

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА MATHEMATICS

УДК 512.542
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-3-183-192>

Поступила в редакцию 29.06.2026
Received 29.06.2026

С. В. Балычев, В. И. Мурашко

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель, Республика Беларусь

ПРОИЗВЕДЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С УСЛОВИЯМИ ФОРМАЦИОННОЙ СУБНОРМАЛЬНОСТИ НА ПОДГРУППЫ ФАКТОРОВ

Аннотация. Установлена связь между решением проблемы Шеметкова о Z -насыщенных формациях и изучением классов групп, определяемых системами формационно субнормальных подгрупп. Найден критерий разрешимой насыщенности сверхрадикальной формации. Доказана сверхрадикальность наследственных $\tilde{S}$ -формаций. Описаны все наследственные формации разрешимых групп $\mathfrak{F}$, содержащие всякую группу, представленную в произведении своих подгрупп, все $\mathfrak{H}$ -подгруппы которых $\mathfrak{F}$ -субнормальны (K - $\mathfrak{F}$ -субнормальны), где $\mathfrak{H}$ – насыщенный гомоморф.

Ключевые слова: конечная группа, сверхрадикальная формация, Z -насыщенная формация, $\tilde{S}$ -формация, мультифакторизуемая группа, $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа, K - $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа

Для цитирования. Балычев, С. В. Произведения конечных групп с условиями формационной субнормальности на подгруппы факторов / С. В. Балычев, В. И. Мурашко // Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2026. – Т. 62, № 3. – С. 183–192. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-3-183-192>

Sergey V. Balychev, Viachaslau I. Murashka

Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Republic of Belarus

PRODUCTS OF FINITE GROUPS WITH CONDITIONS OF FORMATION SUBNORMALITY ON SUBGROUPS OF FACTORS

Abstract. The connection between the solution of Shemetkov's problem on Z -saturated formations and the study of classes of groups defined by systems of formation subnormal subgroups was established. A criterion for a superradical formation to be solvably saturated was found. The superradicality of hereditary $\tilde{S}$ -formations was proved. All hereditary formations $\mathfrak{F}$ of solvable groups that contain every group representable as a product of its subgroups, all $\mathfrak{H}$ -subgroups of which are $\mathfrak{F}$ -subnormal (or K - $\mathfrak{F}$ -subnormal), where $\mathfrak{H}$ is a saturated homomorph, were described.

Keywords: finite group, superradical formation, Z -saturated formation, $\tilde{S}$ -formation, multifactorized group, $\mathfrak{F}$ -subnormal subgroup, K - $\mathfrak{F}$ -subnormal subgroup

For citation. Balychev S. V., Murashka V. I. Products of finite groups with conditions of formation subnormality on subgroups of factors. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2026, vol. 62, no. 3, pp. 183–192 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-3-183-192>

Введение и основные результаты. Рассматриваются только конечные группы. Один из классических подходов к исследованию строения группы заключается в анализе ее действия на своих главных факторах. Данный метод тесно связан с такими важными классами групп, как классы всех нильпотентных, разрешимых, сверхразрешимых и квазинильпотентных групп. Первые три класса являются примерами локальных формаций, а четвертый – композиционной (бэр-локальной) формацией. Описанию данных семейств формаций и их свойств посвящены, например, монографии [1–5]. Отметим, что класс разрешимых групп, ранги главных факторов которых не превосходят натуральное число $n \geq 2$, хотя и определяется с помощью действия группы на главных факторах, но не принадлежит указанным семействам формаций [6, теорема 6].

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп. Напомним [1, с. 127–128], что главный фактор H/K группы G называется $\mathfrak{F}$ -центральным, если $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{F}$. Согласно теореме Барнса – Кегеля [2, гл. IV, предложение 1.5], если $\mathfrak{F}$ – формация и $G \in \mathfrak{F}$, то все главные факторы G являются $\mathfrak{F}$ -центральными, однако обратное утверждение не всегда верно. В связи с вышеизложенным Л. А. Шеметковым была поставлена следующая проблема.

Проблема 1 [7, вопрос 4.1]. *Описать семейство формаций $\mathfrak{F}$, содержащих всякую группу, у которой все главные факторы $\mathfrak{F}$ -центральны.*

Решению данной проблемы посвящены работы [6; 8]. В частности, такие формации называются Z -насыщенными [6]. Важным шагом в решении данной проблемы является описание отдельных семейств Z -насыщенных формаций и их приложений при изучении строения групп.

В ряде исследований (см., напр., [9–15]) изучались классы групп, определяемые системами формационно субнормальных подгрупп. Напомним следующие известные определения формационной субнормальности (см., напр., [3; 4]).

Определение. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Подгруппа H группы G называется:

(1) $\mathfrak{F}$ -субнормальной в G , если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$ для $i \in \{1, \dots, n\}$. Обозначается $H \mathfrak{F}$ -sn G .

(2) K - $\mathfrak{F}$ -субнормальной в G , если существует цепь подгрупп $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = G$ такая, что либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$, либо $H_i^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$. Обозначается $H K$ - $\mathfrak{F}$ -sn G .

Отметим, что важную роль в ряде указанных работ играют классы $w\mathfrak{F}$ и $v\mathfrak{F}$ групп, у которых всякая силовская [10; 14] и всякая циклическая примарная [11] подгруппа $\mathfrak{F}$ -субнормальна. При определении этих классов мы считаем единичную подгруппу и силовской, и циклической примарной. Тот факт, что для наследственной формации $\mathfrak{F}$ классы $w\mathfrak{F}$ и $v\mathfrak{F}$ являются Z -насыщенными формациями, использовался для доказательства основных результатов в [16; 17]. Связь классов групп, определяемых системами формационно субнормальных подгрупп, с решением проблемы 1 устанавливает следующий результат.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{H}$ – насыщенный гомоморф и $\mathfrak{F}$ – наследственная формация. Если $\mathfrak{F}$ содержит всякую группу, все $\mathfrak{H}$ -подгруппы которой $\mathfrak{F}$ -субнормальны (K - $\mathfrak{F}$ -субнормальны), то $\mathfrak{F}$ – Z -насыщенная формация.

Известной задачей, связанной с $\mathfrak{F}$ -субнормальностью, является задача 14.99 из [18] о сверхрадикальных формациях: а) найти все локальные сверхрадикальные формации; б) доказать, что всякая наследственная сверхрадикальная формация является разрешимо насыщенной формацией. Отрицательный ответ на вопрос пункта б) был получен в [12], а полный ответ на вопрос пункта а) до сих пор неизвестен (ряд таких формаций описан в [13]). Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ называется *сверхрадикальной*, если она нормально наследственна и содержит каждую группу $G = AB$, где A и B – $\mathfrak{F}$ -субнормальные $\mathfrak{F}$ -подгруппы.

Естественным является вопрос: при каких условиях на наследственную сверхрадикальную формацию она будет разрешимо насыщена. Используя методы работы [6], можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. Верны следующие утверждения:

(1) непустая наследственная сверхрадикальная формация разрешимо насыщена тогда и только тогда, когда она Z -насыщена;

(2) непустая наследственная формация $\mathfrak{F}$, замкнутая относительно взятия произведений K - $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп, разрешимо насыщена тогда и только тогда, когда она Z -насыщена.

Заметим, что если $\mathfrak{F}$ – наследственная формация и $G = AB$, где A и B – $\mathfrak{F}$ -субнормальные $\mathfrak{F}$ -подгруппы, то все подгруппы из A и B также $\mathfrak{F}$ -субнормальны в G . Данное утверждение приводит к естественному условию разрешимой насыщенности сверхрадикальной формации.

Следствие 1. Если наследственная сверхрадикальная формация $\mathfrak{F}$ содержит всякую группу, все подгруппы которой $\mathfrak{F}$ -субнормальны, то она разрешимо насыщена.

Дальнейшая часть работы посвящена изучению следующего подсемейства разрешимо насыщенных формаций.

Следствие 2. Пусть $\mathfrak{H}$ – насыщенный гомоморф и $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, содержащая всякую группу G , являющуюся произведением попарно перестановочных подгрупп $A_1, A_2, \dots, A_n$, все $\mathfrak{H}$ -подгруппы которых являются $\mathfrak{F}$ -субнормальными (K - $\mathfrak{F}$ -субнормальными) в G . Тогда $\mathfrak{F}$ – разрешимо насыщенная формация.

Напомним [19] (см. также [1; 3; 4]), что формацией Шеметкова (кратко $\tilde{S}$ -формацией) называется формация $\mathfrak{F}$, у которой все минимальные не $\mathfrak{F}$ -группы являются или группами Шмидта, или группами простого порядка.

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{H}$ – насыщенный гомоморф, содержащий все циклические примарные группы, и $\mathfrak{F}$ – наследственная $\tilde{S}$ -формация.

(1) Если группа G является произведением попарно перестановочных подгрупп $A_1, A_2, \dots, A_n$ и все $\mathfrak{H}$ -подгруппы из A_i являются $\mathfrak{F}$ -субнормальными в G для любого i , то $G \in \mathfrak{F}$.

(2) Если группа G является произведением попарно перестановочных подгрупп $A_1, A_2, \dots, A_n$, все $\mathfrak{H}$ -подгруппы из A_i являются K - $\mathfrak{F}$ -субнормальными в G для любого i и $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Известны примеры [20; 21] ненасыщенных (нелокальных) $\tilde{S}$ -формаций. Из предыдущей теоремы следует сверхрадикальность наследственных $\tilde{S}$ -формаций.

Следствие 3. Наследственная $\tilde{S}$ -формация является сверхрадикальной.

Следствие 4. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная $\tilde{S}$ -формация. Если $G = AB$, где A, B – K - $\mathfrak{F}$ -субнормальные $\mathfrak{F}$ -подгруппы, то $G \in \mathfrak{F}$.

Известно [22], что в классе всех разрешимых групп наследственные сверхрадикальные формации совпадают с наследственными $\tilde{S}$ -формациями. Нами получены новые характеристики таких формаций.

Теорема 4. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная формация разрешимых групп и $\mathfrak{H}$ – насыщенный гомоморф, содержащий все циклические примарные группы. Верны следующие утверждения:

(1) тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ содержит всякую группу G , представленную в произведении попарно перестановочных подгрупп $A_1, \dots, A_n$ таких, что все $\mathfrak{H}$ -подгруппы A_i являются $\mathfrak{F}$ -субнормальными в G для любого $i \in \{1, \dots, n\}$, когда $\mathfrak{F}$ является $\tilde{S}$ -формацией в $\mathfrak{S}$;

(2) тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ содержит всякую $\pi(\mathfrak{F})$ -группу G , представленную в произведении попарно перестановочных подгрупп $A_1, \dots, A_n$ таких, что все $\mathfrak{H}$ -подгруппы A_i являются K - $\mathfrak{F}$ -субнормальными в G для любого $i \in \{1, \dots, n\}$, когда $\mathfrak{F}$ является $\tilde{S}$ -формацией в $\mathfrak{S}$.

Из данной теоремы при $n = 2$ вытекает один из основных результатов [11].

Следствие 5 ([11, теорема F]). Для разрешимой наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$ следующие условия эквивалентны:

(1) $\mathfrak{F}$ содержит всякую группу $G = AB$, где все циклические примарные подгруппы подгрупп A и B $\mathfrak{F}$ -субнормальны в G ;

(2) $\mathfrak{F}$ – $\tilde{S}$ -формация в $\mathfrak{S}$.

Предварительные сведения. Используются стандартные обозначения и терминология, которые, если необходимо, могут быть найдены в [1; 2; 5]. Напомним некоторые из них. Через Z_n обозначается циклическая группа порядка n , $\pi(G)$ – множество простых делителей порядка группы G , $\pi(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{F}} \pi(G)$.

Напомним, что классом групп [5, определение 1.1] называется всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G ; класс групп $\mathfrak{F}$ называется гомоморфом, если $G/N \in \mathfrak{F}$ для любых $N \trianglelefteq G \in \mathfrak{F}$; гомоморф $\mathfrak{F}$ называется формацией, если из $H/A \in \mathfrak{F}$, $H/B \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $H/(A \cap B) \in \mathfrak{F}$. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется: наследственным, если $\mathfrak{F}$ вместе с каждой группой содержит всякую ее подгруппу; насыщенным, если из $G/N \in \mathfrak{F}$ и $N \leq \Phi(G)$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. $\mathfrak{F}$ -корадикалом группы G для формации $\mathfrak{F}$ называется наименьшая нормальная подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ группы G , факторгруппа по которой принадлежит $\mathfrak{F}$. Через $\mathfrak{S}$ обозначается класс разрешимых групп.

Следующие известные леммы играют важную роль в доказательстве основных результатов работы.

Лемма 1 ([3; 4]). Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, H и R – подгруппы группы G и $N \trianglelefteq G$.

(1) Если $H \mathfrak{F}$ -sn G (H K - $\mathfrak{F}$ -sn G), то $HN/N \mathfrak{F}$ -sn G/N (HN/N K - $\mathfrak{F}$ -sn G/N).

(2) Если $H/N \mathfrak{F}\text{-sn } G/N$ ($H/N K\text{-}\mathfrak{F}\text{-sn } G/N$), то $H \mathfrak{F}\text{-sn } G$ ($H K\text{-}\mathfrak{F}\text{-sn } G$).

(3) Если $H \mathfrak{F}\text{-sn } G$ ($H K\text{-}\mathfrak{F}\text{-sn } G$), то $HN \mathfrak{F}\text{-sn } G$ ($HN K\text{-}\mathfrak{F}\text{-sn } G$).

(4) Если $H \mathfrak{F}\text{-sn } R$ и $R \mathfrak{F}\text{-sn } G$ ($H K\text{-}\mathfrak{F}\text{-sn } R$ и $R K\text{-}\mathfrak{F}\text{-sn } G$), то $H \mathfrak{F}\text{-sn } G$ ($H K\text{-}\mathfrak{F}\text{-sn } G$).

Лемма 2 ([3; 4]). Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, H и R – подгруппы группы G .

(1) Если $H \mathfrak{F}\text{-sn } G$ ($H K\text{-}\mathfrak{F}\text{-sn } G$), $H \mathfrak{F}\text{-sn } G$ то $H \cap R \mathfrak{F}\text{-sn } R$ ($H \cap R K\text{-}\mathfrak{F}\text{-sn } R$).

(2) Если $H \mathfrak{F}\text{-sn } G$ и $R \mathfrak{F}\text{-sn } G$ ($H K\text{-}\mathfrak{F}\text{-sn } G$ и $R K\text{-}\mathfrak{F}\text{-sn } G$), то $H \cap R \mathfrak{F}\text{-sn } G$ ($H \cap R K\text{-}\mathfrak{F}\text{-sn } G$).

Доказательство теоремы 1. Предположим, что формация $\mathfrak{F}$ не является Z -насыщенной. Тогда класс $Z\mathfrak{F}$ является наследственной формацией по [6, теорема 1] и [9, лемма 2.4]. Выберем группу G наименьшего порядка из $Z\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда всякая подгруппа и факторгруппа группы G принадлежат $\mathfrak{F}$. В силу того, что $\mathfrak{F}$ является формацией, в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N . Если N неабелева, то $G/C_G(N) \cong G$. Из $N \rtimes (G/C_G(N)) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$, противоречие. Итак, N – абелева группа. Если G примитивна, то $G \cong N \rtimes G/C_G(N) \in \mathfrak{F}$, противоречие. Значит, G не является примитивной группой. Тогда $N \leq \Phi(G)$. Заметим, что если $G \in \mathfrak{H}$, то $G \mathfrak{F}\text{-sn } G$. Пусть H – собственная $\mathfrak{H}$ -подгруппа группы G . Тогда $NH < G$. Значит, $HN \in \mathfrak{F}$, т. е. $H \mathfrak{F}\text{-sn } HN$. Из $HN/N \cong H/(H \cap N) \in \mathfrak{H}$ и $G/N \in \mathfrak{F}$ следует, что $HN/N \mathfrak{F}\text{-sn } G/N$. Следовательно, $HN \mathfrak{F}\text{-sn } G$ и, значит, $H \mathfrak{F}\text{-sn } G$ по лемме 1. Итак, $G \in \mathfrak{F}$, заключительное противоречие.

Случай, когда $\mathfrak{F}$ содержит всякую группу, все $\mathfrak{H}$ -подгруппы которой $K\text{-}\mathfrak{F}$ -субнормальны, рассматривается абсолютно аналогично. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2 и ее следствий. Заметим, если группа $G = AB$, где A и B – нормальные $\mathfrak{F}$ -подгруппы G , то все композиционные факторы группы G принадлежат $\mathfrak{F}$. В силу наследственности $\mathfrak{F}$ A и B являются $\mathfrak{F}$ -субнормальными подгруппами G . Заметим также, что всякая нормальная подгруппа является также и $K\text{-}\mathfrak{F}$ -субнормальной. Итак, формации, подпадающие под случаи (1) и (2) теоремы, являются наследственными формациями Фиттинга. Как вытекает из [6, следствие 2], наследственная формация Фиттинга композиционна тогда и только тогда, когда она Z -насыщенна. Доказательство теоремы завершает тот факт, что непустая формация композиционна тогда и только тогда, когда она разрешимо насыщенна [2, гл. IV, теорема 4.17].

Докажем следствие 1. Предположим, что наследственная сверхрадикальная формация $\mathfrak{F}$ содержит всякую группу, все подгруппы которой $\mathfrak{F}$ -субнормальны. То есть $\mathfrak{F}$ содержит всякую группу, все $\mathfrak{H}$ -подгруппы которой $\mathfrak{F}$ -субнормальны, где $\mathfrak{H}$ – класс всех групп. Тогда $1 \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ – Z -насыщенная формация по теореме 1. Итак, следствие 1 напрямую вытекает из теоремы 2.

Докажем следствие 2. Заметим, что из условия при $n = 1$ следует, что $\mathfrak{F}$ содержит всякую группу, все $\mathfrak{H}$ -подгруппы которой являются $\mathfrak{F}$ -субнормальными ($K\text{-}\mathfrak{F}$ -субнормальными) в G . Тогда $\mathfrak{F}$ – Z -насыщенная формация по теореме 1. Пусть группа $G = AB$, где A и B – $\mathfrak{F}$ -субнормальные (соответственно $K\text{-}\mathfrak{F}$ -субнормальные) $\mathfrak{F}$ -подгруппы G . Тогда все $\mathfrak{H}$ -подгруппы групп A и B $\mathfrak{F}$ -субнормальны (соответственно $K\text{-}\mathfrak{F}$ -субнормальны) в G . То есть $G \in \mathfrak{F}$ по условию при $n = 2$. Итак, следствие 2 напрямую вытекает из теоремы 2.

Доказательство теоремы 3 и ее следствий. Для доказательства нам потребуется

Утверждение. Пусть $\mathfrak{F}$ – Z -насыщенная наследственная формация и группа $G = AB$, где A – $\mathfrak{F}$ -подгруппа группы G , а B – элементарная нормальная подгруппа группы G . Тогда $G \in \mathfrak{F}$, если выполняется одно из следующих условий:

(1) A – $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа G ;

(2) A – $K\text{-}\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа G и $B \in \mathfrak{F}$.

Доказательство. Пусть группа G – контрпример наименьшего порядка. Если N – нормальная подгруппа группы G и $N \neq 1$, то условие утверждения верно для группы G/N по лемме 1. В силу нашего предположения $G/N \in \mathfrak{F}$. Тогда, если G имеет две различные минимальные нормальные подгруппы, то $G \in \mathfrak{F}$, противоречие. Итак, в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N . Тогда $N \leq B$. Из $G/N \in \mathfrak{F}$ следует, что N является $\mathfrak{F}$ -корадикалом группы G .

Тогда в силу $\mathfrak{F}$ -субнормальности A найдется собственная подгруппа M группы G , содержащая N и A , для (1). В случае (2), в силу $K\text{-}\mathfrak{F}$ -субнормальности A , найдется или собственная нор-

мальная подгруппа группы G , содержащая A , или собственная подгруппа группы G , содержащая A , и $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G . То есть $NA < G$ во всех указанных случаях.

Итак, $NA < G$. Заметим, что $A \mathfrak{F}$ -sn AN для (1) и A K - $\mathfrak{F}$ -sn AN для (2) по лемме 2. Заметим также, что N – элементарная нормальная подгруппа в AN и для (2) она принадлежит $\mathfrak{F}$. Тогда $AN \in \mathfrak{F}$ по нашему предположению.

В силу того, что $N \subset B$ и обе подгруппы элементарны, следует, что $B = NC_B(N)$. Тогда $G = (AN)C_G(N)$. Значит, всякий главный фактор AN , лежащий ниже N , является и главным фактором в G . То есть N – главный фактор в AN . Значит, $T = AN \rtimes (AN / C_{AN}(N)) \cong N \rtimes (G / C_G(N))$.

В силу Z -насыщенности $\mathfrak{F}$ и $AN \in \mathfrak{F}$ имеем $T \in \mathfrak{F}$. То есть N – $\mathfrak{F}$ -центральный фактор G . Из $G / N \in \mathfrak{F}$ и Z -насыщенности $\mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$, заключительное противоречие. Утверждение доказано.

Лемма 3. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная $\tilde{S}$ -формация. Тогда $\mathfrak{F}$ содержит всякую $\pi(\mathfrak{F})$ -группу, у которой каждая циклическая примарная подгруппа K - $\mathfrak{F}$ -субнормальна.

Доказательство. Пусть все циклические примарные подгруппы $\pi(\mathfrak{F})$ -группы G являются K - $\mathfrak{F}$ -субнормальными. Тогда все простые секции группы G принадлежат $\mathfrak{F}$ по [11, леммы 3.1 и 3.2]. То есть всякая K - $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа G является $\mathfrak{F}$ -субнормальной. Итак, $G \in \mathfrak{F}$ по [15, следствие 3.9]. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, $G = CN$, где C – циклическая примарная K - $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа G , а N – произведение изоморфных простых неабелевых групп. Если $N \notin \mathfrak{F}$, то $C \leq C_G(N)$.

Доказательство. Согласно [2, гл. А, теорема 11.6], N – прямое произведение минимальных нормальных подгрупп N_i группы G . Тогда C K - $\mathfrak{F}$ -sn CN_i для любого i по лемме 2. В силу определения K - $\mathfrak{F}$ -субнормальности имеем два возможных случая.

1) C содержится в $M_i < CN_i$, где $CN_i / (M_i)_{CN_i} \in \mathfrak{F}$. Тогда и $N_i < M$. Итак, $CN_i < M < CN_i$, противоречие. Значит, данный случай невозможен.

2) C содержится в $M_i < CN_i$, где $M_i \trianglelefteq CN_i$. Заметим, что $N_i \not\trianglelefteq M_i$ и N_i является минимальной нормальной подгруппой группы CN_i . Значит, $N_i \cap M = 1$. То есть $CN_i = N_i \times M$. Тогда $C \leq M_i \leq C_G(N_i)$.

Значит, $C \leq C_G(N_i)$ для любого i . Итак, $C \leq C_G(N)$. Лемма доказана.

Теорему 3 достаточно доказать для случая, когда $\mathfrak{F}$ совпадает с классом всех циклических примарных групп. Так как $\mathfrak{F}$ – $\tilde{S}$ -формация, то $\mathfrak{F} \neq \emptyset$. Пусть группа G – контрпример наименьшего порядка к теореме 3. Тогда G – произведение попарно перестановочных подгрупп $A_1, A_2, \dots, A_n$ таких, что все их циклические примарные подгруппы $\mathfrak{F}$ -субнормальны в G для случая (1) и K - $\mathfrak{F}$ -субнормальны в G для случая (2). Заметим также, что G – $\pi(\mathfrak{F})$ -группа в обоих случаях. Из [15, следствие 3.9] вытекает, что $n > 1$ для случая (1), а из леммы 3 следует, что $n > 1$ для случая (2).

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа G . Заметим, что для любой циклической примарной подгруппы B/N группы $A_i N / N$ найдется циклическая примарная подгруппа C группы A_i такая, что $B/N = CN/N$. Тогда $B / N \mathfrak{F}$ -sn G / N по лемме 1. Значит, G/N удовлетворяет условию теоремы. Так как $1 \in \mathfrak{F}$, то $|G / N| < |G|$. Значит, $G / N \in \mathfrak{F}$ в силу нашего предположения. Из нашего предположения и того, что $\mathfrak{F}$ является формацией, следует, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа G . В силу леммы 2 все циклические примарные подгруппы A_i являются $\mathfrak{F}$ -субнормальными в A_i для случая (1) и K - $\mathfrak{F}$ -субнормальными в A_i для случая (2). Значит, $A_i \in \mathfrak{F}$ по вышеизложенному.

В случае (1), так как $1 \mathfrak{F}$ -sn G и $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то $N \in \mathfrak{F}$. Докажем, что $N \in \mathfrak{F}$ и в случае (2). Заметим, что если N абелева, то $N \in \mathfrak{F}$ в силу наследственности $\mathfrak{F}$ и $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Пусть N неабелева. Предположим, что $N \notin \mathfrak{F}$. Заметим, что C K - $\mathfrak{F}$ -sn CN для любой циклической примарной подгруппы C группы A_j для любого j . Тогда $C \leq C_G(N)$ по лемме 4. Следовательно, $N \leq G \leq G_G(N)$, противоречие. Итак, $N \in \mathfrak{F}$.

Пусть $B_i = A_i N$. Предположим, что $B_i \notin \mathfrak{F}$. Тогда в ней найдется минимальная не $\mathfrak{F}$ -группа S . Из $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ следует, что S – группа Шмидта. Заметим, что $S = PQ$, где P – нормальная силовская подгруппа, а Q – циклическая группа [5, теорема 26.1]. Заметим, что $S / (N \cap S) \cong SN / N \leq A_i N / N \cong A_i / (A_i \cap N) \in \mathfrak{F}$. Следовательно, SN/N – циклическая примар-

ная группа. То есть найдется циклическая примарная подгруппа M из A_i такая, что $SN = MN$. Заметим, что M $\mathfrak{F}$ -субнормальна в SN для случая (1) и M K - $\mathfrak{F}$ -субнормальна в SN для случая (2) по лемме 2, а $N \in \mathfrak{F}$ – элементарная нормальная подгруппа SN . Тогда $SN \in \mathfrak{F}$ по утверждению. В силу наследственности $\mathfrak{F}$ получаем $S \in \mathfrak{F}$, противоречие. Итак, $B_i \in \mathfrak{F}$ для любого i .

Так как $G \notin \mathfrak{F}$ и $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$, то в G найдется группа Шмидта $S \notin \mathfrak{F}$. Заметим, что $S = PQ$, где P – нормальная силовская подгруппа S , а Q – циклическая q -группа [5, теорема 26.1]. В силу разрешимой насыщенности $\mathfrak{F}$ (см., напр., [3, следствие 2.4.3]) все (p,q) -группы Шмидта (т. е. $\{p,q\}$ -группы Шмидта с нормальной силовской p -подгруппой) не принадлежат $\mathfrak{F}$. Из $G/N \in \mathfrak{F}$ следует, что $SN/N \simeq S/(S \cap N) \in \mathfrak{F}$. То есть $P \leq S \cap N \leq N$. Пусть P_0 – силовская p -подгруппа N , содержащая P .

Пусть $D_i = \prod_{j=1}^i B_j$. В силу $N \trianglelefteq G$ и условия теоремы D_i является подгруппой G . Предположим, что D_i не содержит (p,q) -групп Шмидта для некоторого i (это верно для $i = 1$ в силу $D_1 = B_1 \in \mathfrak{F}$). Докажем, что D_{i+1} также не содержит (p,q) -групп Шмидта. Не теряя общности рассуждения, предположим, что $S \leq D_{i+1}$.

Пусть Q_1 – силовская q -подгруппа D_{i+1} , содержащая Q . Тогда по [5, лемма 11.6] найдутся $x \in D_{i+1}$ и силовские подгруппы Q_2 и Q_3 групп D_i^x и B_{i+1}^x такие, что $Q_1 = Q_2Q_3$. По лемме Фраттини $NQ_j = NN_{NQ_j}(P_0)$, где $j \in \{2, 3\}$. Тогда $NQ_j = NQ_{j+2}$ для некоторой силовской q -подгруппы Q_{j+2} группы $NN_{NQ_j}(P_0)$, где $j \in \{2, 3\}$. Заметим, что P_0Q_4 и P_0Q_5 – p -замкнутые группы, не содержащие (p,q) -групп Шмидта. Тогда P_0Q_4 и P_0Q_5 нильпотентны. То есть $Q_4, Q_5 \leq C_G(P_0)$. Итак,

$$NQ_1 = NQ_2Q_3 = NQ_4Q_5 \leq NC_G(P).$$

Тогда $S \leq NQ$ не содержит (p,q) -групп Шмидта по [23, лемма 5], противоречие.

Итак, D_i не содержит (p,q) -групп Шмидта для любого i , и, следовательно, G не содержит таких подгрупп, заключительное противоречие. Теорема доказана.

Следствия 3 и 4 вытекают из теоремы 3, когда $\mathfrak{H}$ – класс всех групп и $n = 2$.

Доказательство теоремы 4. Предположим, что $\mathfrak{F}$ содержит всякую группу G , представленную в произведение попарно перестановочных подгрупп $A_1, \dots, A_n$ таких, что все $\mathfrak{H}$ -подгруппы A_i являются $\mathfrak{F}$ -субнормальными в G для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ для случая (1) и $\mathfrak{F}$ содержит всякую $\pi(\mathfrak{F})$ -группу G , представленную в произведение попарно перестановочных подгрупп $A_1, \dots, A_n$ таких, что все $\mathfrak{H}$ -подгруппы A_i являются K - $\mathfrak{F}$ -субнормальными в G для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ для случая (2). Докажем, что $\mathfrak{F}$ является $\tilde{S}$ -формацией в $\mathfrak{S}$.

(а) $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

По следствию 2 $\mathfrak{F}$ – разрешимо насыщенная формация. Из $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$ следует, что $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

(б) Пусть $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$ и $|\pi(G)| = 1$. Тогда $G \simeq Z_q$ для некоторого $p \notin \pi(\mathfrak{F})$.

В силу насыщенности $\mathfrak{F}$ если $Z_p \in \mathfrak{F}$, то и все p -группы принадлежат $\mathfrak{F}$. Значит, из $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$ и $|\pi(G)| = 1$ следует, что $G \simeq Z_p$ для некоторого $p \notin \pi(\mathfrak{F})$.

(с) Пусть $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{S}$, $|\pi(G)| > 1$ и $\Phi(G) = 1$. Тогда G – группа Шмидта.

Из $\Phi(G) = 1$ и разрешимости G следует, что всякая минимальная нормальная подгруппа N группы G дополняема. В частности, $G/N \in \mathfrak{F}$. Следовательно, в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N . Пусть M – ее дополнение в G . Заметим, что N – p -группа для некоторого $p \in \pi(G)$ и $N = G_G(N)$.

Предположим, что M не является циклической примарной группой. Тогда в силу разрешимости M и теоремы Оре найдутся подгруппы M_1 и M_2 группы M такие что, $M = M_1M_2$. Пусть $A_i = NM_i$. Тогда $A_i < G$. Значит, $A_i \in \mathfrak{F}$ и все подгруппы из A_i $\mathfrak{F}$ -субнормальны (K - $\mathfrak{F}$ -субнормальны) в A_i по лемме 2. Из $G/N \in \mathfrak{F}$ и $N \leq A_i$ следует, что все подгруппы из A_i $\mathfrak{F}$ -субнормальны (K - $\mathfrak{F}$ -субнормальны) в G . Итак, $G \in \mathfrak{F}$ по нашему предположению при $n = 2$, противоречие.

Значит, $M \simeq Z_{q^m}$ для некоторого $q \in \pi(G)$. Предположим, что $m > 1$. Докажем, что $E(q^k | p) \in \mathfrak{F}$ для $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Пусть $M_k < M$ и $M_k \simeq Z_{q^k}$. Тогда $NM_k \in \mathfrak{F}$. По [2, гл. А, теорема 11.6] $N = N_1 \times \dots \times N_t$ – произведение минимальных нормальных подгрупп группы NM_k . Заметим, что

$\cap_i C_{M_k}(N_i) = 1$ и M_k имеет единственную минимальную нормальную подгруппу. Поэтому найдется i такое, что $C_{M_k}(N_i) = 1$. Значит, $N_i M_k = E(q^k | p) \in \mathfrak{F}$.

Пусть L – регулярное сплетение $Z_{q^{m-1}}$ с Z_q . Тогда $Z_{q^m} \leq L$ по [2, гл. А, теорема 18.9]. Пусть B – база L . Пусть D – регулярное сплетение N с L . Тогда G изоморфна подгруппе D по [2, гл. А, теорема 18.9]. То есть $D \notin \mathfrak{F}$. Пусть R – база D , $A_1 = RB$, $A_2 = RZ_q$. Тогда $(M/K) \rtimes A_i / C_{A_i}(M/K)$ изоморфна или $E(q^k | p)$ для $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, или Z_q для любого главного фактора H/K группы A_i . Значит, $A_i \in \mathfrak{F}$, $i \in \{1, 2\}$ по [24, гл. 1, теорема 2.6(m)]. Тогда, все подгруппы A_i $\mathfrak{F}$ -субнормальны (K - $\mathfrak{F}$ -субнормальны) в A_i . Из $R \leq A_i$ и $D/R \in \mathfrak{F}$ следует, что указанные подгруппы и $\mathfrak{F}$ -субнормальны (K - $\mathfrak{F}$ -субнормальны) в D . Тогда $D \in \mathfrak{F}$ по нашему предположению при $n = 2$, противоречие. Итак, $m = 1$ и $G \simeq E(q | p)$ – группа Шмидта.

(d) Пусть $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{S}$ и $|\pi(G)| > 1$. Тогда G – группа Шмидта.

Следует из (с) и [25, лемма 3.1 (4)].

(е) $\mathfrak{F}$ – $\tilde{S}$ -формация в $\mathfrak{S}$.

Следует из (b) и (d).

Предположим, что $\mathfrak{F}$ – $\tilde{S}$ -формация в $\mathfrak{S}$. Пусть группа G представлена в произведение попарно перестановочных подгрупп $A_1 \dots A_n$ таких, что все $\mathfrak{H}$ -подгруппы A_i являются $\mathfrak{F}$ -субнормальными в G для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ для случая (1) и являются K - $\mathfrak{F}$ -субнормальными в G для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ для случая (2). Также предполагаем, что $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ для случая (2).

Из 1 $\mathfrak{F}$ -sn G и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$ следует разрешимость группы G в случае (1). Докажем разрешимость группы G и для случая (2). Предположим противное. Пусть H/K – неразрешимый главный фактор группы G и C_i – циклическая примарная подгруппа группы A_i . Тогда $C_i K/K$ – циклическая примарная K - $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа группы $C_i H/K$ по леммам 1 и 2. Тогда $C_i K/K \leq G_{G/K}(H/K)$ по лемме 4. Из того, что A_i порождается своими циклическими примарными подгруппами и $G = A_1 \dots A_n$ следует, что $G_{G/K}(H/K) = G/K$. Значит, H/K – абелева группа, противоречие. Итак, группа G разрешима и для случая (2).

N -критическим графом $\Gamma_{Nc}(G)$ [26, определение 1.3] группы G называется ориентированный граф на множестве вершин $\pi(G)$ такой, что (p, q) является его ребром только если в G найдется (p, q) -подгруппа Шмидта. N -критическим графом $\Gamma_{Nc}(\mathfrak{X})$ [26, определение 3.1] класса $\mathfrak{X}$ называется $\Gamma_{Nc}(\mathfrak{X}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{X}} \Gamma_{Nc}(G)$.

По [27, лемма 2] $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_\Gamma \cap \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{F}_\Gamma = (G | \Gamma_{Nc}(G) \subseteq \Gamma_{Nc}(\mathfrak{F}))$. Согласно [26, теорема 3.5(2)], $\mathfrak{F}_\Gamma$ – наследственная $\tilde{S}$ -формация. Тогда из $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_\Gamma$ и теоремы 3 следует, что $G \in \mathfrak{F}_\Gamma$. Значит, $G \in \mathfrak{F}_\Gamma \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{F}$, что и требовалось доказать.

Заключение. В данном исследовании были разработаны новые методы изучения строения произведений формационно субнормальных подгрупп, с помощью которых были установлены новые свойства наследственных сверхрадикальных формаций. В частности, установлена сверхрадикальность наследственной $\tilde{S}$ -формации. Эти методы также могут найти применение в активно развивающемся направлении современной теории групп – теории σ -свойств [28; 29].

Пусть $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ – разбиение $\mathbb{P}$. Напомним [28], что группа G называется σ -нильпотентной, если она имеет нормальную холлову σ_i -подгруппу для любого $i \in I$; подгруппа H группы G называется σ -субнормальной в G , если существует цепь подгрупп $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = G$ такая, что либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$, либо $H_i / (H_{i-1})_{H_i}$ является σ_i -группой для некоторого $\sigma_i \in \sigma$.

Заметим, что понятия σ -субнормальности и K - $\mathfrak{F}$ -субнормальности, где $\mathfrak{F}$ – класс всех σ -нильпотентных групп, совпадают. Известно (см., напр., [26, теорема 5.4] или [4, теорема 6.4.14]), что класс всех σ -нильпотентных групп является $\tilde{S}$ -формацией. Из теоремы 3 вытекает

Теорема 5. Пусть группа $G = A_1 \dots A_n$, где A_i – попарно перестановочные подгруппы группы G . Следующие утверждения эквивалентны:

- (1) G σ -нильпотентна;
- (2) A_i – σ -субнормальная σ -нильпотентная подгруппа группы G для любого $i \in \{1, \dots, n\}$;
- (3) все силовские подгруппы A_i σ -субнормальны в G для любого $i \in \{1, \dots, n\}$;
- (4) все циклические примарные подгруппы A_i σ -субнормальны в G для любого $i \in \{1, \dots, n\}$.

В завершение отметим, что ввиду теорем 3 и 4 интерес представляют следующие проблемы.

Проблема 2. *Описать все наследственные формации $\mathfrak{F}$, содержащие всякую группу $G = A_1 \dots A_n$, где A_i – попарно перестановочные подгруппы группы G , все силовские подгруппы которых $\mathfrak{F}$ -субнормальны (K - $\mathfrak{F}$ -субнормальны) в G .*

Проблема 3. *Описать все наследственные формации $\mathfrak{F}$, содержащие всякую группу $G = A_1 \dots A_n$, где A_i – попарно перестановочные подгруппы группы G , все циклические примарные подгруппы которых $\mathfrak{F}$ -субнормальны (K - $\mathfrak{F}$ -субнормальны) в G .*

Проблема 4. *Совпадают ли семейства формаций из проблем 2 и 3?*

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф23РНФМ-63).

Acknowledgments. The work was financially supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project no. Ф23РНФМ-63).

Список использованных источников

1. Шеметков, Л. А. Формации алгебраических систем / Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 256 с.
2. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
3. Каморников, С. Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С. Ф. Каморников, М. В. Селькин. – Минск: Бел. наука, 2003. – 254 с.
4. Ballester-Bolínches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolínches, L. M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer, 2006. – 385 p.
5. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
6. Murashka, V. I. On Questions Posed by Shemetkov, Ballester-Bolínches, and Perez-Ramos in Finite Group Theory / V. I. Murashka // Mathematical Notes. – 2022. – Vol. 112, № 6. – P. 932–939. <https://doi.org/10.1134/s000143462211027x>
7. Shemetkov, L. A. Frattini extensions of finite groups and formations / L. A. Shemetkov // Communications in Algebra. – 1997. – Vol. 25, № 3. – P. 955–964. <https://doi.org/10.1080/00927879708825900>
8. Ballester-Bolínches, A. On a question of L. A. Shemetkov / A. Ballester-Bolínches, M. D. Perez-Ramos // Communications in Algebra. – 1999. – Vol. 27, № 11. – P. 5615–5618. <https://doi.org/10.1080/00927879908826777>
9. Aivazidis, S. Subnormality and residuals for saturated formations: A generalization of Schenkman's theorem / S. Aivazidis, I. N. Safonova, A. N. Skiba // Journal of Group Theory. – 2021. – Vol. 24, iss. 4. – P. 807–818. <https://doi.org/10.1515/jgth-2020-0149>
10. Васильев, А. Ф. О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4. – С. 86–91.
11. Murashka, V. I. Classes of finite groups with generalized subnormal cyclic primary subgroups / V. I. Murashka // Siberian Mathematical Journal. – 2014. – Vol. 55. – P. 1105–1115. <https://doi.org/10.1134/s0037446614060135>
12. Yi, X. On hereditary superradical formations / X. Yi, S. F. Kamornikov // Siberian Mathematical Journal. – 2016. – Vol. 57. – P. 260–264. <https://doi.org/10.1134/s0037446616020087>
13. Ballester-Bolínches, A. On a problem of L. A. Shemetkov on superradical formations of finite groups / A. Ballester-Bolínches, S. F. Kamornikov, V. N. Tyutyayev // Journal of Algebra. – 2014. – Vol. 403. – P. 69–76. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2014.01.004>
14. Vasil'ev, A. F. Finite groups with generalized subnormal embedding of Sylow subgroups / A. F. Vasil'ev, T. I. Vasil'eva, A. S. Vegera // Siberian Mathematical Journal. – 2016. – Vol. 57. – P. 200–212. <https://doi.org/10.1134/s0037446616020038>
15. Murashka, V. I. Finite groups with given sets of $\mathfrak{F}$ -subnormal subgroups / V. I. Murashka // Asian-European Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 13, № 4. – Art. ID 2050073. <https://doi.org/10.1142/s1793557120500734>
16. Murashka, V. I. On the σ -nilpotent hypercenter of finite groups / V. I. Murashka, A. F. Vasil'ev // Journal of Group Theory. – 2022. – Vol. 25, № 6. – P. 1083–1098. <https://doi.org/10.1515/jgth-2021-0138>
17. Murashka, V. I. Regular saturated formations of finite soluble groups / V. I. Murashka // Journal of Group Theory. – 2025. – Vol. 28, № 6. – P. 1307–1324. <https://doi.org/10.1515/jgth-2024-0143>
18. Unsolved Problems in Group Theory. The Kurovka Notebook No. 21 / eds.: V. D. Mazurov, E. I. Khukhro. – Novosibirsk, 2026. – 302 p. – URL: <https://arxiv.org/pdf/1401.0300> (accessed at 2 June 2026).
19. Семенчук, В. Н. Характеризация локальных формаций F по заданным свойствам минимальных не F -групп / В. Н. Семенчук, А. Ф. Васильев // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп: труды Гомельского семинара. – Минск, 1984. – С. 175–181.
20. Васильев, А. Ф. Об одном вопросе теории формаций конечных групп / А. Ф. Васильев // Весці Акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 1994. – № 3. – С. 121–122.
21. Kamornikov, S. F. On two problems by L. A. Shemetkov / S. F. Kamornikov // Siberian Mathematical Journal. – 1994. – Vol. 35. – P. 713–721. <https://doi.org/10.1007/bf02106614>
22. Semenchuk, V. N. Solvable F -radical formations / V. N. Semenchuk // Mathematical Notes. – 1996. – Vol. 59, № 2. – P. 185–188. <https://doi.org/10.1007/bf02310958>
23. Мурашко, В. И. Арифметические графы и факторизуемые конечные группы / В. И. Мурашко // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2023. – Т. 29, № 4. – С. 181–192. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2023-29-4-181-192>

24. Guo, W. *Structure Theory for Canonical Classes of Finite Groups* / W. Guo. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2015. – 258 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-45747-4>
25. Vasil'ev, A. F. Formations and Products of $F(G)$ -Subnormal Subgroups of Finite Solvable Groups / A. F. Vasil'ev, V. I. Murashka // *Mathematical Notes*. – 2020. – Vol. 107, № 3. – P. 413–424. <https://doi.org/10.1134/s0001434620030050>
26. Vasil'ev, A. F. Arithmetic graphs and classes of finite groups / A. F. Vasil'ev, V. I. Murashka // *Siberian Mathematical Journal*. – 2019. – Vol. 60. – P. 41–55. <https://doi.org/10.1134/s0037446619010051>
27. Murashka, V. I. On the lattice of hereditary Shemetkov formations of finite groups in a class $\mathfrak{X}$ / V. I. Murashka // *Mathematical Notes*. – 2025. – Vol. 118, № 6. – P. 1272–1280. <https://doi.org/10.1134/s0001434625605787>
28. Skiba, A. N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A. N. Skiba // *Journal of Algebra*. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2015.04.010>
29. Skiba, A. N. On some results in the theory of finite partially soluble groups / A. N. Skiba // *Communications in Mathematics and Statistics*. – 2016. – Vol. 4, № 3. – P. 281–309. <https://doi.org/10.1007/s40304-016-0088-z>

References

1. Shemetkov L. A., Skiba A. N. *Formations of Algebraic Systems*. Moscow, Nauka Publ., 1989. 256 p. (in Russian).
2. Doerk K., Hawkes T. *Finite Soluble Groups*. Berlin, New York, Walter de Gruyter, 1992. 891 p.
3. Kamornikov S. F., Sel'kin V. M. *Subgroup Functors and Classes of Finite Groups*. Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 2003. 254 p. (in Russian).
4. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. *Classes of Finite Groups*. Springer, Dordrecht, 2006. 385 p.
5. Shemetkov L. A. *Formations of Finite Groups*. Moscow, Nauka Publ., 1978. 272 p. (in Russian).
6. Murashka V. I. On Questions Posed by Shemetkov, Ballester-Bolinches, and Perez-Ramos in Finite Group Theory. *Mathematical Notes*, 2022, vol. 112, no. 6, pp. 932–939. <https://doi.org/10.1134/s000143462211027x>
7. Shemetkov L. A. Frattini extensions of finite groups and formations. *Communications in Algebra*, 1997, vol. 25, no. 3, pp. 955–964. <https://doi.org/10.1080/00927879708825900>
8. Ballester-Bolinches A., Perez-Ramos M. D. On a question of L. A. Shemetkov. *Communications in Algebra*, 1999, vol. 27, no. 11, pp. 5615–5618. <https://doi.org/10.1080/00927879908826777>
9. Aivazidis S., Safonova I. N., Skiba A. N. Subnormality and residuals for saturated formations: A generalization of Schenckman's theorem. *Journal of Group Theory*, 2021, vol. 24, iss. 4, pp. 807–818. <https://doi.org/10.1515/jgth-2020-0149>
10. Vasil'ev A. F., Vasil'eva T. I. On Finite Groups with Generalized Subnormal Sylow Subgroups. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki = Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2011, no. 4, pp. 86–91 (in Russian).
11. Murashka V. I. Classes of finite groups with generalized subnormal cyclic primary subgroups. *Siberian Mathematical Journal*, 2014, vol. 55, pp. 1105–1115. <https://doi.org/10.1134/s0037446614060135>
12. Yi X., Kamornikov S. F. On hereditary superradical formations. *Siberian Mathematical Journal*, 2016, vol. 57, pp. 260–264. <https://doi.org/10.1134/s0037446616020087>
13. Ballester-Bolinches A., Kamornikov S. F., Tyutyayev V. N. On a problem of L. A. Shemetkov on superradical formations of finite groups. *Journal of Algebra*, 2014, vol. 403, pp. 69–76. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2014.01.004>
14. Vasil'ev A. F., Vasil'eva T. I., Vegera A. S. Finite groups with generalized subnormal embedding of Sylow subgroups. *Siberian Mathematical Journal*, 2016, vol. 57, pp. 200–212. <https://doi.org/10.1134/s0037446616020038>
15. Murashka V. I. Finite groups with given sets of $\mathfrak{F}$ -subnormal subgroups. *Asian-European Journal of Mathematics*, 2020, vol. 13, no. 4, art. ID 2050073. <https://doi.org/10.1142/s1793557120500734>
16. Murashka V. I., Vasil'ev A. F. On the σ -nilpotent hypercenter of finite groups. *Journal of Group Theory*, 2022, vol. 25, no. 6, pp. 1083–1098. <https://doi.org/10.1515/jgth-2021-0138>
17. Murashka V. I. Regular saturated formations of finite soluble groups. *Journal of Group Theory*, 2025, vol. 28, no. 6, pp. 1307–1324. <https://doi.org/10.1515/jgth-2024-0143>
18. Mazurov V. D., Khukhro E. I. (eds.). *Unsolved Problems in Group Theory. The Kourovka Notebook no. 21*. Novosibirsk, 2026. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1401.0300> (accessed at 2 June 2026).
19. Semenchuk V. N., Vasil'ev A. F. Characterization of Local Formations F by Given Properties of Minimal Non- F -groups. *Issledovanie normal'nogo i podgruppovogo stroeniya konechnykh grupp: Trudy Gomel'skogo seminara* [Investigation of Normal and Subgroup Structure of Finite Groups: Proceedings of the Gomel Seminar]. Minsk, 1984, pp. 175–181 (in Russian).
20. Vasil'ev A. F. On a Question of the Theory of Formations of Finite Groups. *Vesti Akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematichnykh navuk = Proceedings of the Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 1994, no. 3, pp. 121–122 (in Russian).
21. Kamornikov S. F. On two problems by L. A. Shemetkov. *Siberian Mathematical Journal*, 1994, vol. 35, pp. 713–721. <https://doi.org/10.1007/bf02106614>
22. Semenchuk V. N. Solvable F -radical formations. *Math Notes*, 1996, vol. 59, no. 2, pp. 185–188. <https://doi.org/10.1007/bf02310958>
23. Murashka V. I. Arithmetic Graphs and Factorizable Finite Groups. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN* [Proceedings of Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS], 2023, vol. 29, no. 4, pp. 181–192 (in Russian). <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2023-29-4-181-192>
24. Guo W. *Structure Theory for Canonical Classes of Finite Groups*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2015. 258 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-45747-4>

25. Vasil'ev A. F., Murashka V. I. Formations and Products of $F(G)$ -Subnormal Subgroups of Finite Solvable Groups. *Mathematical Notes*, 2020, vol. 107, no. 3, pp. 413–424. <https://doi.org/10.1134/s0001434620030050>
26. Vasil'ev A. F., Murashka V. I. Arithmetic graphs and classes of finite groups. *Siberian Mathematical Journal*, 2019, vol. 60, pp. 41–55. <https://doi.org/10.1134/s0037446619010051>
27. Murashka V. I. On the lattice of hereditary Shemetkov formations of finite groups in a class $\mathfrak{X}$. *Mathematical Notes*, 2025, vol. 118, no. 6, pp. 1272–1280. <https://doi.org/10.1134/s0001434625605787>
28. Skiba A. N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups. *Journal of Algebra*, 2015, vol. 436, pp. 1–16. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2015.04.010>
29. Skiba A. N. On some results in the theory of finite partially soluble groups. *Communications in Mathematics and Statistics*, 2016, vol. 4, no. 3, pp. 281–309. <https://doi.org/10.1007/s40304-016-0088-z>

Информация об авторах

Балычев Сергей Владимирович – инженер-программист подготовительных курсов института повышения квалификации и переподготовки, Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины (ул. Советская, 104, 246028, Гомель, Республика Беларусь).

Мурашко Вячеслав Игоревич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры алгебры и геометрии, ведущий научный сотрудник НИС, Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины (ул. Советская, 104, 246028, Гомель, Республика Беларусь). E-mail: mvimath@yandex.ru. <https://orcid.org/0000-0002-0769-2519>

Information about the authors

Sergey V. Balychev – Software Engineer at the Preparatory Courses of the Institute of Advanced Training and Retraining of the Francisk Skorina Gomel State University (104, Sovetskaya Str., 246028, Gomel, Republic of Belarus).

Viachaslau I. Murashka – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Algebra and Geometry, Leading Researcher of Research Sector, Francisk Skorina Gomel State University (104, Sovetskaya Str., 246028, Gomel, Republic of Belarus). E-mail: mvimath@yandex.ru. <https://orcid.org/0000-0002-0769-2519>