаются и более высокие температуры, что связано с влиянием выделения тепла в мышечном слое, имеющем большую толщину в бедре, чем в руке.

Средние значения температур слоев «ядро» и «кожа» нескольких крупнейших частей тела, полученные по моделям с сосредоточенными и распределенными параметрами, показаны на рис.2. Можно отметить сравнительно небольшие различия в температурах ядра (менее 0,4 °C) и значительные отличия в вычисленных средних температурах кожи (до 2,4 °C в компартменте «бедро»). Примечательно, что почти для всех случаев средние температуры слоев биоткани, полученные согласно модели с распределенными параметрами, оказались выше, чем температуры по модели с сосредоточенными параметрами. Исключение составил лишь слой «ядро» компартментов «грудная клетка» и «живот».

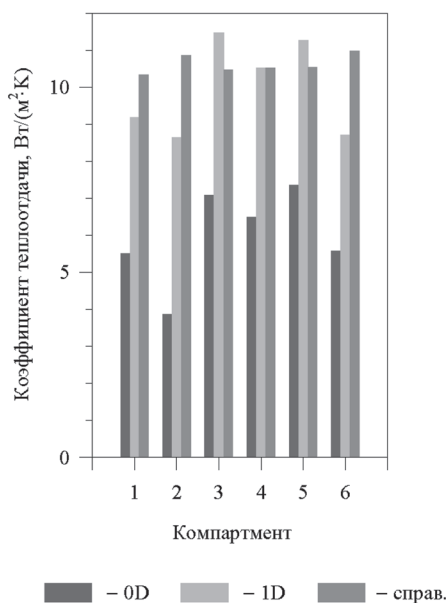


Рис. 3. Сравнение вычисленных и справочных значений коэффициентов теплоотдачи от компартментов «грудная клетка» (1), «живот» (2), «плечо» (3), «предплечье» (4), «бедро» (5), «голень» (6)

Основной результат нашего исследования представляет рис. 3, показывающий вычисленные, согласно моделям 0D, 1D и справочным данным, коэффициенты теплоотдачи. Очевидно, что модель 0D дает сильно заниженные ве-

личины коэффициентов теплоотдачи от поверхности кожи. Максимальное отличие от справочных данных составило 181 % в компартменте «живот», а минимальное различие – 43,3 % в компартменте «бедро». Модель 1D позволяет получать более близкие значения рассматриваемого параметра к результатам, полученным по справочным формулам. Максимальное отличие от справочных данных составило 25,7 %, а минимальное – 6,8% для компартментов «живот» и «бедро» соответственно. Подчеркнем, что в случае решения прямой тепловой задачи с заданием справочных значений коэффициентов теплоотдачи модель с сосредоточенными параметрами будет всегда давать заниженные значения температуры кожи пациента во время процедуры ОГКТ.

**Вывод.** Моделирование теплового состояния пациента после ОГКТ с использованием моделей с сосредоточенными и распределенными параметрами обнаружило близость расчетных значений минутного сердечного выброса, а также мощности суммарных по телу человека источников тепловыделений, обусловленных метаболическими процессами и мышечной работой. Температуры крови, головного мозга и ядра компартмента «живот» (ректальная) в случае модели с распределенными параметрами меньше значений, получаемых по модели с сосредоточенными параметрами на 0,25 °С, 0,15 °С и 0,13 °С. Наиболее существенное отличие, связанное со степенью детализации геометрии расчетной области, наблюдается в расчетных значениях средних по компартментам и всему телу коэффициентов теплоотдачи. Вычисляемые с использованием измеренных температур поверхности кожи коэффициенты теплоотдачи разных участков кожи оказываются ближе к справочным значениям в случае модели 1D по сравнению с моделью 0D. Последняя модель дает сильно заниженные величины этих коэффициентов. Максимальное отличие от справочных данных при использовании модели с сосредоточенными параметрами составило 181 % в компартменте «живот», а минимальное отличие – 43,3 % в компартменте «бедро». В случае модели 1D максимальное отличие между коэффициентами теплоотдачи, вычисленными по заданной температуре разных участков кожи и по справочным данным, составило 25,7 %, а минимальное отличие – 6,8% для компартментов «живот» и «бедро», соответственно. При моделировании теплового состояния пациента в условиях ОГКТ целесообразно использование модели с распределенными параметрами, обеспечивающей более реалистичное описание конвективного теплообмена поверхности тела пациента с окружающим газовым хладагентом.

Работа выполнена при поддержке БРФФИ (грант № Ф13-147).

## Литература

1. Панченко О. А. *Криотерапия*. Киев, 2013.
2. Banfi G., Lombardi G, Colombini A, Melegati G. // *Sports Med*. 2010. Vol. 40, №6. P. 509–517.
3. Левин М. Л., Лукьянская Л. А., Пятин Г. А. // Матер. III науч.-практ. конф. «Криотерапия в России», Санкт-Петербург, 13 мая 2010. СПб., 2010. С. 20–28.
4. Маханёк А. А., Левин М. Л., Драгун В. Л. // Матер. III науч.-практ. конф. «Криотерапия в России», Санкт-Петербург, 13 мая 2010. СПб., 2010. С. 42–48.
5. Маханёк А. А., Левин М. Л., Драгун В. Л. // Матер. IV науч.-практ. конф. «Криотерапия в России», Санкт-Петербург, 13 мая 2011. СПб., 2011. С. 50–61.
6. de Dear R. J., Arens E., Hui Z., Oguero M. // *Int. J. Biometeorol*. 1997. Vol. 40. P. 141–156.
7. Gao N. P., Niu J. L. // *Indoor Built Environ*. 2005. Vol. 14, N 1. P. 5–16.
8. Najjaran A. // *Transaction on control and mechanical systems*. 2012. Vol. 1, N 8, P. 362–369.
9. Stolwijk J. A. J., Hardy J. D. // *Pflugers Arch*. 1966. Vol. 291. P. 129–162.
10. Маханёк А. А., Драгун В. Л., Левин М. Л. // Матер. II науч.-практ. конф. «Криотерапия в России», Санкт-Петербург, 14 мая 2009. СПб., 2009. С. 80–103.
11. Stolwijk J. A. J. In: *Thermal characteristics of tumors: applications in detection and treatment* / Ed. R. K. Jain, P. M. Gullino. *Annals of the New York Academy of Sciences*. 1980. Vol.335. P. 98–106.
12. Тепло- и массообмен. Теплотехнический эксперимент: Справочник / Под ред. В. А. Григорьева и В. М. Зорина. М., 1982. С. 177–178.

*M. L. LEVIN, A. A. MAKHANIOK*

**COMPARISON OF PHYSICAL AND MATHEMATICAL MODELS OF WHOLE GAS CRYOTHERAPY  
WITH LUMPED AND DISTRIBUTED PARAMETERS**

**Summary**

The results of the numerical solution of the heat problem of whole body gas cryotherapy (WBGC) using models with lumped and distributed parameters have been presented. Heat transfer coefficients from the surface of various parts of the human body, which correspond to given (measured by thermographic technique) average temperatures of these surfaces after the completion of WBGC procedure were calculated. It has been found out that the model with lumped parameters gives strongly understated values of heat transfer coefficients in comparison with empirical reference data. Model with distributed parameters reveals the best fit of the calculated heat transfer coefficients to the reference data. The maximum difference was less than 26%.