

*К 65-летию Объединенного института машиностроения  
Национальной академии наук Беларуси*

**С. П. Руденко, С. Г. Сандомирский**

*Объединенный институт машиностроения Национальной академии наук Беларуси,  
Минск, Республика Беларусь*

**РАСЧЕТНАЯ МОДЕЛЬ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ЗОНЫ КОНТАКТА ЗУБЬЕВ  
ПОВЕРХНОСТНО УПРОЧНЕННЫХ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС**

**Аннотация.** Рассмотрено напряженное состояние поверхностного слоя в зоне контакта сопряженных зубьев цилиндрических зубчатых колес, которое характеризуется не только поверхностными, но и глубинными эквивалентными напряжениями. Показано, что при контактном нагружении напряженное состояние поверхностного слоя неоднородное и зависит от расстояния от поверхности. Выполнены анализ и обоснование расчетной модели напряженного состояния диффузионного слоя в зоне контакта сопряженных зубьев поверхностно упрочненных зубчатых колес. Уточнено значение коэффициента, учитывающего влияние нормальных напряжений на эффективность касательных. Достоверность и обоснованность модели расчета напряженного состояния поверхностного слоя в зоне контакта сопряженных зубьев поверхностно упрочненных зубчатых колес оценивали по результатам натурных стендовых испытаний зубчатых передач, изготовленных из цементуемой стали 20ХГНР. Значения контактных напряжений в полюсе зацепления зубьев корректировали с учетом концентрации нагрузки по ширине зубчатого венца. Глубину выкрашивания поврежденных зубьев определяли путем замеров слепков, снятых с зубьев каждой исследованной шестерни с использованием метакриловой смолы. Установлено, что зона зарождения глубинного контактного выкрашивания для шестерен с модулем 6,5 мм находится на глубине залегания расчетных максимальных эквивалентных касательных напряжений. Согласованность результатов расчета с экспериментальными данными показывает обоснованность применения расчетной модели напряженного состояния для эвольвентных зубчатых колес.

**Ключевые слова:** зубчатые колеса, поверхностное упрочнение, напряженное состояние поверхностного слоя, неоднородность, аналитическая модель

**Для цитирования:** Руденко, С. П. Расчетная модель напряженного состояния зоны контакта зубьев поверхностно упрочненных зубчатых колес / С. П. Руденко, С. Г. Сандомирский // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2022. – Т. 67, №3. – С. 277–284. <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2022-67-3-277-284>

*To the 65<sup>th</sup> Anniversary of the Joint Institute of Mechanical Engineering  
of the National Academy of Sciences of Belarus*

**Sergei P. Rudenko, Sergei G. Sandomirski**

*Joint Institute of Mechanical Engineering of the National Academy of Sciences, Minsk, Republic of Belarus*

**CALCULATION MODEL OF THE STRESSED STATE OF THE TOOTH CONTACT ZONE OF SURFACE-  
HARDENED GEARS**

**Abstract.** Stress state of the surface layer in the contact zone of mating teeth of cylindrical gears has been studied. It is established that stressed state of contact surfaces in the meshing pole of mating teeth is characterized not only by surface contact stresses, but also by deep equivalent stresses. It is shown that under contact loading the stressed state of surface layer is heterogeneous and changes with distance from the surface. Analysis and substantiation of calculation model for stressed state of diffusion layer in contact zone of mating teeth of surface-hardened gears are performed. Value of coefficient, which takes into account influence of normal stresses on efficiency of tangential ones, is specified. Reliability and validity of model of calculation of stressed condition of surface layer in contact zone of mating teeth of surface-hardened gears were estimated according to results of full-scale bench tests of the gears made of cemented steel 20XGHP. The values of contact stresses in

tooth meshing pole were corrected considering the load concentration across the width of cogged ring gear. Spalling depth of damaged teeth was determined by measuring impressions taken from the teeth of each examined gear with methacrylic resin. It is established that the nucleation zone of deep contact pitting for gears with 6.5 mm module is on the depth of occurrence of calculated maximum equivalent shear stresses. The consistency of the calculation results with the experimental data shows the validity of the calculated stress-strain model for involute gears.

**Keywords:** gears, surface hardening, surface layer stress state, heterogeneity, analytical model

**For citation:** Rudenko S. P., Sandomirski S. G. Calculation model of the stressed state of the tooth contact zone of surface-hardened gears. *Vestsi Natsyonal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2022, vol. 67, no. 3, pp. 277–284 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2022-67-3-277-284>

**Введение.** Исследования и расчеты сопротивления контактной усталости (контактной прочности) зубчатых передач направлены на изучение факторов, обуславливающих усталостные процессы при контактном нагружении и влияющих на контактную прочность деталей машин [1–9]. Установлено, что напряженное состояние контактирующих поверхностей в полюсе зацепления сопряженных зубьев характеризуется не только поверхностными контактными напряжениями, но и глубинными эквивалентными напряжениями [6, 7, 9]. Наши исследования подтверждают данные результаты [10–13]. Получено, что при определенных условиях глубинные эквивалентные напряжения вызывают прогрессирующее выкрашивание поверхностей зубьев – отслаивание, то есть большое по глубине и площади выкрашивание, которое, зародившись в зоне полюса зацепления, имеет тенденцию распространяться в однопарной зоне активных поверхностей зубьев.

Большое научное и практическое значение имеют теоретические и экспериментальные исследования Р. Р. Гальпера [6] и Е. И. Тескера [9], которые посвящены решению контактной задачи по всей толщине поверхностно упрочненного слоя материала зубчатых колес. Они позволяют установить зависимость между расположением опасной зоны, в которой могут возникать очаги контактных разрушений, и механическими свойствами материала, действующими контактными нагрузками с оценкой запаса прочности в этой зоне. Но расчетная оценка сопротивления контактной усталости поверхностно упрочненных зубчатых колес требует дальнейшего развития. В частности, расчет на предотвращение глубинного контактного разрушения азотированных зубчатых колес ограничен сравнением допускаемых и расчетных напряжений, действующих на границе диффузионного слоя и сердцевины [7]. При этом допускаемые напряжения ставятся в зависимость только от прочности сердцевины. Методика расчета поверхностно упрочненных зубчатых колес, приведенная в [9], основана не на диаграммах контактной усталости, а на линейной зависимости предельных касательных напряжений от твердости. Но базовые числа циклов кривых усталости при поверхностных и глубинных разрушениях значительно отличаются. Поэтому использование одного и того же значения расчетного контактного напряжения для поверхности и в глубине материала не оправданно [13]. Кроме того, недостаточный объем экспериментальных данных приводит к противоречивости информации о напряженном состоянии поверхностных слоев зубьев [14].

На практике часто ставится задача не только оценки ресурса зубчатых передач, обеспечиваемого сопротивлением глубинной контактной усталости поверхностно упрочненных зубчатых колес, но и определения качественных параметров упрочненных слоев, обеспечивающих бездефектную работу зубчатой передачи в течение заданного срока. При решении этой задачи существенное значение имеет характер напряженного состояния и распределение напряжений в детали, допустимость того или иного напряженного состояния для обеспечения прочности изделия [15].

*Цель работы* – анализ и обоснование расчетной модели напряженного состояния диффузионного слоя в зоне контакта сопряженных зубьев поверхностно упрочненных зубчатых колес.

**Теоретический анализ.** В настоящее время в методиках расчета эвольвентных цилиндрических передач используют основные положения теории контактных деформаций, полученные Г. Герцем [16]. При этом принимают ряд допущений, связанных с отличием условий работы сопряженных зубьев зубчатых колес от классических положений теории Г. Герца. При расчете эвольвентных цилиндрических передач допускают, что в каждой точке зацепления зубья можно заменить прямыми круговыми цилиндрами с параллельными осями, радиусы кривизны которых равны радиусам кривизны эвольвенты в точке контакта [15, 16]. Под действием сжимающих нагру-

зок зубья соприкасаются по узкой полосе (площадке), ограниченной двумя прямыми. Нормальные давления поперек площадки, величина которых является необходимой частью расчета на выносливость рабочей поверхности зубьев, определяются известным выражением [15–17]

$$\sigma = \sigma_H \sqrt{1 - (y/b)^2}, \tag{1}$$

где  $\sigma_H$  – наибольшее давление на контактной площадке, которое связано с нагрузкой  $w_t$  на единицу длины цилиндра и величиной  $b$  малой полуоси контурного эллипса площадки контакта зависимостью [16]

$$\sigma_H = \frac{2w_t}{\pi b}. \tag{2}$$

При работе зубчатых передач нагрузка на боковых поверхностях зубьев меняется по величине, оставаясь постоянной по знаку. Многократное периодическое изменение во времени напряженного состояния рабочей поверхности зубьев вызывает образование и дальнейшее развитие трещин усталости (рис. 1, а).

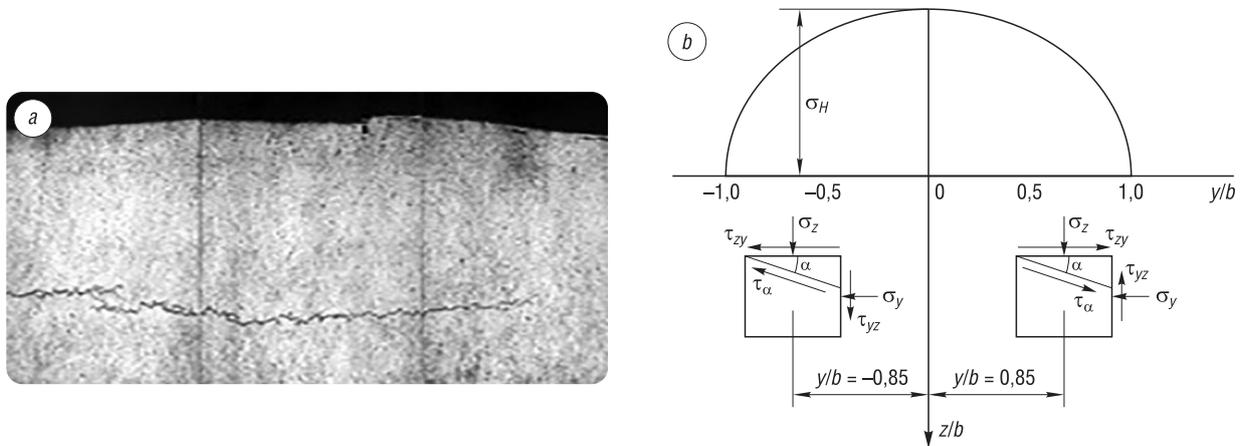


Рис. 1. Вид подповерхностной трещины зуба шестерни с модулем 6,5 мм (а) и напряженное состояние при контакте цилиндров (b)

Fig. 1. View of the subsurface crack of the gear tooth with a module of 6.5 mm (a) and stress state at contact of cylinders (b)

Для оценки сопротивления усталости поверхностно упрочненных зубчатых колес в реальных условиях необходимо знать не только наибольшее давление на площадке контакта, но и характеристики напряженного состояния рабочего объема материала по толщине упрочненного слоя, особенно в критических зонах, где могут возникнуть усталостные разрушения.

Из прикладной теории упругости известно [15], что контактное нагружение цилиндров вызывает в материале объемное напряженное состояние, характеризуемое нормальными сжимающими ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ) и касательными ( $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$ ) напряжениями (рис. 1, b). Кроме нормальных давлений на поверхности площадки контакта действует касательная нагрузка от сил трения. Учитывая [17], что при значениях коэффициента трения в контакте, характерных для зубчатых передач, касательная нагрузка не оказывает влияние на напряженное состояние на глубине материала  $z/b \geq 0,2$ , компоненты напряженного состояния в произвольной точке с координатами  $(y, z)$  имеют следующий вид [15, 16]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\sigma_H 2\mu \frac{z}{b} \left[ \sqrt{\frac{b^2 + \lambda}{\lambda}} - 1 \right], \quad \sigma_y = -\sigma_H \frac{z}{b} \left[ \sqrt{\frac{b^2 + \lambda}{\lambda}} \left( 2 - \frac{b^2 z^2}{\lambda^2 + b^2 z^2} \right) - 2 \right], \quad \sigma_z = -\sigma_H \frac{b z^3}{\lambda^2 + b^2 z^2} \sqrt{\frac{b^2 + \lambda}{\lambda}}; \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= -\sigma_H \frac{b y z^2}{\lambda^2 + b^2 z^2} \sqrt{\frac{\lambda}{b^2 + \lambda}}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где  $\lambda$  – наибольший корень уравнения  $y^2 / (b^2 + \lambda) + z^2 / \lambda = 1$ .

В [18] показано, что касательные напряжения и величина отношения  $\tau_{yz}/HV$  ( $HV$  – твердость по шкале Виккерса) являются основным фактором, который определяет глубину зоны зарождения трещины, вызывающей глубинное контактное выкрашивание поверхностного слоя шестерен.

В общем случае при циклических контактных нагрузках следует рассматривать напряженное состояние и характер изменения подповерхностных напряжений во всем объеме напряженного контакта (см. рис. 1, *b*). В этом случае касательные  $\tau_\alpha$  и нормальные  $\sigma_\alpha$  напряжения на площадках, проходящих через точку с координатой  $z_0$  и наклоненных под углом  $\alpha$  к оси  $y$ , определяются следующим образом [16]:

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cdot \cos 2\alpha; \quad \sigma_\alpha = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\alpha - \tau_{xy} \cdot \sin 2\alpha. \quad (4)$$

В процессе перекачивания цилиндров меняется относительная координата точки  $y_0$ , а следовательно, и напряжения  $\tau_\alpha$  и  $\sigma_\alpha$ . На рис. 2 представлены кривые изменения относительного касательного напряжения  $\tau_\alpha/\sigma_H$  для точек, залегающих на глубине  $z/b = 0,5$ . На площадках, расположенных под углами  $\alpha = 0^\circ$  и  $90^\circ$ , напряжения  $\tau_\alpha$  изменяются по симметричному циклу, а под углом  $\alpha = 45^\circ$  и на остальных площадках – по асимметричному.

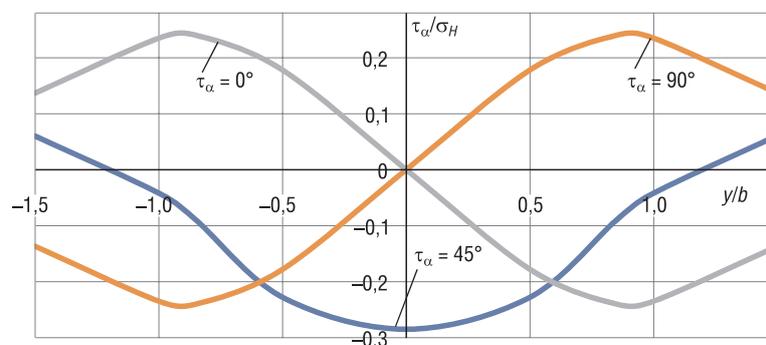


Рис. 2. Изменение касательных напряжений на площадках, расположенных под углом  $\alpha$  к оси  $y$  при  $z/b = 0,5$

Fig. 2. Change of tangential stresses at the sites located at an angle  $\alpha$  to the  $y$ -axis at  $z/b = 0.5$

Определение допустимости того или иного напряженного состояния с точки зрения прочности изделия основано на применении гипотез пластичности и прочности. Для пластичных материалов наиболее распространенными являются гипотеза наибольших касательных напряжений и гипотеза потенциальной энергии формоизменения (средних касательных напряжений). При оценке контактной прочности пластичных и хрупких материалов многочисленными экспериментальными данными подтверждена гипотеза эквивалентных касательных напряжений [7, 9, 15], согласно которой момент наступления предельного состояния (развитие глубинной контактной усталости поверхностных слоев) обусловлен способностью материала сопротивляться как касательным, так и нормальным напряжениям. В этом случае имеющиеся данные позволяют при напряженном состоянии с преобладающими касательными напряжениями, когда они ответственны за усталостные разрушения, принять гипотезу Геста–Мора [7], согласно которой сопротивление усталости материала определяется эквивалентными касательными напряжениями  $\tau_e$ , отражающими влияние нормальных напряжений  $\sigma_\alpha$  на площадке действия касательных напряжений  $\tau_\alpha$  в данной точке:

$$\tau_e = |\tau_\alpha| - k|\sigma_\alpha|, \quad (5)$$

где  $k$  – коэффициент, определяемый экспериментально.

Результаты расчета по формуле (5) показывают, что эквивалентные касательные напряжения имеют максимальные значения на площадках, параллельных и перпендикулярных площадке контакта ( $\alpha = 0^\circ$  и  $90^\circ$ ), расположенных на глубине  $z/b = 0,4–0,8$  при  $y/b = \pm 0,85$ , что согласуется с результатами исследований [16]. Причем напряжения на площадках с  $\alpha = 90^\circ$  выше, чем с  $\alpha = 0^\circ$  (рис. 3).

Так как расчет зубчатых передач на прочность производится по наибольшей величине эквивалентного напряжения, то анализ напряженного состояния площадки контакта с применением формул (3) и (5) показывает, что на площадках, перпендикулярных площадке контакта ( $\alpha = 90^\circ$ ), главные напряжения  $\tau_\alpha$  совпадают по абсолютной величине, но противоположны по знаку с напряжениями  $\tau_{yz}$ , а главные напряжения  $\sigma_\alpha$  совпадают по величине и знаку с напряжениями  $\sigma_y$ . Учитывая эти данные, применим теорию прочности Геста–Мора для напряженного состояния, описываемого уравнениями (3) для компонентов  $\tau_{yz}$  и  $\sigma_y$ :

$$\tau_e = \left| \tau_{yz} \right| - k \left| \sigma_y \right|. \quad (6)$$

Расчет эквивалентных касательных напряжений  $\tau_e$  по формулам (5) и (6) показал, что они равны по абсолютной величине на площадках, перпендикулярных площадке контакта ( $\alpha = 90^\circ$ ). Следовательно, с целью упрощения расчетов для определения напряжений  $\tau_e$  целесообразно применять формулу (6).

**Экспериментальные исследования и результаты.** Достоверность и обоснованность модели расчета напряженного состояния поверхностного слоя в зоне контакта сопряженных зубьев поверхностно упрочненных зубчатых колес оценивали по результатам экспериментальных исследований в рамках натурных стендовых испытаний зубчатых передач с модулем 6,5 мм, изготовленных из цементуемой стали 20ХГНР (ГОСТ 4543–2016). Зубчатые колеса, подвергнутые химико-термической обработке (цементация, закалка и низкий отпуск), испытывали при контактных напряжениях в полюсе зацепления 2000–2200 МПа. Для установления причин контактных повреждений и разрушений зубчатых колес после стендовых испытаний были проведены металлографические и дюрOMETрические исследования упрочненных слоев образцов испытанных шестерен. За критерий достоверности модели расчета принималось соответствие глубины контактного выкрашивания испытанных шестерен с глубиной залегания максимальных эквивалентных касательных напряжений.

Особое внимание при анализе результатов испытаний уделяли определению твердости и качества структуры диффузионных слоев на определенном расстоянии от поверхности зубьев в зоне с максимальными величинами эквивалентных касательных напряжений, рассчитываемых согласно уравнению (6) по всей толщине диффузионного слоя. При расчете учитывали неоднородность упрочненных диффузионных слоев, обусловленную градиентом твердости после химико-термического упрочнения, путем варьирования значениями коэффициента  $k$ , который учитывает влияние нормальных напряжений на эффективность касательных. Для зон диффузионного слоя с твердостью 550 HV 0,2 и менее принимали  $k = 0,25$  [7], для зон с твердостью выше 550 HV 0,2 для определения величины  $k$  предложена зависимость  $k = 0,0013 \text{ HV} - 0,5331$  (рис. 4).

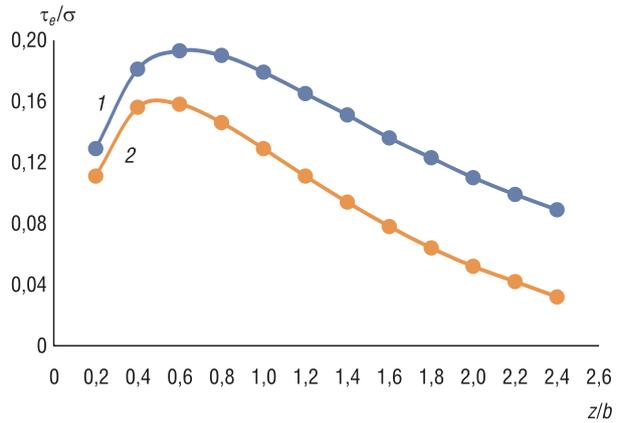


Рис. 3. Изменение относительных эквивалентных напряжений  $\tau_e/\sigma_H$  в зависимости от глубины  $z/b$  упрочненного слоя: 1 – для площадок с  $\alpha = 90^\circ$ ; 2 – для площадок с  $\alpha = 0^\circ$   
 Fig. 3. Change of the relative equivalent stress  $\tau_e/\sigma_H$  depending on the depth  $z/b$  of the hardened layer: 1 – for areas with  $\alpha = 90^\circ$ ; 2 – for areas with  $\alpha = 0^\circ$

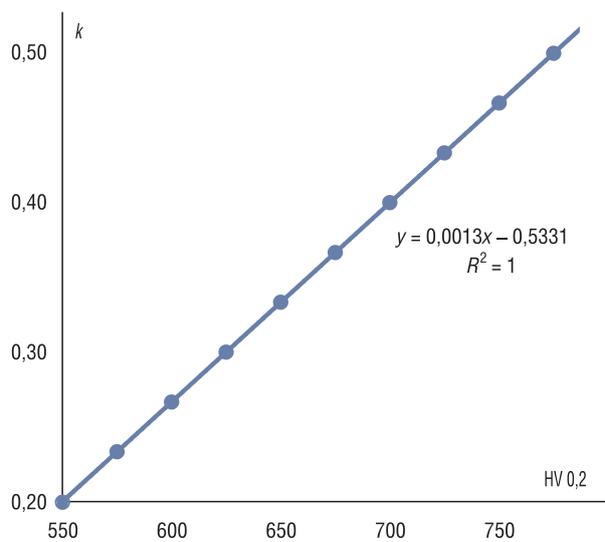


Рис. 4. Зависимость коэффициента  $k$  от твердости HV 0,2 диффузионного слоя  
 Fig. 4. Dependence of the coefficient  $k$  on the hardness HV 0.2 of the diffusion layer

Финишной обработкой испытуемых шестерен являлась химико-термическая, поэтому степень точности изготовления зубчатых колес была невысокой и составляла 10–11 по нормам кинематической точности по ГОСТ 1643–81. Это обусловило нестабильность пятна контакта в зацеплении и неоднородность концентрации нагрузки по длине зуба при испытании разных пар. Для уточнения концентрации нагрузки в зубчатом зацеплении была определена величина коэффициента  $K_{H\beta}$ , учитывающего неравномерность распределения нагрузки по ширине венца для всех испытанных зубчатых пар:

$$K_{H\beta} = 1 + (K_{H\beta}^0 - 1) \cdot K_{HW}, \quad (7)$$

где  $K_{H\beta}^0$  – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения нагрузки по ширине венца в начальный период работы передачи;  $K_{HW}$  – коэффициент, учитывающий приработку зубьев.

Для цементуемых зубчатых колес первоначальная неравномерность распределения нагрузки по ширине венца с течением времени практически не изменяется, поскольку колеса с твердыми поверхностями зубьев практически не прирабатываются [19]. Поэтому коэффициент  $K_{HW} = 1$ , а формула (7) принимает вид:  $K_{H\beta} = K_{H\beta}^0$ .

Коэффициент  $K_{H\beta}^0$  определяли в соответствии с рекомендациями ГОСТ 21 354–75:

$$K_{H\beta}^0 = 1 + \frac{0,4 \cdot b_w \cdot \gamma_{\Sigma} \cdot G_t}{w_{Hm}} + 0,14 \left( \frac{b_w}{d_w} \right)^2, \quad (8)$$

где  $G_t$  – суммарная жесткость сопряженных зубьев,  $G_t = 14$  ГПа;  $w_{Hm}$  – удельная расчетная окружная сила, Н/мм;  $b_w$  – рабочая ширина зубчатого венца, мм;  $d_w$  – диаметр начальной окружности, мм;  $\gamma_{\Sigma}$  – суммарный угол между проекциями осей зубчатых колес на плоскость зацепления, рад:

$$\gamma_{\Sigma} = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{b_w} = \frac{\Delta \delta}{b_w}, \quad (9)$$

где  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  – величины износа по краям рабочей ширины шестерни  $b_w$ , мм.

Подставив выражение (9) в (8) и выразив удельную расчетную окружную силу  $w_{Hm}$  через крутящий момент на шестерне  $T_H$  [Нм], получим окончательно выражение для  $K_{H\beta}$ :

$$K_{H\beta} = 1 + \frac{0,4 \cdot b_w \cdot d_w \cdot \Delta \delta \cdot G_t}{2000 \cdot T_H} + 0,14 \left( \frac{b_w}{d_w} \right)^2. \quad (10)$$

Величины износа  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ , входящие в выражение (9), определяли путем замеров слепков, снятых с зубьев каждой исследованной шестерни с использованием метакриловой смолы Degaroute 465, которая применялась также для определения глубины выкрашивания поврежденных зубьев. По результатам замеров слепков установлено, что глубина выкрашивания по боковой поверхности в зоне однопарного зацепления зубьев испытанных шестерен составила 0,4–0,7 мм.

Результаты исследования показали, что величина коэффициента  $K_{H\beta}$ , учитывающего неравномерность распределения нагрузки по ширине венца, колебалась от 1,04 до 1,50 для всех испытанных зубчатых пар. Полученные результаты позволили уточнить величину контактных напряжений  $\sigma_H$ , действующих на контактирующих поверхностях каждой пары испытанных шестерен.

Расчет эквивалентных касательных напряжений по формуле (6) с учетом уточненных значений контактных напряжений, действующих при режимах стендовых испытаний, показал, что глубина залегания максимальных величин эквивалентных напряжений составляет 0,5–0,6 мм, что хорошо согласуется с экспериментальными данными (см. рис. 1, а). Следовательно, можно сделать вывод, что зона зарождения глубинного контактного выкрашивания для шестерен с модулем 6,5 мм находится на глубине залегания максимальных эквивалентных касательных напряжений. Полученный результат показывает обоснованность применения расчетной модели напряженного состояния для эвольвентных зубчатых колес.

**Заключение.** При контактном нагружении поверхностно упрочненного материала напряженное состояние подповерхностного слоя неоднородное и изменяется с расстоянием от поверхности. Неоднородность напряженного состояния подповерхностного слоя является предпосылкой появления в нем критических зон, в которых могут зарождаться и развиваться усталостные процессы контактного разрушения.

Результаты натуральных стендовых испытаний зубчатых передач, изготовленных из цементуемой стали 20ХГНР показали, что зона зарождения глубинного контактного выкрашивания для шестерен с модулем 6,5 мм находится на глубине залегания максимальных эквивалентных касательных напряжений. Полученный результат показывает обоснованность применения расчетной модели напряженного состояния для эвольвентных зубчатых колес.

### Список использованных источников

1. Андожский, В. Д. Расчет зубчатых передач / В. Д. Андожский. – М.: Машгиз, 1955. – 243 с.
2. Buckingham, E. How contact stresses affect gear teeth / E. Buckingham // *SAE Journal*. – 1950. – Vol. 58, № 10. – P. 168–172.
3. Nishihara, T. Pitting of Steel under Lubricated Rolling Contact and Allowable Pressure on Tooth Profiles / T. Nishihara, T. Kobayashi // *Trans. Soc. Mech. Eng. Jpn.* – 1937. – Vol. 3, № 13. – P. 292–298. [https://doi.org/10.1299/kikai1935.3.13\\_292](https://doi.org/10.1299/kikai1935.3.13_292)
4. Трубин, Г. К. Контактная усталость материалов для зубчатых колес / Г. К. Трубин. – М.: Машгиз, 1962. – 404 с.
5. Эрлих, Л. Б. Механизм усталостных разрушений при контактной нагрузке / Л. Б. Эрлих // *Циклическая прочность металлов: сборник*. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – С. 74–81.
6. Гальпер, Р. Р. Контактная прочность высокоскоростных зубчатых передач с поверхностным упрочнением / Р. Р. Гальпер. – М.: ЛДНТП, 1964. – 54 с.
7. Петрусевиц, А. И. Контактная прочность деталей машин / А. И. Петрусевиц. – М.: Машиностроение, 1970. – 64 с.
8. Сосновский, Л. А. Основы трибофатики: в 2 т. / Л. А. Сосновский. – Гомель: БелГУТ, 2003. – Т. 1, 2.
9. Тескер, Е. И. Современные методы расчета и повышения несущей способности поверхностно упрочненных зубчатых передач трансмиссий и приводов / Е. И. Тескер. – М.: Машиностроение, 2011. – 434 с.
10. Руденко, С. П. Исследование сопротивления контактной усталости поверхностно упрочненных зубчатых колес / С. П. Руденко // *Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук*. – 2009. – № 4. – С. 48–53.
11. Руденко, С. П. Контактная усталость зубчатых колес трансмиссий энергонасыщенных машин / С. П. Руденко, А. Л. Валько. – Минск: Беларус. навука, 2014. – 126 с.
12. Rudenko, S. P. Contact Fatigue Resistance of Carburized Gears from Chromium-Nickel Steels / S. P. Rudenko, A. L. Val'ko // *Metal Science and Heat Treatment*. – 2017. – Vol. 59, № 1–2. – P. 60–64. <https://doi.org/10.1007/s11041-017-0103-3>
13. О методах оценки несущей способности цилиндрических зубчатых передач / В. Н. Кудрявцев [и др.] // *Вестн. машиностроения*. – 1989. – № 9. – С. 29–36.
14. Брагин, В. В. Проектирование высоконапряженных цилиндрических зубчатых передач / В. В. Брагин, Д. Н. Решетов. – М.: Машиностроение, 1991. – 224 с.
15. Расчет на прочность в машиностроении / С. Д. Пономарев [и др.]. – М.: Машгиз, 1958. – Т. 2: Некоторые задачи прикладной теории упругости, расчеты за пределами упругости, расчеты на ползучесть. – 974 с.
16. Редукторы энергетических машин: справочник / под ред. Ю. Л. Державца. – Л.: Машиностроение. Ленингр. отделение, 1985. – 232 с.
17. Саверин, М. М. Контактная прочность материала в условиях одновременного действия нормальной и касательной нагрузки / М. М. Саверин. – М.: Машгиз, 1946. – 149 с.
18. Fujita, K. Effect of Case Depth and Relative Radius of Curvature on Surface Durability of Case-Hardened Chromium Molybdenum Steel Roller / K. Fujita, A. Yoshida // *J. Eng. Ind.* – 1981. – Vol. 103, № 2. – P. 115–124. <https://doi.org/10.1115/1.3254942>
19. Авиационные зубчатые передачи и редукторы: справочник / под ред. Э. Б. Вулгакова. – М.: Машиностроение, 1981. – 374 с.

### References

1. Andozhskii V. D. *Calculation of Gears*. Moscow, Mashgiz Publ., 1955. 243 p. (in Russian).
2. Buckingham E. How contact stresses affect gear teeth. *SAE Journal*, 1950, vol. 58, no. 10, pp. 168–172.
3. Nishihara T. Pitting of Steel under Lubricated Rolling Contact and Allowable Pressure on Tooth Profiles. *Transaction of the Society of Mechanical Engineering Japan*, 1937, vol. 3, no. 13, pp. 292–298. [https://doi.org/10.1299/kikai1935.3.13\\_292](https://doi.org/10.1299/kikai1935.3.13_292)
4. Trubin G. K. *Contact Fatigue of Gear Materials*. Moscow, Mashgiz Publ., 1962. 404 p. (in Russian).
5. Erlich L. B. Mechanism of fatigue failure under contact loading. *Cyclic Strength of Metals: Collection*. Moscow, Publishing House of Academy of Sciences of USSR, 1962, pp. 74–81 (in Russian).
6. Galper P. P. *Contact Strength of High-Speed Gears with Surface Hardening*. Moscow, LDNTP Publ., 1964. 54 p. (in Russian).
7. Petrushevich A. I. *Contact Strength of Machine Parts*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1970. 64 p. (in Russian).
8. Sosnovsky L. A. *Podstawy Tribophatics. Volumes 1, 2*. Homel, Belarusian State University of Transport, 2003 (in Russian).
9. Tesker E. I. *Modern Methods for Calculating and Improving the Load-Carrying Capacity of Surface-Hardened Gear Transmissions and Drives*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2011. 434 p. (in Russian).
10. Rudenko S. P. Research of resistance of contact fatigue of surface-hardened gear-wheels. *Vestsi Natsyyanal'nei akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2009, no. 4, pp. 48–53 (in Russian).

11. Rudenko S. P., Val'ko A. L. *Contact Fatigue of Gearwheels in Transmissions of Power-Saturated Machines*. Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 2014. 126 p. (in Russian).
12. Rudenko S. P., Valko A. L. Contact Fatigue Resistance of Carburized Gears from Chromium-Nickel Steels. *Metal Science and Heat Treatment*, 2017, vol. 59, no. 1–2, pp. 60–64. <https://doi.org/10.1007/s11041-017-0103-3>
13. Kudryavtsev V. N., Reshetov D. N., Kuz'min I. S., Filippenkov A. L. On methods for estimating the load-carrying capacity of spur gears. *Vestnik mashinostroeniya* [Bulletin of Mechanical Engineering], 1989, no. 9, pp. 29–36 (in Russian).
14. Bragin V. V., Reshetov D. N. *Design of High-Stress Spur Gears*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1991. 224 p. (in Russian).
15. Ponomarev S. D., Biderman V. L., Likharev K. K., Makushin V. M., Malinin N. N., Fedos'ev V. I. *Strength Calculation in Mechanical Engineering. Volume 2. Some Problems of Applied Elasticity Theory, Calculations Beyond Elasticity, Creep Calculations*. Moscow, Mashgiz Publ., 1958. 974 p. (in Russian).
16. Balashov B. A., Galper R. R., Garkavi L. M. [et al.]. *Power Machine Gearboxes*. Leningrad, Mashinostroenie Publ., Leningrad branch, 1985. 232 p. (in Russian).
17. Saverin M. M. *Contact Strength of the Material under Simultaneous Normal and Tangential Loading*. Moscow, Mashgiz Publ., 1946. 149 p. (in Russian).
18. Fujita K., Yoshida A. Effect of Case Depth and Relative Radius of Curvature on Surface Durability of Case-Hardened Chromium Molybdenum Steel Roller. *Journal of Engineering for Industry*, 1981, vol. 103, no. 2, pp. 115–124. <https://doi.org/10.1115/1.3254942>
19. Alekseev V. I., Anan'ev V. M., Bulygina M. M. *Aircraft Gears and Gearboxes*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1981. 374 p. (in Russian).

### Информация об авторах

*Руденко Сергей Петрович* – кандидат технических наук, Объединенный институт машиностроения Национальной академии наук Беларуси (ул. Академическая, 12, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: sprud.47@mail.ru

*Сандомирский Сергей Григорьевич* – доктор технических наук, доцент, Объединенный институт машиностроения Национальной академии наук Беларуси (ул. Академическая, 12, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: sand\_work@mail.ru

### Information about the authors

*Sergey P. Rudenko* – Ph. D. (Engineering), Joint Institute of Mechanical Engineering of the National Academy of Sciences of Belarus (12, Akademicheskaya Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: sprud.47@mail.ru

*Sergey G. Sandomirski* – D. Sc. (Engineering), Assistant Professor, Joint Institute of Mechanical Engineering of the National Academy of Sciences of Belarus (12, Akademicheskaya Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: sand\_work@mail.ru