

УДК 539.3

А. С. КРАВЧУК, Е. В. ТОМИЛО, И. А. ТАРАСЮК

**НЕЛИНЕЙНАЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ СЛОИСТЫХ
И КОМПОЗИЦИОННЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ БРУСЬЕВ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ***Белорусский государственный университет,
Белорусский национальный технический университет**(Поступила в редакцию 24.10.2014)*

Введение. Ползучесть – непрерывная деформация твердого тела под воздействием постоянной механической нагрузки. Ползучести подвержены все кристаллические и аморфные твердые тела. Это явление наблюдают у некоторых материалов при температурах, близких к комнатной, но чаще всего при относительно высоких температурах [1, 2]. С увеличением температуры скорость ползучести растет, что ограничивает долговечность конструкций, работающих в подобных условиях.

Наиболее активно проявляют реологические свойства полимерные, а также композиционные материалы, на основе полимеров с использованием как усиливающих волокон, так и мелкодисперсных наполнителей различного назначения [1, 2]. Важное значение для современной инженерии имеет ползучесть деталей из композиционных металлополимерных материалов, что подчеркивает актуальность данного исследования.

При построении обобщенной технической теории чистого изгиба призматическую балку постоянной толщины можно разделить на элементарные призматические волокна (рис. 1). Под чистым изгибом будем понимать изгиб, при котором продольные призматические волокна в балке не взаимодействуют в поперечном направлении [3, 4].

Положим, что брус имеет прямоугольное сечение с постоянной высотой h и толщиной, равной Δ . Будем предполагать, что у призматического бруса с постоянной толщиной при чистом изгибе существует нейтральный слой, т. е. слой, длина которого не изменяется при изгибе. Предполагается, что брус длиной ℓ можно условно разделить на волокна с постоянным прямоугольным сечением $\lambda \times \eta$ в плоскости XOY ($\lambda, \eta \ll \ell$) (рис. 1).

Исследование деформации и распределения напряжений прямоугольного бруса в условиях нелинейной ползучести при чистом изгибе. Будем предполагать, что брус разделен поперечными плоскостями на конечное число поперечных элементов длиной нейтрального слоя dz .

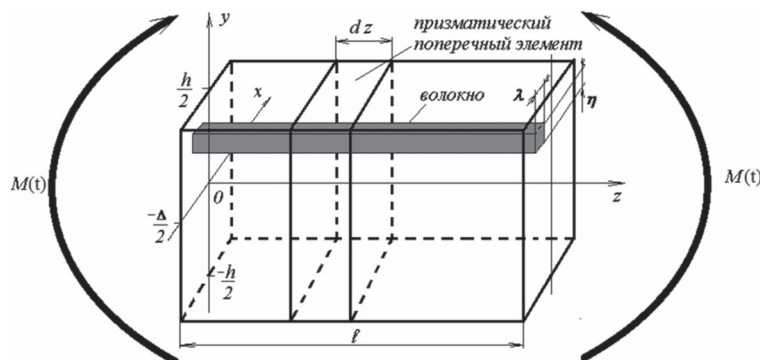


Рис. 1. Чистый изгиб призматического бруса

Следуя монографии [3], рассмотрим деформацию любого поперечного элемента бруса. Исходя из очевидных рассуждений о геометрическом подобии длин элементарных волокон длине нейтрального слоя, можно установить, что деформации элементарных волокон относительно геометрического положения нейтрального слоя распределены следующим образом:

$$\varepsilon_z(y, t) = \frac{y - \delta(t)}{\rho(t)}, \quad (1)$$

где $\delta(t)$ – мгновенная координата нейтрального слоя относительно середины бруса, $\rho(t)$ – мгновенный радиус кривизны нейтрального слоя.

При ползучести предполагается, что деформации происходят так медленно, что задача рассматривается как квазистатическая [4], т. е. масса-инерционные характеристики призматического бруса не влияют на характер его деформирования. Рассматривается установившаяся ползучесть бруса. В соответствии с наследственной теорией ползучести для призматического бруса из одного однородного стареющего материала, подверженного чистому изгибу, будем рассматривать уравнение состояния [1]

$$\mathfrak{Z}(\varepsilon_z(y, t)) = \sigma_z(y, t) + \int_0^t \sigma_z(y, \tau) \Gamma(t, \tau) d\tau, \quad (2)$$

где $\mathfrak{Z}(\)$ – некоторая нелинейная функция, $\Gamma(t, \tau)$ – ядро ползучести материала. При дальнейших исследованиях будем различать материалы, у которых нелинейная функция $\mathfrak{Z}(\)$ определяется кусочно-линейной диаграммой Прандтля:

$$\mathfrak{Z}\left(\frac{y - \delta(t)}{\rho(t)}\right) = \begin{cases} \sigma_T^{\text{раст}} \left(1 - \frac{E_T}{E}\right) + E_T \left(\frac{y - \delta(t)}{\rho(t)}\right), & E \frac{y - \delta(t)}{\rho(t)} \geq \sigma_T^{\text{раст}}, \\ E \frac{y - \delta(t)}{\rho(t)}, & \sigma_T^{\text{раст}} \geq E \frac{y - \delta(t)}{\rho(t)} \geq \sigma_T^{\text{сж}}, \\ \sigma_T^{\text{сж}} \left(1 - \frac{E_T}{E}\right) + E_T \left(\frac{y - \delta(t)}{\rho(t)}\right), & \sigma_T^{\text{сж}} \geq E \frac{y - \delta(t)}{\rho(t)}, \end{cases} \quad (3)$$

где E – модуль упругости, $\sigma_T^{\text{раст}}$ – предел текучести при растяжении, $\sigma_T^{\text{сж}}$ – предел текучести при сжатии, E_T – касательный модуль пластичности (имеет одинаковое значение для сжатия и растяжения). В общем случае материалов очевидно, что $\sigma_T^{\text{раст}} \neq -\sigma_T^{\text{сж}}$, и применения билинейной диаграммы недостаточно.

Время изгиба до достижения значений $\delta(0)$ и $\rho(0)$ пренебрежимо мало по сравнению с временем измерений. Это позволяет предположить, что $\delta(0)$ и $\rho(0)$ являются мгновенными величинами.

Исходя из того, что касательные напряжения по нашему предположению отсутствуют, и чистый изгиб происходит в плоскости YOZ , нам необходимо удовлетворить первые два уравнения равновесия, третье уравнение удовлетворяется автоматически в силу четности $\sigma_z(y, t)$ по переменной x (независимости от x) [3, 4]

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \sigma_z(y, t) dx dy = 0, \quad \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} (\sigma_z(y, t) y) dx dy = M(t), \quad (4)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} (\sigma_z(y, t) x) dx dy = 0,$$

где $M(t)$ – значение изгибающего момента, медленно изменяющегося и не убывающего во времени.

Однослойный вязкоупругий однородно стареющий брус из однородного материала. Интегрируя выражение (2) с учетом формул (3), (4), получаем два уравнения равновесия, определяющие в общем случае для любого фиксированного времени t положение нейтрального слоя $\delta(t)$ относительно середины высоты бруса вдоль направления OY и радиус кривизны $\rho(t)$:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \mathfrak{Z}(\varepsilon_z(y,t)) dy = 0, \quad (5)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \mathfrak{Z}(\varepsilon_z(y,t)) y dy = \frac{1}{\Delta} \left(M(t) + \int_0^t M(\tau) \Gamma(t,\tau) d\tau \right).$$

Окончательно из уравнений (5), используя подстановки $h_T^{\text{раст}} = \frac{\rho}{E} \sigma_T^{\text{раст}} + \delta$ и $h_T^{\text{сж}} = \frac{\rho}{E} \sigma_T^{\text{сж}} + \delta$, можно получить систему нелинейных уравнений, определяющих $\delta(t)$ и $\rho(t)$ для любого фиксированного времени t :

$$\begin{aligned} & \frac{(E - E_T)h(\sigma_T^{\text{раст}} - \sigma_T^{\text{сж}})}{2E} - \frac{E_T h}{\rho(t)} \delta(t) + \frac{(E - E_T)(\sigma_T^{\text{раст}} - \sigma_T^{\text{сж}})}{E} \delta(t) + \\ & + \frac{(E - E_T) \left((\sigma_T^{\text{раст}})^2 - (\sigma_T^{\text{сж}})^2 \right)}{2E^2} \rho(t) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{E_T h^3}{12\rho(t)} + \frac{(E - E_T)(\sigma_T^{\text{раст}} - \sigma_T^{\text{сж}})}{2E} \delta(t)^2 + \frac{(E - E_T) \left((\sigma_T^{\text{раст}})^2 - (\sigma_T^{\text{сж}})^2 \right)}{2E^2} \delta(t) \rho(t) + \\ & + \frac{(E - E_T) \left((\sigma_T^{\text{раст}})^3 - (\sigma_T^{\text{сж}})^3 \right)}{6E^3} \rho(t)^2 = \frac{1}{\Delta} \left(M(t) + \int_0^t M(\tau) \Gamma(t,\tau) d\tau \right) + \frac{(E - E_T) h^2 (\sigma_T^{\text{раст}} - \sigma_T^{\text{сж}})}{8E}. \end{aligned}$$

Первое уравнение системы (6) в случае вязкоупругого однородно стареющего бруса (т. е. $E_T = E$ и $\sigma_T^{\text{раст}} = \sigma_T^{\text{сж}} = 0$) вырождается в уже упомянутое равенство $\delta(t) = 0$ [4]. Второе уравнение совпадает с уравнением вычисления радиуса кривизны $\frac{1}{\rho(t)}$ вязкоупругого однородно стареющего бруса при подстановке $\sigma_T^{\text{раст}} = \sigma_T^{\text{сж}} = 0$ и $E_T = E$.

Очевидно, что если перейти к рассмотрению мгновенных значений модуля упругости $E(t)$, предела текучести при растяжении $\sigma_T^{\text{раст}}(t)$, предела текучести при сжатии $\sigma_T^{\text{сж}}(t)$, касательного модуля пластичности $E_T(t)$, структура уравнений (6) не поменяется. Однако это даст возможность рассмотреть старение при чистом изгибе материалов, обладающих свойством нелинейной ползучести (в частности, при высоких температурах).

Горизонтально-слоистый брус постоянной толщины и ширины из материалов, обладающих нелинейной ползучестью. Рассмотрим деформацию многослойного призматического бруса размером $\Delta \times h \times \ell$ из N слоев. При этом k -й слой ($k = \overline{1, N}$) имеет высоту h_k и модуль упругости E_k , предел текучести при растяжении $\sigma_{T,k}^{\text{раст}}$, предел текучести при сжатии $\sigma_{T,k}^{\text{сж}}$, касательный модуль пластичности $E_{T,k}$ (одинаковый для сжатия и растяжения) и ядро $\Gamma_k(t, \tau)$ ползучести материала слоя (рис. 2, а).

Будем использовать гипотезу об однородном деформированном состоянии всех горизонтальных слоев призматического поперечного элемента бруса длиной dz , т. е. будем считать, что для всего пакета в любое время t существуют средние значения $\langle \delta(t) \rangle$, $\langle \rho(t) \rangle$, такие что

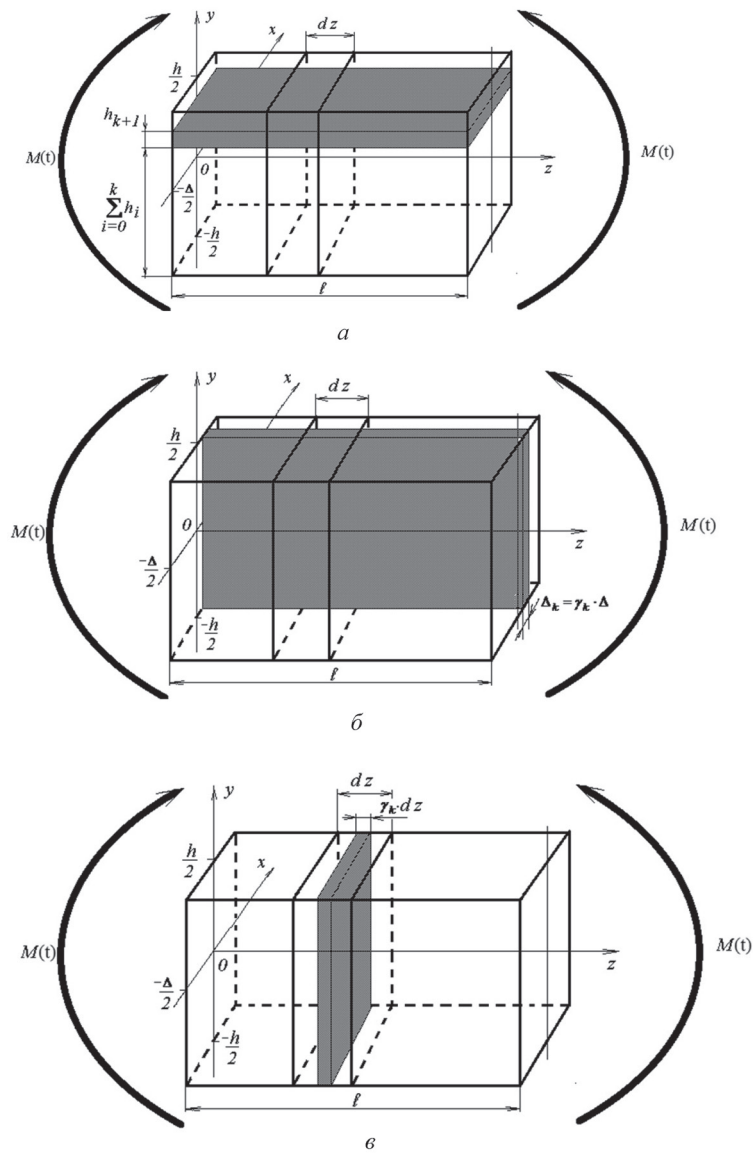


Рис. 2. Схемы нагружения горизонтально-слоистого бруса (а), вертикально продольно-слоистого бруса (б), поперечно-слоистого бруса (в)

$$\varepsilon_z(y, t) = \frac{y - \langle \delta(t) \rangle}{\langle \rho(t) \rangle}. \quad (7)$$

Пусть в точке y находится слой с номером k (рис. 2, а), тогда связь напряжений и деформаций в этом слое определяется выражением

$$\sigma_{z,k}(y, t) + \int_0^t \sigma_{z,k}(y, \tau) \Gamma_k(t, \tau) d\tau = \mathfrak{Z}_k \left(\frac{y - \langle \delta(t) \rangle}{\langle \rho(t) \rangle} \right), \quad (8)$$

где $y \in \left[-\frac{h}{2} + \sum_{i=0}^{k-1} h_i, -\frac{h}{2} + \sum_{i=1}^k h_i \right]$, $k = \overline{1, N}$, $h_0 = 0$, $\mathfrak{Z}_k(\cdot)$ – кусочно-линейная диаграмма Прандтля (3) с набором констант E_k , $\sigma_{T,k}^{\text{раст}}$, $\sigma_{T,k}^{\text{сж}}$, $E_{T,k}$, соответствующих материалу k -го слоя.

Усредняя по реализации механических характеристик слоев уравнение (8), получаем, что на уровне y относительного среднего значения $\langle \delta(t) \rangle$ координаты нейтрального слоя и его средней кривизны $\langle \rho(t) \rangle$ выполняется равенство

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h\Delta} \left(\sum_{k=1}^N \sigma_{z,k}(y,t) h_k \Delta + \int_0^t \sum_{k=1}^N \sigma_{z,k}(y,\tau) h_k \Delta \Gamma_k(t,\tau) d\tau \right) = \\
& = \sum_{k=1}^N \gamma_k \left(\sigma_{z,k}(y,t) + \int_0^t \sigma_{z,k}(y,\tau) \Gamma_k(t,\tau) d\tau \right) = \sum_{k=1}^N \gamma_k \mathfrak{F}_k \left(\frac{y - \langle \delta(t) \rangle}{\langle \rho(t) \rangle} \right) = \\
& = \begin{cases} \langle \sigma_T^{\text{паст}} \rangle \left(1 - \frac{\langle E_T \rangle}{\langle E \rangle} \right) + \langle E_T \rangle \frac{y - \langle \delta(t) \rangle}{\langle \rho(t) \rangle}, & \langle E \rangle \frac{y - \langle \delta(t) \rangle}{\langle \rho(t) \rangle} \geq \langle \sigma_T^{\text{паст}} \rangle, \\ \langle E \rangle \frac{y - \langle \delta(t) \rangle}{\langle \rho(t) \rangle}, & \langle \sigma_T^{\text{паст}} \rangle \geq \langle E \rangle \frac{y - \langle \delta(t) \rangle}{\langle \rho(t) \rangle} \geq \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle, \\ \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle \left(1 - \frac{\langle E_T \rangle}{\langle E \rangle} \right) + \langle E_T \rangle \frac{y - \langle \delta(t) \rangle}{\langle \rho(t) \rangle}, & \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle \geq \langle E \rangle \frac{y - \langle \delta(t) \rangle}{\langle \rho(t) \rangle}, \end{cases} \quad (9)
\end{aligned}$$

где $\gamma_k = h_k / h$ – относительные высоты слоя материала с номером k ($k = \overline{0, N}$),

$$\langle E \rangle = \sum_{k=1}^N \gamma_k E_k, \quad \langle E_T \rangle = \sum_{k=1}^N \gamma_k E_{T,k}, \quad \langle \sigma_T^{\text{паст}} \rangle = \frac{\sum_{k=1}^N \gamma_k \sigma_{T,k}^{\text{паст}} \left(1 - \frac{E_{T,k}}{E_k} \right)}{\left(1 - \frac{\langle E_T \rangle}{\langle E \rangle} \right)}, \quad \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle = \frac{\sum_{k=1}^N \gamma_k \sigma_{T,k}^{\text{сж}} \left(1 - \frac{E_{T,k}}{E_k} \right)}{\left(1 - \frac{\langle E_T \rangle}{\langle E \rangle} \right)}. \quad (10)$$

Предполагая, что $\sigma_{z,k}(y,\tau) \approx \frac{E_k}{\langle E \rangle} \langle \sigma_z(y,\tau) \rangle$, для левой части выполняем приближенное равенство

$$\sum_{k=1}^N \gamma_k \left(\sigma_{z,k}(y,t) + \int_0^t \sigma_{z,k}(y,\tau) \Gamma_k(t,\tau) d\tau \right) \approx \langle \sigma_z(y,t) \rangle + \int_0^t \langle \sigma_z(y,\tau) \rangle \langle \Gamma(t,\tau) \rangle d\tau, \quad (11)$$

где $\langle \Gamma(t,\tau) \rangle = \sum_{k=1}^N \gamma_k \frac{E_k}{\langle E \rangle} \Gamma_k(t,\tau)$.

Подставляя выражения (9) и (11) в первые два уравнения равновесия (4), получаем, как в случае однородного бруса, два уравнения для определения средних значений $\langle \delta(t) \rangle$ и $\langle \rho(t) \rangle$, аналогичных уравнениям (6):

$$\begin{aligned}
& \frac{(\langle E \rangle - \langle E_T \rangle) h (\langle \sigma_T^{\text{паст}} \rangle - \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle)}{2 \langle E \rangle} - \frac{\langle E_T \rangle h \langle \delta(t) \rangle}{\langle \rho(t) \rangle} + \frac{(\langle E \rangle - \langle E_T \rangle) (\langle \sigma_T^{\text{паст}} \rangle - \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle)}{\langle E \rangle} \langle \delta(t) \rangle + \\
& + \frac{(\langle E \rangle - \langle E_T \rangle) (\langle \sigma_T^{\text{паст}} \rangle^2 - \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle^2)}{2 \langle E \rangle^2} \langle \rho(t) \rangle = 0, \quad (12) \\
& \frac{\langle E_T \rangle h^3}{12 \langle \rho(t) \rangle} + \frac{(\langle E \rangle - \langle E_T \rangle) (\langle \sigma_T^{\text{паст}} \rangle - \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle)}{2 \langle E \rangle} \langle \delta(t) \rangle^2 - \frac{(\langle E \rangle - \langle E_T \rangle) (\langle \sigma_T^{\text{паст}} \rangle^2 - \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle^2)}{2 \langle E \rangle^2} \langle \delta(t) \rangle \langle \rho(t) \rangle + \\
& + \frac{(\langle E \rangle - \langle E_T \rangle) (\langle \sigma_T^{\text{паст}} \rangle^3 - \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle^3)}{6 \langle E \rangle^3} \langle \rho(t) \rangle^2 = \frac{1}{\Delta} \left(M(t) + \int_0^t M(\tau) \langle \Gamma(t,\tau) \rangle d\tau \right) + \\
& + \frac{(\langle E \rangle - \langle E_T \rangle) h^2 (\langle \sigma_T^{\text{паст}} \rangle - \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle)}{8 \langle E \rangle}.
\end{aligned}$$

Очевидно, что и среднее смещение $\langle \delta(t) \rangle$ нейтрального слоя в многослойном пакете (12), и средний радиус $\langle \rho(t) \rangle$ кривизны изгибаемого пакета (12) зависят от относительных высот слоев γ_k в изгибаемом многослойном пакете. Для моделирования ползучести слоистой композиции полимер–металл достаточно для соответствующих металлам номеров i_j положить $\Gamma_{i_j}(t, \tau) = 0$.

Композиционный структурно-неоднородный брус со свойствами нелинейной ползучести. Решение задачи будет выполнено в соответствии с методикой, изложенной в [4]. Для решения задачи определения эффективных параметров деформирования структурно-неоднородного бруса рассматривается элемент композиционного материала (макроточка), на границе которого задаются воздействия, имитирующие воздействия, возникающие в твердом теле, т. е. в данном случае рассматривается чистый изгиб призматического поперечного элемента бруса длиной dz (макроточки бруса) (рис. 1) с прямоугольным сечением высотой h и толщиной, равной Δ .

Принцип реализации метода гомогенизации для призматического бруса прямоугольного сечения (рис. 1) заключается в следующем: если композиционный материал состоит из N компонент (фаз) и в среднем изотропен (например, имеет место хаотическое армирование и т. п.), то можно использовать гипотезу Фойгта для призматического бруса о том, что деформации по всему объему композиционного материала призматического стержня непрерывны по координате y вне зависимости от вязкоупругих характеристик материала, находящегося в любой точке (y, z) макроточки бруса. Второй предельный случай (гипотеза Рейсса) заключается в том, что напряжения по всему объему макроточки непрерывны по координате y вне зависимости от механических характеристик материала, находящегося в точке (y, z) макроточки бруса.

Предполагается, что значения объемных долей γ_k ($k = \overline{1, N}$) (концентраций) компонент композиционного материала известны для бруса в целом, и они же являются объемными долями компонент для каждого из призматических поперечных элементов бруса длиной dz (рис. 1). При усреднении нелинейных реологических характеристик композиционного материала бруса предполагается, что механические свойства (модуль упругости E_k , предел текучести при растяжении $\sigma_{T,k}^{\text{раст}}$, предел текучести при сжатии $\sigma_{T,k}^{\text{сж}}$, касательный модуль пластичности $E_{T,k}$, а также ядро ползучести $\Gamma_k(t, \tau)$) известны для каждой компоненты k ($k = \overline{1, N}$) композиционного материала.

Применение гипотезы Фойгта для вычисления эффективных реологических параметров материала из N компонент для призматического бруса [4]. В данном случае следует воспользоваться решением задачи усреднения реологических характеристик вертикально продольно-слоистого бруса постоянной толщины (рис. 2, б), так как при таком нагружении гипотеза об однородном деформированном состоянии всех компонент многокомпонентного бруса удовлетворяется по определению.

Данная расчетная схема, очевидно, позволяет рассмотреть вертикально продольно-слоистый стержень не более чем из N слоев. При этом k -й вертикальный слой ($k = \overline{1, N}$) имеет высоту, например, вдоль Y -направления h , а вдоль X -направления – ширину $\Delta_k = \gamma_k \Delta$ (рис. 2, б).

Будем считать, что для каждого вертикального слоя из пакета значения $\langle \delta(t) \rangle_\phi$, $\langle \rho(t) \rangle_\phi$ одинаковые. Усредняя по реализации механических характеристик слоев уравнение (8), получаем, что на уровне y относительного среднего значения $\langle \delta(t) \rangle_\phi$ координаты нейтрального слоя и его средней кривизны $\langle \rho(t) \rangle_\phi$ выполняется равенство

$$\frac{1}{h\Delta} \sum_{k=1}^N \sigma_{z,k}(y, t) h \Delta_k + \int_0^t \frac{1}{h\Delta} \sum_{k=1}^N [\sigma_{z,k}(y, \tau) \Gamma_k(t, \tau)] h \Delta_k d\tau = \quad (13)$$

$$= \begin{cases} \langle \sigma_T^{\text{раст}} \rangle_\phi \left(1 - \frac{\langle E_T \rangle_\phi}{\langle E \rangle_\phi} \right) + \langle E_T \rangle_\phi \frac{y - \langle \delta(t) \rangle_\phi}{\langle \rho(t) \rangle_\phi}, & \langle E \rangle_\phi \frac{y - \langle \delta(t) \rangle_\phi}{\langle \rho(t) \rangle_\phi} \geq \langle \sigma_T^{\text{раст}} \rangle_\phi, \\ \langle E \rangle_\phi \frac{y - \langle \delta(t) \rangle_\phi}{\langle \rho(t) \rangle_\phi}, & \langle \sigma_T^{\text{раст}} \rangle_\phi \geq \langle E \rangle_\phi \frac{y - \langle \delta(t) \rangle_\phi}{\langle \rho(t) \rangle_\phi} \geq \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_\phi, \\ \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_\phi \left(1 - \frac{\langle E_T \rangle_\phi}{\langle E \rangle_\phi} \right) + \langle E_T \rangle_\phi \frac{y - \langle \delta(t) \rangle_\phi}{\langle \rho(t) \rangle_\phi}, & \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_\phi \geq \langle E \rangle_\phi \frac{y - \langle \delta(t) \rangle_\phi}{\langle \rho(t) \rangle_\phi} \end{cases}$$

где $\gamma_k = \Delta_k / \Delta$ – относительные толщины вертикального слоя материала с номером k ($k = \overline{0, N}$),

$$\begin{aligned} \langle E \rangle_{\Phi} &= \sum_{k=1}^N \gamma_k E_k, \quad \langle E_T \rangle_{\Phi} = \sum_{k=1}^N \gamma_k E_{T,k}, \\ \langle \sigma_T^{\text{раст}} \rangle_{\Phi} &= \frac{\sum_{k=1}^N \gamma_k \sigma_{T,k}^{\text{раст}} \left(1 - \frac{E_{T,k}}{E_k}\right)}{\left(1 - \frac{\langle E_T \rangle_{\Phi}}{\langle E \rangle_{\Phi}}\right)}, \quad \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_{\Phi} = \frac{\sum_{k=1}^N \gamma_k \sigma_{T,k}^{\text{сж}} \left(1 - \frac{E_{T,k}}{E_k}\right)}{\left(1 - \frac{\langle E_T \rangle_{\Phi}}{\langle E \rangle_{\Phi}}\right)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Аналогично (11) будем считать, что $\sigma_{z,k}(y, \tau) \approx \frac{E_k}{\langle E \rangle_{\Phi}} \langle \sigma_z(y, \tau) \rangle_{\Phi}$. Тогда левую часть выражения (13) можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^N \gamma_k \left(\sigma_{z,k}(y, t) + \int_0^t \sigma_{z,k}(y, \tau) \Gamma_k(t, \tau) d\tau \right) \approx \langle \sigma_z(y, t) \rangle_{\Phi} + \int_0^t \langle \sigma_z(y, \tau) \rangle_{\Phi} \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_{\Phi} d\tau, \quad (15)$$

где $\langle \Gamma(t, \tau) \rangle_{\Phi} = \sum_{k=1}^N \gamma_k \frac{E_k}{\langle E \rangle_{\Phi}} \Gamma_k(t, \tau)$. Интегрируя выражение (13) по координате y с учетом формулы (15), получаем систему уравнений для определения значений $\langle \delta(t) \rangle_{\Phi}$ и $\langle \rho(t) \rangle_{\Phi}$, аналогичную системе (12), с точностью до замен $\langle E \rangle_{\Phi} = \langle E \rangle$, $\langle \sigma_T^{\text{раст}} \rangle_{\Phi} = \langle \sigma_T^{\text{раст}} \rangle$, $\langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_{\Phi} = \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle$, $\langle E_T \rangle_{\Phi} = \langle E_T \rangle$ и $\langle \Gamma(t, \tau) \rangle_{\Phi} = \langle \Gamma(t, \tau) \rangle$.

Применение гипотезы Рейсса [4] при вычислении эффективных реологических параметров композиционного бруса. В данном случае следует воспользоваться решением задачи усреднения мгновенных модулей упругости и ядер ползучести поперечного слоистого бруса постоянного прямоугольного сечения (рис. 2, в), так как при таком нагружении гипотеза об однородном напряженном состоянии всех компонент многокомпонентного покрытия удовлетворяется по определению.

Для k -го вертикального слоя в призматическом поперечном элементе бруса длиной dz можно вычислить деформацию как (рис. 2, в)

$$\varepsilon_{z,k}(y, t) = \frac{y - \delta_k(t)}{\rho_k(t)}. \quad (16)$$

Из выражений (2) и (13) можно получить очевидное равенство для напряжений, действующих в вертикальном слое:

$$\mathfrak{I}_k^{-1} \left(\sigma_z(y, t) + \int_0^t \sigma_z(y, \tau) \Gamma_k(t, \tau) d\tau \right) = \left(\frac{y}{\rho_k(t)} - \frac{\delta_k(t)}{\rho_k(t)} \right),$$

где [1]

$$\mathfrak{I}_k^{-1} \left(\sigma_z(y, t) + \int_0^t \sigma_z(y, \tau) \Gamma_k(t, \tau) d\tau \right) = \begin{cases} \frac{\sigma_z(y, t) + \int_0^t \sigma_z(y, \tau) \Gamma_k(t, \tau) d\tau}{E_{T,k}} - \frac{\sigma_{T,k}^{\text{раст}}}{E_{T,k}} \left(1 - \frac{E_{T,k}}{E_k}\right), & \sigma_z \geq \sigma_{T,k}^{\text{раст}}, \\ \frac{\sigma_z(y, t) + \int_0^t \sigma_z(y, \tau) \Gamma_k(t, \tau) d\tau}{E_k}, & \sigma_{T,k}^{\text{раст}} \geq \sigma_z \geq \sigma_{T,k}^{\text{сж}}, \\ \frac{\sigma_z(y, t) + \int_0^t \sigma_z(y, \tau) \Gamma_k(t, \tau) d\tau}{E_{T,k}} - \frac{\sigma_{T,k}^{\text{сж}}}{E_{T,k}} \left(1 - \frac{E_{T,k}}{E_k}\right), & \sigma_{T,k}^{\text{сж}} \geq \sigma_z. \end{cases} \quad (17)$$

Поскольку для напряжения, действующего на каждый поперечный слой, выполнено равенство $\langle \sigma_z(y, t) \rangle_P = \sigma_z(y, t)$, и толщина поперечного слоя из одного материала равна $\gamma_k dz$, тогда, переходя к значению средней деформации для всего пакета поперечных слоев призматического поперечного элемента, получаем из выражения (17) следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{dz} \sum_{k=1}^N \gamma_k dz \mathfrak{Z}_k^{-1} \left(\langle \sigma_z(y, t) \rangle_P + \int_0^t \langle \sigma_z(y, \tau) \rangle_P \Gamma_k(t, \tau) d\tau \right) = \\ = \left(y \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{\rho_k(t)} - \sum_{k=1}^N \gamma_k \frac{\delta_k(t)}{\rho_k(t)} \right) = \left(\frac{y - \langle \delta(t) \rangle_P}{\langle \rho(t) \rangle_P} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где $\langle \delta(t) \rangle_P = \langle \rho(t) \rangle_P \sum_{k=1}^N \gamma_k \frac{\delta_k(t)}{\rho_k(t)}$, $\frac{1}{\langle \rho(t) \rangle_P} = \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{\rho_k(t)}$.

Вычисляем левую часть уравнения (18), исходя из выражения (17):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \gamma_k \mathfrak{Z}_k^{-1} \left(\langle \sigma_z(y, t) \rangle_P + \int_0^t \langle \sigma_z(y, \tau) \rangle_P \Gamma_k(t, \tau) d\tau \right) = \\ = \begin{cases} \frac{\langle \sigma_z(y, t) \rangle_P + \int_0^t \langle \sigma_z(y, \tau) \rangle_P \langle \Gamma_I(t, \tau) \rangle_P d\tau}{\langle E_T \rangle_P} - \frac{\langle \sigma_T^{\text{раст}} \rangle_P}{\langle E_T \rangle_P} \left(1 - \frac{\langle E_T \rangle_P}{\langle E \rangle_P} \right), & \sigma_z \geq \langle \sigma_T^{\text{раст}} \rangle_P, \\ \frac{\langle \sigma_z(y, t) \rangle_P + \int_0^t \langle \sigma_z(y, \tau) \rangle_P \langle \Gamma_{II}(t, \tau) \rangle_P d\tau}{\langle E \rangle_P}, & \langle \sigma_T^{\text{раст}} \rangle_P \geq \sigma_z \geq \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_P, \\ \frac{\langle \sigma_z(y, t) \rangle_P + \int_0^t \langle \sigma_z(y, \tau) \rangle_P \langle \Gamma_I(t, \tau) \rangle_P d\tau}{\langle E_T \rangle_P} - \frac{\langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_P}{\langle E_T \rangle_P} \left(1 - \frac{\langle E_T \rangle_P}{\langle E \rangle_P} \right), & \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_P \geq \sigma_z, \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\langle E \rangle_P = \left(\sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{E_k} \right)^{-1}, \quad \langle E_T \rangle_P = \left(\sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{E_{T,k}} \right)^{-1},$$

$$\langle \sigma_T^{\text{раст}} \rangle_P = \langle E_T \rangle_P \frac{\sum_{k=1}^N \gamma_k \frac{\sigma_{T,k}^{\text{раст}}}{E_{T,k}} \left(1 - \frac{E_{T,k}}{E_k} \right)}{\left(1 - \frac{\langle E_T \rangle_P}{\langle E \rangle_P} \right)}, \quad \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_P = \langle E_T \rangle_P \frac{\sum_{k=1}^N \gamma_k \frac{\sigma_{T,k}^{\text{сж}}}{E_{T,k}} \left(1 - \frac{E_{T,k}}{E_k} \right)}{\left(1 - \frac{\langle E_T \rangle_P}{\langle E \rangle_P} \right)},$$

$$\langle \Gamma_I(t, \tau) \rangle_P = \langle E_T \rangle_P \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{E_{T,k}} \Gamma_k(t, \tau), \quad \langle \Gamma_{II}(t, \tau) \rangle_P = \langle E \rangle_P \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{E_k} \Gamma_k(t, \tau).$$

Очевидно, что выражение (19) содержит два формально разных ядра $\langle \Gamma_I(t, \tau) \rangle_P$, $\langle \Gamma_{II}(t, \tau) \rangle_P$. В реальных же конструкциях происходит усреднение скоростей деформаций. Поэтому в данной работе предложено использовать одно ядро, составленное по правилу смеси, исходя из относительной толщины слоев, вовлеченных в пластическую деформацию:

$$\begin{aligned} \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_P &\approx (1 - \mu) \langle \Gamma_I(t, \tau) \rangle_P + \mu \langle \Gamma_{II}(t, \tau) \rangle_P = \\ &= (1 - \mu) \langle E_T \rangle_P \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{E_{T,k}} \Gamma_k(t, \tau) + \mu \langle E \rangle_P \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{E_k} \Gamma_k(t, \tau), \end{aligned} \quad (20)$$

где $\mu = \frac{h_{\text{упр}}}{h} = 1 - \frac{\langle \rho \rangle_P}{h \langle E \rangle_P} \left(\langle \sigma_T^{\text{раст}} \rangle_P - \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_P \right)$ – относительная высота вязкоупругой деформации.

Из правила (20) очевидно, что при относительно малых пластических деформациях, когда $(1 - \mu) < 0,1$, следует пользоваться приближительным равенством $\langle \Gamma(t, \tau) \rangle_P \approx \langle \Gamma_{II}(t, \tau) \rangle_P$, что существенно ускорит определение напряженного состояния.

Преобразуя выражение (19) с учетом правила (20), получаем следующее уравнение для определения напряженного состояния по Рейссу:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_z(y, t) \rangle_P + \int_0^t \langle \sigma_z(y, \tau) \rangle_P \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_P d\tau = \\ = \begin{cases} \langle \sigma_T^{\text{раст}} \rangle_P \left(1 - \frac{\langle E_T \rangle_P}{\langle E \rangle_P} \right) + \langle E_T \rangle_P \frac{y - \langle \delta(t) \rangle_P}{\langle \rho(t) \rangle_P}, & \langle E \rangle_P \frac{y - \langle \delta(t) \rangle_P}{\langle \rho(t) \rangle_P} \geq \langle \sigma_T^{\text{раст}} \rangle_P, \\ \langle E \rangle_P \frac{y - \langle \delta(t) \rangle_P}{\langle \rho(t) \rangle_P}, & \langle \sigma_T^{\text{раст}} \rangle_P \geq \langle E \rangle_P \frac{y - \langle \delta(t) \rangle_P}{\langle \rho(t) \rangle_P} \geq \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_P, \\ \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_P \left(1 - \frac{\langle E_T \rangle_P}{\langle E \rangle_P} \right) + \langle E_T \rangle_P \frac{y - \langle \delta(t) \rangle_P}{\langle \rho(t) \rangle_P}, & \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_P \geq \langle E \rangle_P \frac{y - \langle \delta(t) \rangle_P}{\langle \rho(t) \rangle_P}. \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

Подставляя формулу (21) в первые два уравнения равновесия (4), можно получить систему, аналогичную системе (12), формально заменив $\langle E \rangle$, $\langle \sigma_T^{\text{раст}} \rangle$, $\langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle$, $\langle E_T \rangle$, $\langle \Gamma(t, \tau) \rangle$ на $\langle E \rangle_P$, $\langle \sigma_T^{\text{раст}} \rangle_P$, $\langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_P$, $\langle E_T \rangle_P$, $\langle \Gamma(t, \tau) \rangle_P$. Однако это не входит в цель данного исследования.

Вычисление эффективных параметров чистого изгиба призматического бруса при нелинейной ползучести. Следуя работе [4], исходя из формул (10) и (14), для рассматриваемой модели структурно-неоднородного призматического бруса постоянного поперечного сечения можно положить, что эффективное значение деформаций для композиционного бруса можно записать в виде смеси с параметром α , и исходя из выражений (13) и (21), можно получить следующее уравнение состояния для рассматриваемой модели структурно-неоднородного призматического бруса постоянного поперечного сечения:

$$\begin{aligned} \left[\alpha \langle \sigma_z(y, t) \rangle_\phi + (1 - \alpha) \langle \sigma_z(y, t) \rangle_P \right] + \alpha \int_0^t \langle \sigma_z(y, \tau) \rangle_\phi \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_\phi + \int_0^t (1 - \alpha) \langle \sigma_z(y, \tau) \rangle_P \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_P = \\ = \begin{cases} \langle \sigma_T^{\text{раст}} \rangle_\alpha \left(1 - \frac{\langle E_T \rangle_\alpha}{\langle E \rangle_\alpha} \right) + \langle E_T \rangle_\alpha \frac{y - \langle \delta(t) \rangle_{\alpha,1}}{\langle \rho(t) \rangle_{\alpha,1}}, & \langle E \rangle_\alpha \frac{y - \langle \delta(t) \rangle_{\alpha,1}}{\langle \rho(t) \rangle_{\alpha,1}} \geq \langle \sigma_T^{\text{раст}} \rangle_\alpha, \\ \langle E \rangle_\alpha \frac{y - \langle \delta(t) \rangle_\alpha}{\langle \rho(t) \rangle_\alpha}, & \langle \sigma_T^{\text{раст}} \rangle_\alpha \geq \langle E \rangle_\alpha \frac{y - \langle \delta(t) \rangle_{\alpha,0}}{\langle \rho(t) \rangle_{\alpha,0}} \geq \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_\alpha, \\ \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_\alpha \left(1 - \frac{\langle E_T \rangle_\alpha}{\langle E \rangle_\alpha} \right) + \langle E_T \rangle_\alpha \frac{y - \langle \delta(t) \rangle_{\alpha,1}}{\langle \rho(t) \rangle_{\alpha,1}}, & \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_\alpha \geq \langle E \rangle_\alpha \frac{y - \langle \delta(t) \rangle_{\alpha,1}}{\langle \rho(t) \rangle_{\alpha,1}}, \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned}
\langle E \rangle_\alpha &= \alpha \langle E \rangle_\Phi + (1-\alpha) \langle E \rangle_P, \\
\langle E_T \rangle_\alpha &= \alpha \langle E_T \rangle_\Phi + (1-\alpha) \langle E_T \rangle_P, \\
\langle \sigma_T^{\text{раст}} \rangle_\alpha &= \frac{\left(\alpha \left(1 - \frac{\langle E_T \rangle_\Phi}{\langle E \rangle_\Phi} \right) \langle \sigma_T^{\text{раст}} \rangle_\Phi + (1-\alpha) \left(1 - \frac{\langle E_T \rangle_P}{\langle E \rangle_P} \right) \langle \sigma_T^{\text{раст}} \rangle_P \right)}{\left(1 - \frac{\langle E_T \rangle_\alpha}{\langle E \rangle_\alpha} \right)}, \\
\langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_\alpha &= \frac{\left(\alpha \left(1 - \frac{\langle E_T \rangle_\Phi}{\langle E \rangle_\Phi} \right) \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_\Phi + (1-\alpha) \left(1 - \frac{\langle E_T \rangle_P}{\langle E \rangle_P} \right) \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_P \right)}{\left(1 - \frac{\langle E_T \rangle_\alpha}{\langle E \rangle_\alpha} \right)}, \\
\langle \delta(t) \rangle_{\alpha,0} &= \frac{\alpha \langle E \rangle_\Phi \langle \delta(t) \rangle_\Phi \langle \rho(t) \rangle_P + (1-\alpha) \langle E \rangle_P \langle \delta(t) \rangle_P \langle \rho(t) \rangle_\Phi}{\alpha \langle E \rangle_\Phi \langle \rho(t) \rangle_P + (1-\alpha) \langle E \rangle_P \langle \rho(t) \rangle_\Phi}, \\
\langle \rho(t) \rangle_{\alpha,0} &= \frac{\langle \rho(t) \rangle_\Phi \langle \rho(t) \rangle_P \langle E \rangle_\alpha}{\alpha \langle E \rangle_\Phi \langle \rho(t) \rangle_P + (1-\alpha) \langle E \rangle_P \langle \rho(t) \rangle_\Phi}, \\
\langle \delta(t) \rangle_{\alpha,1} &= \frac{\alpha \langle E_T \rangle_\Phi \langle \delta(t) \rangle_\Phi \langle \rho(t) \rangle_P + (1-\alpha) \langle E_T \rangle_P \langle \delta(t) \rangle_P \langle \rho(t) \rangle_\Phi}{\alpha \langle E_T \rangle_\Phi \langle \rho(t) \rangle_P + (1-\alpha) \langle E_T \rangle_P \langle \rho(t) \rangle_\Phi}, \\
\langle \rho(t) \rangle_{\alpha,1} &= \frac{\langle \rho(t) \rangle_\Phi \langle \rho(t) \rangle_P \langle E_T \rangle_\alpha}{\alpha \langle E_T \rangle_\Phi \langle \rho(t) \rangle_P + (1-\alpha) \langle E_T \rangle_P \langle \rho(t) \rangle_\Phi}.
\end{aligned}$$

Для решения упругопластической задачи для бруса должны существовать такие $\langle \delta(t) \rangle_\alpha^*$ и $\langle \rho(t) \rangle_\alpha^*$, что для них будут выполнены уравнения, аналогичные уравнениям (22):

$$\left[\alpha \langle \sigma_z(y,t) \rangle_\Phi^* + (1-\alpha) \langle \sigma_z(y,t) \rangle_P^* \right] + \alpha \int_0^t \langle \sigma_z(y,\tau) \rangle_\Phi^* \langle \Gamma(t,\tau) \rangle_\Phi + \int_0^t (1-\alpha) \langle \sigma_z(y,\tau) \rangle_P^* \langle \Gamma(t,\tau) \rangle_P =$$

$$= \begin{cases} \langle \sigma_T^{\text{раст}} \rangle_\alpha \left(1 - \frac{\langle E_T \rangle_\alpha}{\langle E \rangle_\alpha} \right) + \langle E_T \rangle_\alpha \frac{y - \langle \delta(t) \rangle_\alpha^*}{\langle \rho(t) \rangle_\alpha^*}, & \langle E \rangle_\alpha \frac{y - \langle \delta(t) \rangle_\alpha^*}{\langle \rho(t) \rangle_\alpha^*} \geq \langle \sigma_T^{\text{раст}} \rangle_\alpha, \\ \langle E \rangle_\alpha \frac{y - \langle \delta(t) \rangle_\alpha^*}{\langle \rho(t) \rangle_\alpha^*}, & \langle \sigma_T^{\text{раст}} \rangle_\alpha \geq \langle E \rangle_\alpha \frac{y - \langle \delta(t) \rangle_\alpha^*}{\langle \rho(t) \rangle_\alpha^*} \geq \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_\alpha, \\ \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_\alpha \left(1 - \frac{\langle E_T \rangle_\alpha}{\langle E \rangle_\alpha} \right) + \langle E_T \rangle_\alpha \frac{y - \langle \delta(t) \rangle_\alpha^*}{\langle \rho(t) \rangle_\alpha^*}, & \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_\alpha \geq \langle E \rangle_\alpha \frac{y - \langle \delta(t) \rangle_\alpha^*}{\langle \rho(t) \rangle_\alpha^*}. \end{cases} \quad (23)$$

При этом в соответствии с ранее изложенной процедурой для вычисления $\langle \delta(t) \rangle_\alpha^*$ и $\langle \rho(t) \rangle_\alpha^*$, исходя из формулы (23), необходимо воспользоваться уравнениями, аналогичными уравнениям (12), однако записанными в другом (безразмерном) виде:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{(\langle E \rangle_\alpha - \langle E_T \rangle_\alpha) h (\langle \sigma_T^{\text{пакт}} \rangle_\alpha + \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_\alpha)}{2 \langle E \rangle_\alpha \langle E_T \rangle_\alpha h} \langle \rho(t) \rangle_\alpha^* + \right. \\
& + \frac{(\langle E \rangle_\alpha - \langle E_T \rangle_\alpha) (\langle \sigma_T^{\text{пакт}} \rangle_\alpha - \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_\alpha)}{\langle E \rangle_\alpha \langle E_T \rangle_\alpha h} \langle \delta(t) \rangle_\alpha^* \langle \rho(t) \rangle_\alpha^* + \\
& \left. + \frac{(\langle E \rangle_\alpha - \langle E_T \rangle_\alpha) (\langle \sigma_T^{\text{пакт}} \rangle_\alpha^2 - \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_\alpha^2)}{2 \langle E \rangle_\alpha^2 \langle E_T \rangle_\alpha h} (\langle \rho(t) \rangle_\alpha^*)^2 \right) \frac{1}{\langle \delta(t) \rangle_\alpha^*} - 1 = 0, \\
& \left(\frac{\langle E_T \rangle_\alpha h^3}{12 \langle \rho(t) \rangle_\alpha^*} + \frac{(\langle E \rangle_\alpha - \langle E_T \rangle_\alpha) (\langle \sigma_T^{\text{пакт}} \rangle_\alpha - \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_\alpha)}{2 \langle E \rangle_\alpha} (\langle \delta(t) \rangle_\alpha^*)^2 + \right. \\
& + \frac{(\langle E \rangle_\alpha - \langle E_T \rangle_\alpha) (\langle \sigma_T^{\text{пакт}} \rangle_\alpha^2 - \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_\alpha^2)}{2 \langle E \rangle_\alpha^2} \langle \delta(t) \rangle_\alpha^* \langle \rho(t) \rangle_\alpha^* + \\
& + \frac{(\langle E \rangle_\alpha - \langle E_T \rangle_\alpha) (\langle \sigma_T^{\text{пакт}} \rangle_\alpha^3 - \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_\alpha^3)}{6 \langle E \rangle_\alpha^3} \langle \rho(t) \rangle_\alpha^{*2} - \\
& \left. - \frac{(\langle E \rangle_\alpha - \langle E_T \rangle_\alpha) h^2 (\langle \sigma_T^{\text{пакт}} \rangle_\alpha - \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_\alpha)}{8 \langle E \rangle_\alpha} \right) \times \\
& \times \frac{\Delta}{\left(M(t) + \int_0^t M(\tau) (\alpha \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_\phi + (1-\alpha) \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_P) d\tau \right)} - 1 = 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

Отметим, что в уравнениях (22) получены две вилки $(\langle \delta(t) \rangle_{\alpha,0}, \langle \delta(t) \rangle_{\alpha,1})$ и $(\langle \rho(t) \rangle_{\alpha,0}, \langle \rho(t) \rangle_{\alpha,1})$ для определения $\langle \delta(t) \rangle_\alpha^*$ и $\langle \rho(t) \rangle_\alpha^*$ соответственно. Тогда будем предполагать, что

$$\begin{aligned}
\langle \delta(t) \rangle_\alpha^* (\beta) &\approx \beta \langle \delta(t) \rangle_{\alpha,0} + (1-\beta) \langle \delta(t) \rangle_{\alpha,1}, \\
\langle \rho(t) \rangle_\alpha^* (\beta) &\approx \beta \langle \rho(t) \rangle_{\alpha,0} + (1-\beta) \langle \rho(t) \rangle_{\alpha,1}.
\end{aligned} \tag{25}$$

Следуя Хиллу [4], будем рассматривать случай, когда $\alpha = 1/2$, так как он представляет среднее по α на интервале $[0, 1]$. Подставляя выражения (25) в (24) и записывая очевидные условия минимизации среднеквадратичной ошибки удовлетворения (24) с помощью выбора β из условий (25), получаем

$$\left(\frac{(\langle E \rangle_\alpha - \langle E_T \rangle_\alpha) h (\langle \sigma_T^{\text{пакт}} \rangle_\alpha + \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_\alpha)}{2 \langle E \rangle_\alpha \langle E_T \rangle_\alpha h} \langle \rho(t) \rangle_\alpha^* (\beta) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\langle E \rangle_\alpha - \langle E_T \rangle_\alpha) (\langle \sigma_T^{\text{раст}} \rangle_\alpha - \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_\alpha)}{\langle E \rangle_\alpha \langle E_T \rangle_\alpha h} \langle \delta(t) \rangle_\alpha^* (\beta) \langle \rho(t) \rangle_\alpha^* (\beta) + \\
& + \frac{(\langle E \rangle_\alpha - \langle E_T \rangle_\alpha) (\langle \sigma_T^{\text{раст}} \rangle_\alpha^2 - \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_\alpha^2)}{2 \langle E \rangle_\alpha^2 \langle E_T \rangle_\alpha h} \left(\langle \rho(t) \rangle_\alpha^* (\beta) \right)^2 \left. \frac{1}{\langle \delta(t) \rangle_\alpha^* (\beta)} - 1 \right)^2 + \\
& + \left(\left(\frac{\langle E_T \rangle_\alpha h^3}{12 \langle \rho(t) \rangle_\alpha^* (\beta)} + \frac{(\langle E \rangle_\alpha - \langle E_T \rangle_\alpha) (\langle \sigma_T^{\text{раст}} \rangle_\alpha - \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_\alpha)}{2 \langle E \rangle_\alpha} \right) \langle \delta(t) \rangle_\alpha^* (\beta) \right)^2 + \\
& + \frac{(\langle E \rangle_\alpha - \langle E_T \rangle_\alpha) (\langle \sigma_T^{\text{раст}} \rangle_\alpha^2 - \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_\alpha^2)}{2 \langle E \rangle_\alpha^2} \langle \delta(t) \rangle_\alpha^* (\beta) \langle \rho(t) \rangle_\alpha^* (\beta) + \\
& + \frac{(\langle E \rangle_\alpha - \langle E_T \rangle_\alpha) (\langle \sigma_T^{\text{раст}} \rangle_\alpha^3 - \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_\alpha^3)}{6 \langle E \rangle_\alpha^3} \left(\langle \rho(t) \rangle_\alpha^* (\beta) \right)^2 - \\
& - \frac{(\langle E \rangle_\alpha - \langle E_T \rangle_\alpha) h^2 (\langle \sigma_T^{\text{раст}} \rangle_\alpha - \langle \sigma_T^{\text{сж}} \rangle_\alpha)}{8 \langle E \rangle_\alpha} \left. \times \right. \\
& \left. \times \frac{\Delta}{\left(M(t) + \int_0^t M(\tau) (\alpha \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_\phi + (1-\alpha) \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_p) d\tau \right)} - 1 \right)^2 \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

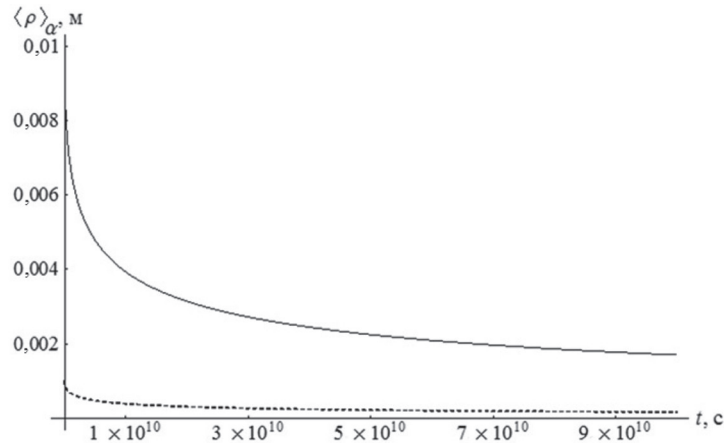


Рис. 3. Зависимость радиуса кривизны бруса из композиционного двухкомпонентного материала от времени при изгибающих моментах $M_1 = 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}$ (сплошная линия) и $M_2 = 10^7 \text{ Н} \cdot \text{м}$ (штриховая линия) ($\gamma_1 = 0,2$, $\gamma_2 = 0,8$, $h = 0,1 \text{ м}$, $\Delta = 0,01 \text{ м}$, $E_1 = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $E_2 = 1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $E_{T,1} = 8 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $E_{T,2} = 4 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $\sigma_{T,1}^{\text{раст}} = 8 \cdot 10^8 \text{ Па}$, $\sigma_{T,2}^{\text{раст}} = 4 \cdot 10^7 \text{ Па}$, $\sigma_{T,1}^{\text{сж}} = -5 \cdot 10^7 \text{ Па}$, $\sigma_{T,2}^{\text{сж}} = -7 \cdot 10^8 \text{ Па}$, $\Gamma_1(t) = 0$, $\Gamma_2(t) = \frac{10^{-5}}{\sqrt{t}}$)

При проведении вычислительного эксперимента (рис. 3) относительная точность удовлетворения уравнений (24) составляла значения не хуже чем 0,003, что считается достаточной вычислительной точностью для прикладных расчетов.

Заключение. Впервые предлагается обобщение теории чистого изгиба однородного призматического бруса постоянной толщины и высоты на случай нелинейной ползучести горизонтально-слоистого и композиционного бруса.

Вычислены усредненные по Фойгту и Рейссу значения реологических параметров композиционного бруса в случае нелинейной ползучести при чистом изгибе.

Определены эффективные значения реологических параметров, радиуса кривизны нейтрального слоя, а также положение слоя изгибаемого бруса. Установлено, что радиус кривизны изгибаемого бруса существенно зависит не только от концентраций компонент в композиционном материале бруса, но и от времени действия нагрузки (рис. 3).

Если перейти к рассмотрению мгновенных значений модуля упругости $E(t)$, предел текучести при растяжении $\sigma_T^{\text{раст}}(t)$, предел текучести при сжатии $\sigma_T^{\text{сж}}(t)$, касательный модуль пластичности $E_T(t)$, структура уравнений (3), (6), (9), (12), (13), (21) и (22) не меняются, однако это даст возможность рассмотреть старение при чистом изгибе однородных, слоистых или композиционных материалов, обладающих свойством нелинейной ползучести (в частности, при высоких температурах).

Литература

1. Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Яровая А. В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. М., 2005.
2. Кравчук А. С., Чигарев А. В. Механика контактного взаимодействия тел с круговыми границами. Мн., 2000.
3. Филин А. П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Т 2: Сопротивление материалов с элементами теории сплошных сред и строительной механики. М., 1978.
4. Кравчук А. С., Томило Е. В. // Механика машин, механизмов и материалов. 2014. № 3 (28). С. 48–52.

A. S. KRAVCHUK, Ya. V. TAMILA, I. A. TARASYUK

NON-LINEAR CREEP OF LAYERED AND COMPOSITE PRISMATIC BEAMS UNDER PURE BENDING

Summary

The problem of nonlinear creep of prismatic laminate and composite beam of constant thickness and height at pure bending was first solved for the first time. The hereditary creep theory was used. Non-linearity was modeled by a piecewise linear Prandtl graph. The averaged Voigt and Reuss values of deformation of the composite beam in pure bending were calculated. The effective value of elastic modulus, yield stress and plastic modulus, as well as efficient kernel of material creep of bending beam were determined.