ISSN 1561-8358 (Print)
ISSN 2524-244X (Online)

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И СИСТЕМЫ

INFORMATION TECHNOLOGIES AND SYSTEMS

УДК 621.396.26 Поступила в редакцию 14.03.2022
https://doi.org/10.29235/1561-8358-2022-67-2-230-238 Received 14.03.2022

С. М. Костромицкий, И. Н. Давыденко, А. А. Дятко

Центр радиотехники Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ФОРМЫ ЗАПИСИ АЛГОРИТМОВ РАБОТЫ АДАПТИВНЫХ АНТЕННЫХ РЕШЕТОК

Аннотация. Получены эквивалентные формы записи алгоритмов работы адаптивных антенных решеток, рассматривающих алгоритмы как разновидности некоторого обобщенного LMS-алгоритма. Это позволит облегчить сравнительный анализ характеристик алгоритмов. Рассмотрены алгоритмы работы: LMS, NLMS, LMS-Newton, SMI, RLS. Приведены исходные алгоритмы работы адаптивных антенных решеток, выводы эквивалентных алгоритмов работы и эквивалентная структурная схема обобщенного LMS-алгоритма. Эквивалентные формы записи алгоритмов работы адаптивных антенных решеток и их параметры представлены также в виде таблицы. Особый интерес представляет эквивалентный алгоритм работы в случае алгоритма SMI, наиболее сильно отличающегося от алгоритма LMS. Эквивалентные алгоритмы обладают только скалярным коэффициентом сходимости и матричным нормирующим множителем. Для алгоритмов LMS-Newton, SMI, RLS матричный нормирующий множитель одинаков, определяется обращением оценки корреляционной матрицы входных сигналов и позволяет снизить зависимость характеристик алгоритмов от параметров корреляционной матрицы. Скалярный коэффициент сходимости эквивалентных алгоритмов в случае алгоритмов SMI, RLS зависит от номера итерации и стремится к нулю для алгоритма SMI и к некоторой ненулевой величине для алгоритма RLS. Зависимость коэффициента сходимости от номера итерации позволяет оптимизировать характеристики алгоритмов на этапе переходного процесса. Стремление к нулю коэффициента сходимости в случае алгоритма SMI делает его эффективным только для стационарных входных сигналов. Ненулевое установившееся значение коэффициента сходимости в случае алгоритма RLS позволяет эффективно использовать его в нестационарной обстановке.

Ключевые слова: алгоритмы работы, адаптивные антенные решетки, подавление активных шумовых помех, эквивалентная форма записи алгоритмов, сравнительный анализ алгоритмов

Для цитирования: Костромицкий, С. М. Эквивалентные формы записи алгоритмов работы адаптивных антенных решеток / С. М. Костромицкий, И. Н. Давыденко, А. А. Дятко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2022. – Т. 67, № 2. – С. 230–238. https://doi.org/10.29235/1561-8358-2022-67-2-230-238

Sergei M. Kostromitsky, Igor N. Davydzenko, Aleksandr A. Dyatko

Radio Engineering Center of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

EQUIVALENT FORMS OF WRITING OF PROCESSING ALGORITHMS OF ADAPTIVE ANTENNA ARRAYS

Abstract. The article is devoted to obtaining equivalent forms of writing of processing algorithms for the operation of adaptive antenna arrays, considering algorithms as varieties of some generalized LMS algorithm. This will facilitate a comparative analysis of the algorithms' characteristics. The following algorithms of operation are considered: LMS, NLMS, LMS-Newton, SMI, RLS. The article contains the initial operation algorithms of adaptive antenna arrays, conclusions of equivalent processing algorithms and an equivalent block diagram of the generalized LMS algorithm. Equivalent forms of writing the operation algorithms of adaptive antenna arrays and their parameters are also presented in tabular form. Of particular interest is the equivalent operation algorithm in the case of the SMI algorithm, which differs most from the LMS algorithm. Equivalent algorithms differ only by the scalar convergence coefficient and the matrix normalizing factor. For LMS-Newton, SMI, and RLS algorithms, the matrix normalizing factor is the same, it is determined by inverting the estimation of the correlation matrix of input signals and reduces the dependence of the characteristics of the algorithms on the parameters of the correlation matrix. The scalar convergence coefficient of equivalent algorithms in the case of SMI and RLS algorithms depends on the iteration number and tends to zero for the SMI algorithm and to some non-zero value for the RLS algorithm. The dependence of the convergence coefficient on the iteration number makes it possible to optimize the characteristics of the algorithms at the transition stage. The tendency of the convergence coefficient to zero in the case of the SMI algorithm makes it effective only for stationary input signals. The non-zero steady-state value of the convergence coefficient in the case of the RLS algorithm allows its effective use in a non-stationary environment.

Keywords: operation algorithms, adaptive antenna arrays, suppression of active noise interference, equivalent form of algorithms, comparative analysis of algorithms

For citation: Kostromitsky S. M., Davydzenko I. N., Dyatko A. A. Equivalent forms of writing of processing algorithms of adaptive antenna arrays. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnych navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series,* 2022, vol. 67, no. 2, pp. 230–238 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8358-2022-67-2-230-238

Введение. В настоящее время адаптивные антенные решетки находят широкое применение в системах радиосвязи, радиолокации и спутниковой навигации для подавления активных шумовых помех [1]. Большинство алгоритмов работы адаптивных антенных решеток делятся на три группы [1–3]:

алгоритмы, реализующие градиентный метод (алгоритм LMS, от англ. Least Mean Squares, и его модификации);

алгоритмы непосредственного обращения матрицы (алгоритм SMI, от англ. Simple Matrix Inversion, и его модификации);

алгоритмы рекурсивных наименьших квадратов (алгоритм RLS, от англ. Recursive Least Squares).

Значительные отличия в форме записи алгоритмов затрудняют сравнительный анализ их свойств и характеристик.

Цель исследования – получение эквивалентных форм записи алгоритмов работы адаптивных антенных решеток, позволяющих рассматривать указанные алгоритмы как разновидности некоторого обобщенного LMS-алгоритма. В этом случае алгоритмы отличаются между собой только скалярным коэффициентом сходимости и матричным нормирующим множителем. Соответственно, облегчается сравнительный анализ характеристик алгоритмов.

Алгоритмы, реализующие градиентный метод (LMS-алгоритм и его модификации). Классический LMS-алгоритм формирования весовых коэффициентов может быть получен методом замены производных конечными разностями для аналогового прототипа, реализующего градиентный метод поиска экстремума функционала качества [3]:

$$\mathbf{W}(n) = \mathbf{W}(n-1) - \mu K_{\text{п}} \mathbf{E}^*(n) E_\Sigma(n), \tag{1}$$

где $E_\Sigma(n) = E_0(n) + \mathbf{E}^{\text{T}}(n)\mathbf{W}(n-1)$ – выходной сигнал устройства адаптивной пространственной обработки; $E_0(n)$ – комплексная амплитуда выходного сигнала основного канала антенной решетки; $\mathbf{E}(n) = \begin{bmatrix} E_1(n) & E_2(n) & \cdots & E_N(n) \end{bmatrix}^{\text{T}}$ – вектор-столбец комплексных амплитуд выходных сигналов компенсационных каналов антенной решетки; $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 & \cdots & W_N \end{bmatrix}^{\text{T}}$ – вектор-столбец комплексных весовых коэффициентов; T – символ транспонирования матрицы; * – символ комплексного сопряжения; $K_{\text{п}}$ – коэффициент преобразования, обеспечивающий выполнение требований размерности; μ – безразмерный коэффициент сходимости.

Недостатками алгоритма LMS являются: возможность потери устойчивости при неправильном выборе коэффициента сходимости; зависимость скорости сходимости от мощности помехи. Достоинство алгоритма LMS – минимальная вычислительная сложность.

Попыткой устранения зависимости скорости сходимости алгоритма LMS от мощности помех является использование нормализованного алгоритма NLMS (Normalized LMS). Алгоритм NLMS используется в тех случаях, когда алгоритм LMS не может гарантировать устойчивость из-за неизвестных характеристик входного сигнала или при обработке нестационарных сигналов и имеет следующий вид [2]:

$$\mathbf{W}(n) = \mathbf{W}(n-1) - \mu \frac{1}{\mathbf{E}^{\text{H}}(n) \cdot \mathbf{E}(n)} \mathbf{E}^*(n) \cdot E_\Sigma(n), \tag{2}$$

где H – символ эрмитова сопряжения матрицы.

Благодаря сравнительной простоте алгоритм NLMS является одним из наиболее часто используемых.

Алгоритм LMS-Newton рассматривается как способ устранения зависимости некоторых свойств алгоритма LMS от параметров корреляционной матрицы [4], основан на использовании метода Ньютона и записывается в виде

$$\mathbf{W}(n)=\mathbf{W}(n-1)-\mu\cdot\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n)\cdot\mathbf{E}^{*}(n)\cdot E_{\Sigma}(n), \tag{3}$$

где $\hat{\mathbf{R}}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbf{E}^{*}(k)\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(k)$ – оценка корреляционной матрицы принимаемых сигналов.

Алгоритмы непосредственного обращения матрицы (алгоритм SMI и его модификации). Алгоритм непосредственного обращения матрицы получен методом наименьших квадратов [2, 4] и описывается выражением

$$\mathbf{W}_{\mathrm{SMI}}(n)=-\hat{\mathbf{R}}^{-1}\hat{\mathbf{R}}_{0}=-\widehat{\mathbf{R}}^{-1}\widehat{\mathbf{R}}_{0}, \tag{4}$$

где $\hat{\mathbf{R}}_{0}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbf{E}^{*}(k)E_{0}(k)=\frac{1}{n}\widehat{\mathbf{R}}_{0}$; $\hat{\mathbf{R}}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbf{E}^{*}(k)\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(k)=\frac{1}{n}\widehat{\mathbf{R}}$; $\widehat{\mathbf{R}}_{0}=\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbf{E}^{*}(k)E_{0}(k)=n\hat{\mathbf{R}}_{0}$; $\widehat{\mathbf{R}}=\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbf{E}^{*}(k)\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(k)=n\hat{\mathbf{R}}$.

Для алгоритма SMI значение весового вектора определяется учетом не только текущего отсчета n входных сигналов, как в алгоритме LMS, но и всех предыдущих отсчетов, что определяет оптимальность алгоритма SMI по отношению к алгоритму LMS в стационарной помеховой обстановке. В выражении (4) матрицы $\widehat{\mathbf{R}}$ и $\widehat{\mathbf{R}}_{0}$ введены по той причине, что при их вычислении в отличие от матриц $\hat{\mathbf{R}}$ и $\hat{\mathbf{R}}_{0}$ отсутствует необходимость использования затратной в вычислительном отношении операции деления на n [2].

Алгоритм непосредственного обращения матрицы характеризуется большой вычислительной сложностью из-за необходимости обращения матрицы на каждом шаге. Поэтому широкое распространение получил алгоритм получения весового вектора с использованием рекуррентного обращения матрицы. Рекуррентный способ обращения матрицы основан на ее представлении в виде [4]

$$\widehat{\mathbf{R}}(n)=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}^{*}(k)\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(k)=\sum_{k=1}^{n-1}\mathbf{E}^{*}(k)\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(k)+\mathbf{E}^{*}(n)\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(n)=\widehat{\mathbf{R}}(n-1)+\mathbf{E}^{*}(n)\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(n). \tag{5}$$

Матрица вида $\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B}^{*}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ обращается с использованием матричного уравнения [1, 5]:

$$\left[l\left(\mathbf{A}+\alpha\mathbf{E}^{*}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\right)\right]^{-1}=l^{-1}\left[\mathbf{A}^{-1}-\frac{\alpha\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}^{*}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}}{1+\alpha\mathbf{E}^{''}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}^{*}}\right]. \tag{6}$$

В этом случае рекуррентное выражение для матрицы, обратной матрице (5), может быть записано следующим образом:

$$\widehat{\mathbf{R}}^{-1}(n)=\left[\widehat{\mathbf{R}}(n-1)+\mathbf{E}^{*}(n)\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(n)\right]^{-1}=\widehat{\mathbf{R}}^{-1}(n-1)-\frac{\widehat{\mathbf{R}}^{-1}(n-1)\mathbf{E}^{*}(n)\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(n)\widehat{\mathbf{R}}^{-1}(n-1)}{1+\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(n)\widehat{\mathbf{R}}^{-1}(n-1)\mathbf{E}^{*}(n)}, \tag{7}$$

либо, согласно [2, 4]:

$$\widehat{\mathbf{R}}^{-1}(n)=\widehat{\mathbf{R}}^{-1}(n-1)-\mathbf{k}(n)\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(n)\widehat{\mathbf{R}}^{-1}(n-1), \tag{8}$$

где $\mathbf{k}(n)=\dfrac{\widehat{\mathbf{R}}^{-1}(n-1)\mathbf{E}^{*}(n)}{1+\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(n)\widehat{\mathbf{R}}^{-1}(n-1)\mathbf{E}^{*}(n)}$.

Преобразуем формулу для определения переменного матричного коэффициента $\mathbf{k}(n)$ с учетом (8):

$$\mathbf{k}(n)=\frac{\widehat{\mathbf{R}}^{-1}(n-1)\mathbf{E}^{*}(n)}{1+\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(n)\widehat{\mathbf{R}}^{-1}(n-1)\mathbf{E}^{*}(n)},$$

или

$$\mathbf{k}(n)=\widehat{\mathbf{R}}^{-1}(n-1)\mathbf{E}^{*}(n)-\mathbf{k}(n)\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(n)\widehat{\mathbf{R}}^{-1}(n-1)\mathbf{E}^{*}(n)=\left(\widehat{\mathbf{R}}^{-1}(n-1)-\mathbf{k}(n)\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(n)\widehat{\mathbf{R}}^{-1}(n-1)\right)\mathbf{E}^{*}(n).$$

Однако в соответствии с выражением (8) $\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n) = \hat{\mathbf{R}}^{-1}(n-1) - \mathbf{k}(n)\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(n)\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n-1)$. Следовательно, можно записать [2, 4]

$$\mathbf{k}(n) = \hat{\mathbf{R}}^{-1}(n)\mathbf{E}^{*}(n). \tag{9}$$

Рекуррентная формула оценивания непосредственно весового вектора получается путем умножения рекуррентной оценки обратной матрицы на вектор корреляции:

$$\mathbf{W}(n) = -\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n)\hat{\mathbf{R}}_0(n) = -\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n)\left(\hat{\mathbf{R}}_0(n-1) + \mathbf{E}^{*}(n)E_0(n)\right) = -\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n)\hat{\mathbf{R}}_0(n-1) - \hat{\mathbf{R}}^{-1}(n)\mathbf{E}^{*}(n)E_0(n) =$$
$$= -\left[\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n-1) - \mathbf{k}(n)\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(n)\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n-1)\right]\hat{\mathbf{R}}_0(n-1) - \hat{\mathbf{R}}^{-1}(n)\mathbf{E}^{*}(n)E_0(n) =$$
$$= -\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n-1)\hat{\mathbf{R}}_0(n-1) + \mathbf{k}(n)\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(n)\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n-1)\hat{\mathbf{R}}_0(n-1) - \hat{\mathbf{R}}^{-1}(n)\mathbf{E}^{*}(n)E_0(n) =$$
$$= \mathbf{W}(n-1) - \mathbf{k}(n)\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(n)\mathbf{W}(n-1) - \mathbf{k}(n)E_0(n) = \mathbf{W}(n-1) - \mathbf{k}(n)\left[E_0(n) + \mathbf{E}^{\mathrm{T}}(n)\mathbf{W}(n-1)\right] =$$
$$= \mathbf{W}(n-1) - \mathbf{k}(n)E_{\Sigma}(n).$$

Таким образом, запишем [2, 4]

$$\mathbf{W}(n) = \mathbf{W}(n-1) - \mathbf{k}(n)E_{\Sigma}(n), \tag{10}$$

или

$$\mathbf{W}(n) = \mathbf{W}(n-1) - \hat{\mathbf{R}}^{-1}(n)\mathbf{E}^{*}(n)E_{\Sigma}(n), \tag{11}$$

где $E_{\Sigma}(n) = E_0(n) + \mathbf{E}^{\mathrm{T}}(n)\mathbf{W}(n-1)$; $\mathbf{k}(n) = \dfrac{\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n-1)\mathbf{E}^{*}(n)}{1 + \mathbf{E}^{\mathrm{T}}(n)\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n-1)\mathbf{E}^{*}(n)}$; $\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n) = \hat{\mathbf{R}}^{-1}(n-1) - \mathbf{k}(n)\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(n)\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n-1)$.

Выражения (10) и (11) удобны для выполнения вычислений с минимальными вычислительными затратами, так как отсутствует необходимость обращения матрицы и минимизированы вычислительные операции, при этом однако усложняется анализ характеристик алгоритмов.

Учитывая, что в соответствии с (4) $\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n) = \dfrac{1}{n}\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n)$, выражение (11) модифицируем следующим образом:

$$\mathbf{W}(n) = \mathbf{W}(n-1) - \frac{1}{n}\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n)\mathbf{E}^{*}(n)E_{\Sigma}(n). \tag{12}$$

Чтобы обеспечить преемственность формы полученного алгоритма с формой ранее описанных алгоритмов LMS (1) и LMS-Newton (3), перепишем (12) в следующем виде:

$$\mathbf{W}(n) = \mathbf{W}(n-1) - \mu_{\mathrm{SMI}}(n)\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n)\mathbf{E}^{*}(n)E_{\Sigma}(n), \tag{13}$$

где $\mu_{\mathrm{SMI}}(n) = \dfrac{1}{n}$.

Отличие алгоритма (13) от алгоритма LMS-Newton (3), для которого коэффициент сходимости μ является константой, заключается в зависимости коэффициента сходимости $\mu_{\mathrm{SMI}}(n)$ от номера итерации.

Алгоритм RLS. Данный алгоритм подробно рассмотрен в [2] и позволяет учитывать нестационарный характер обрабатываемых сигналов. Начальный алгоритм вычисления весовых коэффициентов по методу RLS [2]:

$$\mathbf{W}_{\lambda}(n) = -\hat{\mathbf{R}}_{\lambda}^{-1}\hat{\mathbf{R}}_{0\lambda} = -\hat{\mathbf{R}}_{\lambda}^{-1}(n)\hat{\mathbf{R}}_{0\lambda}(n). \tag{14}$$

Оценка матриц $\hat{\mathbf{R}}_{\lambda}^{-1}(n)$ и $\hat{\mathbf{R}}_{0\lambda}(n)$, применяемых при формировании весовых коэффициентов:

$$\hat{\mathbf{R}}_{\lambda}(n) = \sum_{k=1}^{n}\lambda^{n-k}\mathbf{E}^{*}(k)\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(k) = \sum_{k=1}^{n-1}\lambda^{n-k}\mathbf{E}^{*}(k)\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(k) + \mathbf{E}^{*}(n)\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(n),$$

$$\hat{\mathbf{R}}_{0\lambda}(n) = \sum_{k=1}^{n}\lambda^{n-k}\mathbf{E}^{*}(k)E_0(k) = \sum_{k=1}^{n-1}\lambda^{n-k}\mathbf{E}^{*}(k)E_0(k) + \mathbf{E}^{*}(n)E_0(n),$$

где $0 < \lambda \leqslant 1$ – параметр забывания.

Учитывая, что

$$\widehat{\mathbf{R}}_{\lambda}(n-1)=\sum_{k=1}^{n-1}\lambda^{n-k-1}\mathbf{E}^{*}(k)\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(k)=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n-1}\lambda^{n-k}\mathbf{E}^{*}(k)\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(k),$$

$$\widehat{\mathbf{R}}_{0\lambda}(n-1)=\sum_{k=1}^{n-1}\lambda^{n-k-1}\mathbf{E}^{*}(k)E_{0}(k)=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n-1}\lambda^{n-k}\mathbf{E}^{*}(k)E_{0}(k),$$

оценку матриц, используемых при формировании весовых коэффициентов, для метода RLS можно представить следующим образом:

$$\widehat{\mathbf{R}}_{\lambda}(n)=\sum_{k=1}^{n-1}\lambda^{n-k}\mathbf{E}^{*}(k)\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(k)+\mathbf{E}^{*}(n)\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(n)=\lambda\widehat{\mathbf{R}}_{\lambda}(n-1)+\mathbf{E}^{*}(n)\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(n), \tag{15}$$

$$\widehat{\mathbf{R}}_{0\lambda}(n)=\sum_{k=1}^{n-1}\lambda^{n-k}\mathbf{E}^{*}(k)E_{0}(k)+\mathbf{E}^{*}(n)E_{0}(n)=\lambda\widehat{\mathbf{R}}_{0\lambda}(n-1)+\mathbf{E}^{*}(n)E_{0}(n). \tag{16}$$

Матрица вида $\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B}^{*}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ обращается с использованием матричного уравнения (6). Соответственно, рекуррентное выражение для обратной матрицы запишем так:

$$\begin{gathered}\widehat{\mathbf{R}}_{\lambda}^{-1}(n)=\left[\lambda\widehat{\mathbf{R}}_{\lambda}(n-1)+\mathbf{E}^{*}(n)\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(n)\right]^{-1}=\frac{1}{\lambda}\left[\widehat{\mathbf{R}}_{\lambda}(n-1)+\frac{1}{\lambda}\mathbf{E}^{*}(n)\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(n)\right]^{-1}=\\=\lambda^{-1}\widehat{\mathbf{R}}_{\lambda}^{-1}(n-1)-\frac{\lambda^{-1}\widehat{\mathbf{R}}^{-1}(n-1)\mathbf{E}^{*}(n)\lambda^{-1}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(n)\widehat{\mathbf{R}}^{-1}(n-1)}{1+\lambda^{-1}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(n)\widehat{\mathbf{R}}^{-1}(n-1)\mathbf{E}^{*}(n)}.\end{gathered} \tag{17}$$

Выражение (17) можно представить в следующем виде [2, 4]:

$$\widehat{\mathbf{R}}_{\lambda}^{-1}(n)=\lambda^{-1}\widehat{\mathbf{R}}_{\lambda}^{-1}(n-1)-\mathbf{k}_{\lambda}(n)\lambda^{-1}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(n)\widehat{\mathbf{R}}_{\lambda}^{-1}(n-1), \tag{18}$$

где $\mathbf{k}_{\lambda}(n)=\dfrac{\lambda^{-1}\widehat{\mathbf{R}}_{\lambda}^{-1}(n-1)\mathbf{E}^{*}(n)}{1+\lambda^{-1}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(n)\widehat{\mathbf{R}}_{\lambda}^{-1}(n-1)\mathbf{E}^{*}(n)}$.

Преобразуем выражение для переменного матричного коэффициента $\mathbf{k}_{\lambda}(n)$ исходя из (18):

$$\begin{gathered}\mathbf{k}_{\lambda}(n)=\lambda^{-1}\widehat{\mathbf{R}}_{\lambda}^{-1}(n-1)\mathbf{E}^{*}(n)-\mathbf{k}_{\lambda}(n)\lambda^{-1}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(n)\widehat{\mathbf{R}}_{\lambda}^{-1}(n-1)\mathbf{E}^{*}(n)=\\=\left(\lambda^{-1}\widehat{\mathbf{R}}_{\lambda}^{-1}(n-1)-\mathbf{k}_{\lambda}(n)\lambda^{-1}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(n)\widehat{\mathbf{R}}_{\lambda}^{-1}(n-1)\right)\mathbf{E}^{*}(n).\end{gathered}$$

Однако в соответствии с (17) $\widehat{\mathbf{R}}_{\lambda}^{-1}(n)=\lambda^{-1}\widehat{\mathbf{R}}_{\lambda}^{-1}(n-1)-\mathbf{k}_{\lambda}(n)\lambda^{-1}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(n)\widehat{\mathbf{R}}_{\lambda}^{-1}(n-1)$. Следовательно, можно записать [2, 4]:

$$\mathbf{k}_{\lambda}(n)=\widehat{\mathbf{R}}_{\lambda}^{-1}(n)\mathbf{E}^{*}(n). \tag{19}$$

Рекуррентные формулы оценивания непосредственно весового вектора получим аналогично выражениям (10) и (11), умножив рекуррентную оценку обратной матрицы на вектор корреляции [2, 4]:

$$\mathbf{W}(n)=\mathbf{W}(n-1)-\mathbf{k}_{\lambda}(n)E_{\Sigma}(n), \tag{20}$$

или

$$\mathbf{W}(n)=\mathbf{W}(n-1)-\widehat{\mathbf{R}}_{\lambda}^{-1}(n)\mathbf{E}^{*}(n)E_{\Sigma}(n), \tag{21}$$

где $E_{\Sigma}(n)=E_{0}(n)+\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(n)\mathbf{W}(n-1)$; $\mathbf{k}_{\lambda}(n)=\dfrac{\lambda^{-1}\widehat{\mathbf{R}}_{\lambda}^{-1}(n-1)\mathbf{E}^{*}(n)}{1+\lambda^{-1}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(n)\widehat{\mathbf{R}}_{\lambda}^{-1}(n-1)\mathbf{E}^{*}(n)}$; $\widehat{\mathbf{R}}_{\lambda}^{-1}(n)=\lambda^{-1}\widehat{\mathbf{R}}_{\lambda}^{-1}(n-1)-$ $-\mathbf{k}_{\lambda}(n)\lambda^{-1}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(n)\widehat{\mathbf{R}}_{\lambda}^{-1}(n-1)$.

Выражения (20) и (21), как и (10) и (11), удобны для выполнения вычислений с минимальными вычислительными затратами, при этом усложняется анализ характеристик алгоритмов. Модифицируем выражение (21) следующим образом:

$$\mathbf{W}(n)=\mathbf{W}(n-1)-\widehat{\mathbf{R}}_{\lambda}^{-1}(n)\hat{\mathbf{R}}(n)\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n)\mathbf{E}^{*}(n)E_{\Sigma}(n). \tag{22}$$

Чтобы обеспечить преемственность формы полученного алгоритма с формой ранее описанных алгоритмов LMS (1) и LMS-Newton (3), перепишем (22):

$$\mathbf{W}(n) = \mathbf{W}(n-1) - \boldsymbol{\mu}_\lambda(n)\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n)\mathbf{E}^*(n)E_\Sigma(n), \tag{23}$$

где $\boldsymbol{\mu}_\lambda(n) = \widehat{\mathbf{R}}_\lambda^{-1}(n)\hat{\mathbf{R}}(n)$.

Таким образом, алгоритм RLS, так же как и алгоритмы LMS-Newton и SMI, можно представить отличающимся от алгоритма LMS матричным множителем $\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n)$ при ограничении на дополнительный множитель μ. При этом отличие от алгоритмов LMS-Newton и SMI заключается в индивидуальной зависимости от номера итерации множителя μ, которая в общем случае принимает матричный характер

$$\boldsymbol{\mu}_\lambda(n) = \widehat{\mathbf{R}}_\lambda^{-1}(n)\hat{\mathbf{R}}(n). \tag{24}$$

Проследим, каким образом зависимость (24) для алгоритма RLS отличается от ранее полученной зависимости (13) для алгоритма SMI. Полагая составляющие вектора $\mathbf{E}(n)$ отсчетами эргодических стационарных случайных процессов и нестационарным только случайный процесс $E_0(n)$, усреднение по ансамблю реализаций процессов вектора $\mathbf{E}(n)$ можно заменить усреднением по времени. В этом случае при $n \to \infty$ можно записать [2, с. 202; 4, p. 311]:

$$\widehat{\mathbf{R}}_\lambda(n)\Big|_{n\to\infty} = \sum_{k=1}^{n}\lambda^{n-k}\mathbf{E}^*(k)\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(k)\Bigg|_{n\to\infty} \approx \sum_{k=1}^{n}\lambda^{n-k}E\left\{\mathbf{E}^*(k)\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(k)\right\} = \sum_{k=1}^{n}\lambda^{n-k}\mathbf{R} = \mathbf{R}\sum_{k=1}^{n}\lambda^{n-k}, \tag{25}$$

где $E\{\bullet\}$ – операция усреднения по ансамблю реализаций; $\mathbf{R} = E\left\{\mathbf{E}^*(k)\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(k)\right\}$.

Используем формулу суммы n членов геометрической прогрессии для определения значения $\sum_{k=1}^{n}\lambda^{n-k}$:

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda^{n-k} = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \dots + \lambda^2 + \lambda^1 = \frac{a_1 - a_n q}{1-q} = \frac{1-\lambda^{n-1}\lambda}{1-\lambda} = \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda},$$

где $a_1 = \lambda^0 = 1$ – первый член; $a_k = \lambda^{k-1}$ – последний член; $q = \dfrac{a_k}{a_{k-1}} = \dfrac{\lambda^{k-1}}{\lambda^{k-2}} = \lambda$ – знаменатель геометрической прогрессии.

Таким образом, можно записать [2, с. 203; 4, p. 311]:

$$\widehat{\mathbf{R}}_\lambda(n) \approx \mathbf{R}\sum_{k=1}^{n}\lambda^{n-k} = \mathbf{R}\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}. \tag{26}$$

Соответственно, для обратной матрицы $\widehat{\mathbf{R}}_\lambda^{-1}(n)$ приближенное выражение (26) примет вид

$$\widehat{\mathbf{R}}_\lambda^{-1}(n) \approx \frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\lambda^{n-k}}\mathbf{R}^{-1} = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^n}\mathbf{R}^{-1}. \tag{27}$$

Аналогично приближенное выражение для матрицы $\hat{\mathbf{R}}(n)$ запишется следующим образом:

$$\hat{\mathbf{R}}(n)\Big|_{n\to\infty} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}^*(k)\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(k)\Bigg|_{n\to\infty} \approx E\left\{\mathbf{E}^*(k)\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(k)\right\} = \mathbf{R}. \tag{28}$$

Следовательно, справедлива приближенная запись для формирования весового коэффициента методом RLS

$$\begin{gathered}\mathbf{W}(n) = \mathbf{W}(n-1) - \widehat{\mathbf{R}}_\lambda^{-1}(n)\hat{\mathbf{R}}(n)\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n)\mathbf{E}^*(n)E_\Sigma(n) \approx \\ \approx \mathbf{W}(n-1) - \frac{1-\lambda}{1-\lambda^n}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n)\mathbf{E}^*(n)E_\Sigma(n) = \mathbf{W}(n-1) - \frac{1-\lambda}{1-\lambda^n}\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n)\mathbf{E}^*(n)E_\Sigma(n).\end{gathered} \tag{29}$$

Чтобы обеспечить преемственность формы полученных алгоритмов с формой ранее представленных алгоритмов LMS и LMS-Newton, перепишем (29) таким образом:

$$\mathbf{W}(n) \approx \mathbf{W}(n-1) - \frac{1-\lambda}{1-\lambda^n}\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n)\mathbf{E}^*(n)E_\Sigma(n) = \mathbf{W}(n-1) - \mu_\lambda(n)\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n)\mathbf{E}^*(n)E_\Sigma(n), \tag{30}$$

где $\mu_\lambda(n) = \dfrac{1-\lambda}{1-\lambda^n}$.

В соответствии с выражением (30) значение коэффициента сходимости для первого дискрета времени равно единице:

$$\mu_\lambda(1) = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^1} = 1. \quad (31)$$

Значение коэффициента сходимости после окончания переходного процесса, в отличие от метода SMI, не равно нулю и определяется выражением

$$\mu_\lambda(\infty) = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^\infty} = 1-\lambda. \quad (32)$$

Эквивалентная форма записи алгоритмов. Данная форма записи алгоритмов работы адаптивных антенных решеток имеет следующий вид:

$$\mathbf{W}(n) = \mathbf{W}(n-1) - \mathbf{U}_{\text{co}}(n) = \mathbf{W}(n-1) - \mu(n) f\left(\mathbf{E}(k)\right)\mathbf{E}^*(n) E_\Sigma(n). \quad (33)$$

Эквивалентная структурная схема обобщенной адаптивной антенной решетки, соответствующая выражению (33), приведена на рис. 1.

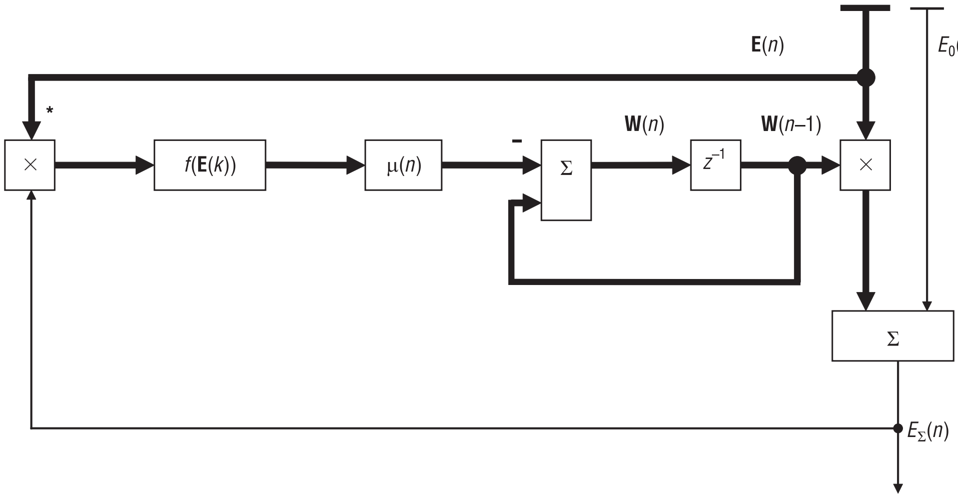

Рис. 1. Эквивалентная структурная схема обобщенной адаптивной антенной решетки

Fig. 1. Equivalent block diagram of a generalized adaptive antenna array

Эквивалентная форма записи алгоритмов работы адаптивных антенных решеток не предназначена для реализации, так как может оказаться в вычислительном отношении более сложной и в ряде случаев носит приблизительный характер. Однако она облегчает сравнительный анализ алгоритмов. Эквивалентные формы записи алгоритмов работы адаптивных антенных решеток и их параметры, представлены в таблице.

Эквивалентные формы алгоритмов работы адаптивных антенных решеток

Equivalent forms of algorithms for the operation of adaptive antenna arrays

Алгоритм	$\mu(n)$	$f(\mathbf{E}(k))$	$U_{\text{co}}(n)$
LMS	μ	$K_{\text{п}}$	$\mu(n) K_{\text{п}} \mathbf{E}^*(n) E_\Sigma(n)$
NLMS	μ	$\frac{1}{\mathbf{E}^{\text{H}}(n)\mathbf{E}(n)}$	$\mu(n)\frac{1}{\mathbf{E}^{\text{H}}(n)\mathbf{E}(n)}\mathbf{E}^*(n) E_\Sigma(n)$
LMS-Newton	μ	$\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n)$	$\mu(n)\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n)\mathbf{E}^*(n) E_\Sigma(n)$
SMI	$\frac{1}{n}$	$\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n)$	$\mu(n)\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n)\mathbf{E}^*(n) E_\Sigma(n)$
RLS	$\frac{1-\lambda}{1-\lambda^n}$	$\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n)$	$\mu(n)\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n)\mathbf{E}^*(n) E_\Sigma(n)$

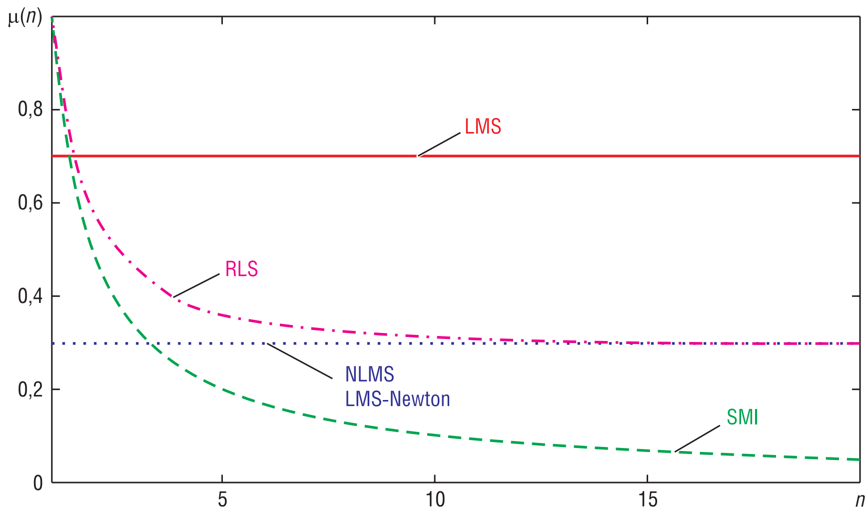

Рис. 2. Графики зависимостей коэффициента сходимости μ(*n*) от номера итерации *n* для различных алгоритмов

Fig. 2. Graphs of dependences of the coefficient of convergence μ(*n*) on the number of iterations *n* for various algorithms

Из выражения (33) и таблицы видно, что все алгоритмы работы имеют единую форму записи, а отличаются коэффициентом сходимости $\mu(n)$ и нормирующей функцией $f(\mathbf{E}(k))$, зависящей от сигналов в компенсационных каналах. Графики зависимостей коэффициента сходимости $\mu(n)$ от номера итерации n приведены на рис. 2.

Заключение. Получена эквивалентная форма записи алгоритмов работы адаптивных антенных решеток, позволяющая рассматривать указанные алгоритмы как разновидности некоторого обобщенного LMS-алгоритма. В этом случае алгоритмы отличаются между собой только скалярным коэффициентом сходимости и матричным нормирующим множителем.

Алгоритм LMS является наиболее простым в вычислительном смысле и приспособлен к работе в нестационарных условиях. Однако его быстродействие и устойчивость сильно зависят от корреляционной матрицы входных сигналов, что значительно снижает его потребительские качества.

Алгоритм NLMS устраняет недостаток алгоритма LMS, связанный с зависимостью характеристик последнего от мощности входных сигналов за счет использования нормирующего множителя $\dfrac{1}{\mathbf{E}^{\mathrm{H}}(n)\mathbf{E}(n)}$. При этом сохраняется зависимость быстродействия и устойчивости алгоритма от распределения собственных значений корреляционной матрицы сигналов.

Есть основания полагать, что алгоритм LMS-Newton обеспечивает ослабление зависимости быстродействия и устойчивости от корреляционной матрицы входных сигналов за счет наличия нормирующего множителя $\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n)$. Коэффициент сходимости μ постоянен и обеспечивает минимальные ошибки самонастройки только после окончания переходного процесса.

Алгоритм SMI и его модификация (рекуррентный алгоритм обращения матрицы) строго оптимальны только в условиях стационарной обстановки. Снижение зависимости свойств алгоритма от корреляционной матрицы входных сигналов обеспечивается наличием нормирующего множителя $\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n)$. Коэффициент сходимости меняется по закону $\mu(n)=\dfrac{1}{n}$ и обеспечивает оптимальность алгоритма на этапе переходного процесса, однако приводит к размыканию обратной связи после некоторого количества шагов итерации.

Алгоритмы RLS оптимальны в условиях нестационарной обстановки. Предположительное снижение зависимости свойств алгоритма от корреляционной матрицы входных сигналов обеспечивается наличием нормирующего множителя $\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n)$. Коэффициент сходимости меняется по закону $\mu(n)=\dfrac{1-\lambda}{1-\lambda^{n}}$ и обеспечивает оптимальность алгоритма и на этапе переходного процесса, и в установившемся режиме. Значение коэффициента сходимости в установившемся режиме $\mu(\infty)=1-\lambda$ не равно нулю.

Список использованных источников

1. Монзинго, Р. А. Адаптивные антенные решетки: введение в теорию: пер. с англ. / Р. А. Монзинго, Т. У. Миллер. – М.: Радио и связь, 1986. – 446 с.

2. Джиган, В. И. Адаптивная фильтрация сигналов: теория и алгоритмы / В. И. Джиган. – М.: Техносфера, 2013. – 527 с.

3. Костромицкий, С. М. Вопросы радиоавтоматики адаптивных антенных решеток / С. М. Костромицкий, И. Н. Давыденко; Нац. акад. Наук Беларуси, Центр радиотехники. – Минск: Беларус. навука, 2021. – 174 с.

4. Uncini, A. Fundamentals of adaptive signal processing / A. Uncini. – Cham: Springer, 2015. – XXV, 704 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-02807-1

5. Giordano, A. A. Least-Square Estimation with Applications to Digital Signal Processing / A. A. Giordano, F. M. Hsu. – New York: Wiley, 1985. – XXIII, 412 p.

References

1. Monzingo R. A., Miller T. U. *Introduction to Adaptive Arrays*. New York, Wiley, 1980. 448 p.

2. Dzhigan V. I. *Adaptive Signal Filtering: Theory and Algorithms*. Moscow, Tekhnosfera Publ., 2013. 527 p. (in Russian).

3. Kostromitskiy S. M., Davyidenko I. N. *Questions of Radio Automation of Adaptive Antenna Arrays*. Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 2021. 174 p. (in Russian).

4. Uncini A. *Fundamentals of Adaptive Signal Processing*. Cham, Springer, 2015. XXV, 704 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-02807-1

5. Giordano A. A., Hsu F. M. *Least-Square Estimation with Applications to Digital Signal Processing*. New York, Wiley, 1985. XXIII, 412 p.

Информация об авторах

Костромицкий Сергей Михайлович – член-корреспондент Национальной академии наук Беларуси, доктор технических наук, профессор, директор, Центр радиотехники Национальной академии наук Беларуси (ул. П. Бровки, 15/5, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: sleus@abv.bg

Давыденко Игорь Николаевич – кандидат технических наук, доцент, ученый секретарь, Центр радиотехники Национальной академии наук Беларуси (ул. П. Бровки, 15/5, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: igord1@tut.by

Дятко Александр Аркадьевич – кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Центр радиотехники Национальной академии наук Беларуси (ул. П. Бровки, 15/5, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: info@radiotehnika.by

Information about the authors

Sergei M. Kostromitsky – Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, D. Sc. (Engineering), Professor, Head of the Radio Engineering Center of the National Academy of Sciences of Belarus (15/5, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: sleus@abv.bg

Igor N. Davydzenko – Ph. D. (Engineering), Associate Professor, Scientific Secretary, Radio Engineering Center of the National Academy of Sciences of Belarus (15/5, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: igord1@tut.by

Aleksandr A. Dyatko – Ph. D. (Engineering), Associate Professor, Leading Researcher, Radio Engineering Center of the National Academy of Sciences of Belarus (15/5, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: info@radiotehnika.by