

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 519.2

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-3-211-222>

Поступила в редакцию 17.07.2026

Received 17.07.2026

Ю. С. Харин, С. А. Шибалко

*НИИ прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета,
Минск, Республика Беларусь*

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДВОИЧНОЙ ЦЕПИ МАРКОВА С РАЗЛАДКОЙ

Аннотация. Рассматривается задача статистического анализа двоичной неоднородной цепи Маркова с одной разладкой (моментом времени «скачкообразного» изменения матрицы вероятностей одношаговых переходов). Исследованы два случая: при известных матрицах переходных вероятностей и при априорно неизвестных матрицах переходных вероятностей. Построены состоятельные статистические оценки параметров, доказаны их асимптотические свойства при увеличении длительности наблюдения. Разработан алгоритм статистического оценивания момента разладки. Представлены результаты компьютерных экспериментов.

Ключевые слова: двоичный временной ряд, неоднородная цепь Маркова, момент разладки, статистическое оценивание параметров, структурные изменения

Для цитирования. Харин, Ю. С. Статистический анализ двоичной цепи Маркова с разладкой / Ю. С. Харин, С. А. Шибалко // Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2026. – Т. 62, № 3. – С. 211–222. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-3-211-222>

Yuriy S. Kharin, Siarhei A. Shibalko

*Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University,
Minsk, Republic of Belarus*

STATISTICAL ANALYSIS OF BINARY MARKOV CHAIN WITH A CHANGE POINT

Abstract. This paper is devoted to statistical analysis of a binary heterogeneous Markov chain with a single change point (time point of the change in the one-step transition probability matrix). To address this problem, two cases are studied: one where the transition probability matrices are known, and another where they are unknown a priori. Consistent statistical estimators for the parameters are constructed, their asymptotic properties are proved, and an algorithm for estimating the change point is developed. The results of computer experiments are presented.

Keywords: binary time series, heterogeneous Markov chain, change point, statistical parameter estimation, structural change

For citation. Kharin Yu. S., Shibalko S. A. Statistical analysis of binary Markov chain with a change point. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2026, vol. 62, no. 3, pp. 211–222 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-3-211-222>

Введение. Процесс цифровизации экономики и других сфер жизни приводит к увеличению объема данных, представленных в дискретном пространстве состояний с дискретным временем. Такие данные возникают в самых разных областях – от финансового мониторинга и телекоммуникационного трафика до кибербезопасности [1]. Для статистического анализа таких данных применяются модели дискретных, в том числе двоичных, однородных временных рядов. Обзор современного состояния в области статистического анализа однородных дискретных временных рядов представлен в [2; 3].

Однако на практике многие прикладные процессы порождают дискретные последовательности, свойства которых со временем меняются. Подобные изменения могут быть вызваны внешними воздействиями, сменой технологических режимов, изменением поведения пользователей или структурными сдвигами в экономике. Игнорирование моментов «скачкообразной» смены режимов (разладок) приводит к ошибкам прогнозирования и управления. Таким образом, статистический анализ неоднородных дискретных временных рядов является важной задачей мате-

математической статистики и анализа данных. Теория статистического анализа неоднородных временных рядов хорошо развита для случая непрерывных временных рядов [4; 5]. Однако в конце XX в. возникает интерес к исследованию неоднородных дискретных временных рядов. Обзор современного состояния в области статистического анализа неоднородных дискретных временных рядов представлен в [6–8].

Математическая модель. Введем следующие обозначения: $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел; $\mathbb{R}^k$ – k -мерное евклидово пространство; $V = \{0,1\}$ – двоичный алфавит; $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; штрих у матрицы – символ транспонирования; O_k – вектор-столбец с k нулевыми элементами; $O_{k \times k}$ – матрица $k \times k$ с нулевыми элементами; $N_k(\mu, \Sigma)$ – k -мерное нормальное распределение с вектором средних μ и матрицей ковариаций Σ ; $n_k(\mu, \Sigma)$ – плотность распределения вероятностей этого k -мерного нормального распределения; $1\{C\}$ – индикатор события C .

Определим на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ двоичный временной ряд $X_t = \{x_1, \dots, x_t\}' \in V^t$, порождаемый семейством условных распределений вероятностей:

$$P\{x_t = j_t \mid \mathcal{F}_{t-1}\} = P\{x_t = j_t \mid x_{t-1} = j_{t-1}\}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

где $x_t \in V$ – двоичная (бинарная) случайная величина, задающая значение временного ряда в момент времени $t \in \mathbb{Z}$; $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma\{x_\tau : \tau \leq t-1\}$ – σ -алгебра случайных событий, порожденных указанными в скобках случайными величинами; $j_t \in V$ – значение двоичной случайной величины x_t в момент времени $t \in \mathbb{Z}$. Двоичный временной ряд, порождаемый семейством условных распределений вероятностей вида (1), является однородной цепью Маркова первого порядка (ОЦМ) с матрицей переходных вероятностей:

$$P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{00} & 1-p_{00} \\ 1-p_{11} & p_{11} \end{pmatrix},$$

где $p_{ij} = P\{x_t = j \mid x_{t-1} = i\}$ – вероятность перехода из состояния i в состояние j ; $i, j \in V$.

Назовем разладкой наблюдаемого процесса x_t такой момент времени τ^0 , когда матрица переходных вероятностей P изменяется скачкообразно. Пусть на временном отрезке $[1, T]$, где T – длительность наблюдения, существует единственная неизвестная точка $\tau^0 \in (1, T)$, в которой происходит разладка: матрица переходных вероятностей P_1 заменяется матрицей $P_2 \neq P_1$, где

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_{00}^{(1)} & 1-p_{00}^{(1)} \\ 1-p_{11}^{(1)} & p_{11}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} p_{00}^{(2)} & 1-p_{00}^{(2)} \\ 1-p_{11}^{(2)} & p_{11}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad p_{00}^{(1)}, p_{11}^{(1)}, p_{00}^{(2)}, p_{11}^{(2)} \in [0, 1]. \quad (2)$$

Случай априорно известных матриц переходных вероятностей. Определим квадрат нормы разности между матрицами переходных вероятностей (2):

$$\rho^0 = \|P_1 - P_2\|^2 = 2\left((p_{00}^{(1)} - p_{00}^{(2)})^2 + (p_{11}^{(1)} - p_{11}^{(2)})^2\right) \in (0, 4]. \quad (3)$$

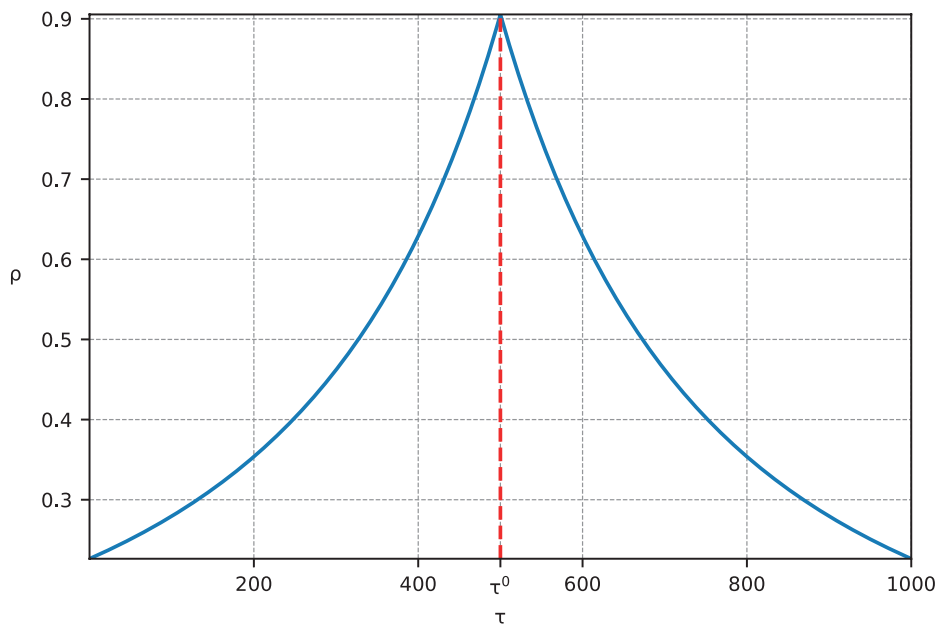
Для статистического оценивания τ^0 по $\{x_t\}$ введем в рассмотрение функцию переменной $\tau \in (1, T)$:

$$\rho(\tau) = \|P(1:\tau) - P(\tau+1:T)\|^2 = 2\left(\left(p_{00}(1:\tau) - p_{00}(\tau+1:T)\right)^2 + \left(p_{11}(1:\tau) - p_{11}(\tau+1:T)\right)^2\right), \quad (4)$$

определяющую квадрат нормы разности между матрицами $P(1:\tau)$ и $P(\tau+1:T)$, где

$$P(1:\tau) = \begin{pmatrix} p_{00}(1:\tau) & 1-p_{00}(1:\tau) \\ 1-p_{11}(1:\tau) & p_{11}(1:\tau) \end{pmatrix} = \begin{cases} P_1, & \tau < \tau^0; \\ \frac{\tau^0}{\tau} P_1 + \frac{\tau - \tau^0}{\tau} P_2, & \tau \geq \tau^0; \end{cases} \quad (5)$$

$$P(\tau+1:T) = \begin{pmatrix} p_{00}(\tau+1:T) & 1-p_{00}(\tau+1:T) \\ 1-p_{11}(\tau+1:T) & p_{11}(\tau+1:T) \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{\tau^0 - \tau}{T - \tau} P_1 + \frac{T - \tau^0}{T - \tau} P_2, & \tau < \tau^0, \\ P_2, & \tau \geq \tau^0. \end{cases}$$

Рис 1. График функции $\rho(\tau)$ при $\tau^0 = T/2$ Fig 1. Plot of the function $\rho(\tau)$ for $\tau^0 = T/2$

Теорема 1. Функция $\rho(\tau)$ имеет следующий явный вид:

$$\rho(\tau) = \begin{cases} \left((T - \tau^0) / (T - \tau) \right)^2 \cdot \rho^0, & \tau \leq \tau^0; \\ (\tau^0 / \tau)^2 \cdot \rho^0, & \tau \geq \tau^0. \end{cases} \quad (6)$$

Максимум функции $\rho(\tau)$ при известных матрицах переходных вероятностей P_1^0 и P_2^0 достигается при $\tau = \tau^0$.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $\tau < \tau^0$; подставляя (4) в (2), получим:

$$\begin{aligned} \rho(\tau) &= 2 \left(p_{00}^{(1)}(\tau^0) - \frac{(\tau^0 - \tau)p_{00}^{(1)}(\tau^0) + (T - \tau^0)p_{00}^{(2)}(\tau^0)}{T - \tau} \right)^2 + \left(p_{11}^{(1)}(\tau^0) - \frac{(\tau^0 - \tau)p_{11}^{(1)} + (T - \tau^0)p_{11}^{(2)}}{T - \tau} \right)^2 = \\ &= 2 \left(\frac{T - \tau^0}{T - \tau} \right)^2 \left((p_{00}^{(1)}(\tau^0) - p_{00}^{(2)}(\tau^0))^2 + (p_{11}^{(1)}(\tau^0) - p_{11}^{(2)}(\tau^0))^2 \right), \end{aligned}$$

что с учетом (3) совпадает с первой строкой в (6). Следовательно, максимум функции $\rho(\tau)$ в первом случае достигается при $\tau = \tau^0$.

Случай 2: $\tau > \tau^0$; подставляя (3) в (2), получим:

$$\begin{aligned} \rho(\tau) &= \left(\frac{\tau^0 p_{00}^{(1)} + (\tau - \tau^0)p_{00}^{(2)}}{\tau} - p_{00}^{(2)} \right)^2 + \left(\frac{\tau^0 p_{11}^{(1)} + (\tau - \tau^0)p_{11}^{(2)}}{\tau} - p_{11}^{(2)} \right)^2 = \\ &= 2 \left(\frac{\tau^0}{\tau} \right)^2 \left((p_{00}^{(1)}(\tau^0) - p_{00}^{(2)}(\tau^0))^2 + (p_{11}^{(1)}(\tau^0) - p_{11}^{(2)}(\tau^0))^2 \right), \end{aligned}$$

что с учетом (3) совпадает со второй строкой в (6). Следовательно, максимум функции $\rho(\tau)$ и во втором случае достигается при $\tau = \tau^0$. Теорема 1 доказана.

На рис. 1 для иллюстрации приведен график функции $\rho(\tau)$ для $\tau^0 = T/2$, $T = 10^3$, $\rho^0 = 0,9055$.

Согласно теореме 1 построим оценку для τ^0 при известных матрицах переходных вероятностей P_1, P_2 :

$$\tilde{\tau} = \arg \max_{\tau \in (1, T)} \rho(\tau). \quad (7)$$

Следствие 1. При известных матрицах переходных вероятностей P_1^0, P_2^0 оценка (7) совпадает с истинным значением: $\tilde{\tau} = \tau^0$.

Случай априорно неизвестных матриц переходных вероятностей. Рассмотрим теперь ситуацию, когда матрицы переходных вероятностей P_1^0 и P_2^0 априорно неизвестны. Для статистического оценивания τ^0 при неизвестных матрицах переходных вероятностей P_1^0 и P_2^0 определим следующую статистику по $X_T = (x_1, \dots, x_T)$:

$$\hat{\rho}(\tau) = \|\hat{P}(1:\tau) - \hat{P}(\tau+1:T)\|^2 = 2 \left((\hat{p}_{00}(1:\tau) - \hat{p}_{00}(\tau+1:T))^2 + (\hat{p}_{11}(1:\tau) - \hat{p}_{11}(\tau+1:T))^2 \right), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{p}_{ii}(1:\tau) &= \frac{\sum_{t=1}^{\tau-1} 1\{x_t = i\} \cdot 1\{x_{t+1} = i\}}{\sum_{t=1}^{\tau-1} 1\{x_t = i\}}, \\ \hat{p}_{ii}(\tau+1:T) &= \frac{\sum_{t=\tau+1}^{T-1} 1\{x_t = i\} \cdot 1\{x_{t+1} = i\}}{\sum_{t=\tau+1}^{T-1} 1\{x_t = i\}}, \\ i &\in V, \quad \tau \in [\tau_-, T - \tau_-], \end{aligned} \quad (9)$$

где τ_- – заданная величина, достаточная для обеспечения заданной точности оценок (9); $\tau_- \in (1, T)$.

Для исследования свойств статистических оценок (8)–(9) введем асимптотику:

$$T, \tau_-, \tau^0, \tau \rightarrow +\infty, \quad \frac{\tau_-}{T} \rightarrow \alpha_-, \quad \frac{\tau^0}{T} \rightarrow \alpha^0, \quad \frac{\tau}{T} \rightarrow \alpha, \quad \alpha_- < \alpha, \quad (10)$$

где $\alpha_-, \alpha \in (0, 1)$ – некоторые заданные параметры, определяющие скорость асимптотики. Асимптотика (10) означает, что стремление τ_-, τ^0, T к бесконечности происходит синхронно с одной и той же скоростью: $T \rightarrow \infty$, $\tau_- = [\alpha_- \cdot T]$, $\tau_0 = [\alpha^0 \cdot T]$, где $[z]$ – целая часть числа z .

Определим двумерные случайные векторы, компонентами которых являются диагональные элементы матриц $\hat{P}(1:\tau)$ и $\hat{P}(\tau+1:T)$ соответственно:

$$\begin{aligned} \hat{Q}(1:\tau) &= (\hat{p}_{00}(1:\tau), \hat{p}_{11}(1:\tau)), \\ \hat{Q}(\tau+1:T) &= (\hat{p}_{00}(\tau+1:T), \hat{p}_{11}(\tau+1:T)). \end{aligned}$$

Теорема 2. В асимптотике (10) статистические оценки (9) являются состоятельными (в смысле сходимости по вероятности) и асимптотически несмещенными оценками матриц (5):

$$\begin{aligned} \hat{P}(1:\tau) - P(1:\tau) &\xrightarrow{P} O_{2 \times 2}, \quad \hat{P}(\tau+1:T) - P(\tau+1:T) \xrightarrow{P} O_{2 \times 2}, \\ E\{\hat{P}(1:\tau)\} - P(1:\tau) &\longrightarrow O_{2 \times 2}, \quad E\{\hat{P}(\tau+1:T)\} - P(\tau+1:T) \longrightarrow O_{2 \times 2}, \end{aligned} \quad (11)$$

или, что эквивалентно,

$$\begin{aligned} \hat{Q}(1:\tau) - Q^0(1:\tau) &\xrightarrow{P} O_2, & \hat{Q}(\tau+1:T) - Q^0(\tau+1:T) &\xrightarrow{P} O_2, \\ E\{\hat{Q}(1:\tau)\} - Q^0(1:\tau) &\longrightarrow O_2, & E\{\hat{Q}(\tau+1:T)\} - Q^0(\tau+1:T) &\longrightarrow O_2. \end{aligned}$$

Статистические оценки (9) в асимптотике (10) имеют асимптотически нормальное распределение:

$$\begin{aligned} \sqrt{T}(\hat{Q}(1:\tau) - Q^0(1:\tau)) &\longrightarrow N_2(O_2, \Sigma_1), \\ \Sigma_1 &= \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \text{diag} \left(\frac{p_{00}^{(1)}(1-p_{00}^{(1)})}{\pi_0^{(1)}}, \frac{p_{11}^{(1)}(1-p_{11}^{(1)})}{\pi_1^{(1)}} \right), & \alpha < \alpha^0; \\ \frac{1}{\alpha} \text{diag} \left(\frac{\alpha^0 p_{00}^{(1)}(1-p_{00}^{(1)})}{\pi_0^{(1)}} + \left(1 - \frac{\alpha^0}{\alpha}\right) \frac{p_{00}^{(2)}(1-p_{00}^{(2)})}{\pi_0^{(2)}}, \frac{\alpha^0 p_{11}^{(1)}(1-p_{11}^{(1)})}{\pi_1^{(1)}} + \left(1 - \frac{\alpha^0}{\alpha}\right) \frac{p_{11}^{(2)}(1-p_{11}^{(2)})}{\pi_1^{(2)}} \right), & \alpha \geq \alpha^0; \end{cases} \\ \sqrt{T}(\hat{Q}(\tau+1:T) - Q^0(\tau+1:T)) &\xrightarrow{T \rightarrow \infty} N_2(O_2, \Sigma_2), \\ \Sigma_2 &= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} \text{diag} \left(\frac{\alpha^0 - \alpha}{1-\alpha} \frac{p_{00}^{(1)}(1-p_{00}^{(1)})}{\pi_0^{(1)}} + \frac{1-\alpha^0}{1-\alpha} \frac{p_{00}^{(2)}(1-p_{00}^{(2)})}{\pi_0^{(2)}}, \frac{\alpha^0 - \alpha}{1-\alpha} \frac{p_{11}^{(1)}(1-p_{11}^{(1)})}{\pi_1^{(1)}} + \frac{1-\alpha^0}{1-\alpha} \frac{p_{11}^{(2)}(1-p_{11}^{(2)})}{\pi_1^{(2)}} \right), & \alpha < \alpha^0, \\ \frac{1}{1-\alpha} \text{diag} \left(\frac{p_{00}^{(2)}(1-p_{00}^{(2)})}{\pi_0^{(2)}}, \frac{p_{11}^{(2)}(1-p_{11}^{(2)})}{\pi_1^{(2)}} \right), & \alpha \geq \alpha^0. \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

Доказательство. Статистические оценки (9) являются оценками максимального правдоподобия. По теореме 4.1 из [9] они являются состоятельными и асимптотически несмещенными оценками матриц переходных вероятностей.

Согласно теореме 3.1 и разделу 4 из [9] статистические оценки (8) имеют следующее асимптотически нормальное распределение:

$$\begin{aligned} \sqrt{\tau}(\hat{Q}(1:\tau) - Q^0(1:\tau)) &\longrightarrow N_2(O_2, \Sigma_1), \\ \Sigma_1 &= \begin{cases} \text{diag} \left(\frac{p_{00}^{(1)}(1-p_{00}^{(1)})}{\pi_0^{(1)}}, \frac{p_{11}^{(1)}(1-p_{11}^{(1)})}{\pi_1^{(1)}} \right), & \alpha < \alpha^0; \\ \text{diag} \left(\frac{\alpha^0 p_{00}^{(1)}(1-p_{00}^{(1)})}{\pi_0^{(1)}} + \left(1 - \frac{\alpha^0}{\alpha}\right) \frac{p_{00}^{(2)}(1-p_{00}^{(2)})}{\pi_0^{(2)}}, \frac{\tau^0 p_{11}^{(1)}(1-p_{11}^{(1)})}{\pi_1^{(1)}} + \frac{\tau - \tau^0}{\tau} \frac{p_{11}^{(2)}(1-p_{11}^{(2)})}{\pi_1^{(2)}} \right), & \alpha \geq \alpha^0; \end{cases} \\ \sqrt{T - \tau}(\hat{Q}(\tau+1:T) - Q^0(\tau+1:T)) &\longrightarrow N_2(O_2, \Sigma_2), \\ \Sigma_2 &= \begin{cases} \text{diag} \left(\frac{\alpha^0 - \alpha}{1-\alpha} \frac{p_{00}^{(1)}(1-p_{00}^{(1)})}{\pi_0^{(1)}} + \frac{1-\alpha^0}{1-\alpha} \frac{p_{00}^{(2)}(1-p_{00}^{(2)})}{\pi_0^{(2)}}, \frac{\alpha^0 - \alpha}{1-\alpha} \frac{p_{11}^{(1)}(1-p_{11}^{(1)})}{\pi_1^{(1)}} + \frac{1-\alpha^0}{1-\alpha} \frac{p_{11}^{(2)}(1-p_{11}^{(2)})}{\pi_1^{(2)}} \right), & \alpha < \alpha^0, \\ \text{diag} \left(\frac{p_{00}^{(2)}(1-p_{00}^{(2)})}{\pi_0^{(2)}}, \frac{p_{11}^{(2)}(1-p_{11}^{(2)})}{\pi_1^{(2)}} \right), & \alpha \geq \alpha^0. \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

Умножив (13) на $\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$ и (14) на $\sqrt{\frac{1}{1-\alpha}}$, получим асимптотическое распределение (12). Теорема 2 доказана.

Примем следующие обозначения: $\Sigma = \text{diag}(\Sigma_1, \Sigma_2)$ – блочно-диагональная матрица; ∇ – оператор, определяющий градиент функции.

Теорема 3. В асимптотике (10) статистическая оценка $\hat{\rho}(\tau)$, определяемая (8), является состоятельной, асимптотически несмещенной оценкой для $\rho(\tau)$ и имеет асимптотически нормальное распределение:

$$\begin{aligned} \sqrt{T}(\hat{\rho}(\tau) - \rho(\tau)) &\longrightarrow N_1(0, \sigma^2), \\ \sigma^2 &= (\nabla \rho(\tau))' \Sigma (\nabla \rho(\tau)). \end{aligned} \quad (15)$$

Доказательство. Рассмотрим составной случайный вектор

$$\hat{Q} = (\hat{p}_{00}(1:\tau), \hat{p}_{11}(1:\tau), \hat{p}_{00}(\tau+1:T), \hat{p}_{11}(\tau+1:T))'.$$

На основании теоремы 2 случайный вектор $\hat{Q}$ имеет следующее асимптотическое нормальное распределение:

$$\sqrt{T}(\hat{Q} - Q^0) \longrightarrow N_4(0, \Sigma).$$

Вычислим асимптотическое распределение функции $\rho(\tau)$, применив теорему о гладком преобразовании асимптотически нормальной последовательности [10]:

$$\begin{aligned} \sqrt{T}(\hat{\rho}(\tau) - \rho(\tau)) &\longrightarrow N(0, \sigma^2), \\ \sigma^2 &= (\nabla \rho(\tau))' \Sigma (\nabla \rho(\tau)). \end{aligned} \quad (16)$$

Вычислим $\nabla \rho$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(\tau)}{\partial p_{00}^{(1)}(1:\tau)} &= 4(p_{00}^{(1)}(1:\tau) - p_{00}^{(2)}(\tau+1:T)), & \frac{\partial \rho(\tau)}{\partial p_{11}^{(1)}(1:\tau)} &= 4(p_{11}^{(1)}(1:\tau) - p_{11}^{(2)}(\tau+1:T)), \\ \frac{\partial \rho(\tau)}{\partial p_{00}^{(2)}(\tau+1:T)} &= -4(p_{00}^{(1)}(1:\tau) - p_{00}^{(2)}(\tau+1:T)), & \frac{\partial \rho(\tau)}{\partial p_{11}^{(2)}(\tau+1:T)} &= -4(p_{11}^{(1)}(1:\tau) - p_{11}^{(2)}(\tau+1:T)). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (16), получим (15). Теорема 3 доказана.

Следствие 2. В асимптотике (10) при $\tau \rightarrow \tau^0$ оценка $\hat{\rho}(\tau)$ сходится по вероятности к ρ^0 :

$$\hat{\rho}(\tau) \xrightarrow[\tau \rightarrow \tau^0]{P} \rho^0.$$

Следствие 3. В условиях теоремы 3 асимптотическая дисперсия σ^2 имеет следующий явный вид:

$$\sigma^2 = \begin{cases} 16 \sum_{i=0}^1 (p_{ii}^{(1)} - p_{ii}^{(2)})^2 \left(\frac{1}{\alpha} \frac{p_{ii}^{(1)}(1 - p_{ii}^{(1)})}{\pi_i^{(1)}} + \frac{1}{1 - \alpha} \left(\frac{\alpha^0 - \alpha}{1 - \alpha} \frac{p_{ii}^{(1)}(1 - p_{ii}^{(1)})}{\pi_i^{(1)}} + \frac{1 - \alpha^0}{1 - \alpha} \frac{p_{ii}^{(2)}(1 - p_{ii}^{(2)})}{\pi_i^{(2)}} \right) \right), & \alpha < \alpha^0; \\ 16 \sum_{i=0}^1 (p_{ii}^{(1)} - p_{ii}^{(2)})^2 \left(\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\alpha^0}{\alpha} \frac{p_{ii}^{(1)}(1 - p_{ii}^{(1)})}{\pi_i^{(1)}} + (1 - \frac{\alpha^0}{\alpha}) \frac{p_{ii}^{(2)}(1 - p_{ii}^{(2)})}{\pi_i^{(2)}} \right) + \frac{1}{1 - \alpha} \frac{p_{ii}^{(2)}(1 - p_{ii}^{(2)})}{\pi_i^{(2)}} \right), & \alpha \geq \alpha^0. \end{cases} \quad (17)$$

На основании алгоритма (6) и теорем 2, 3 построим алгоритм статистического оценивания τ^0 при неизвестных матрицах переходных вероятностей P_1^0, P_2^0 .

Шаг 1. Скользящим двухфрагментным окном $[\tau_-, \tau]; [\tau+1, T - \tau_-]$ вычисляем

$$\hat{\rho}(\tau) = 2 \left((\hat{p}_{00}(1:\tau) - \hat{p}_{00}(\tau+1:T))^2 + (\hat{p}_{11}(1:\tau) - \hat{p}_{11}(\tau+1:T))^2 \right)$$

последовательно для $\tau = \tau_-, \tau_- + 1, \dots, T - \tau_-$.

Шаг 2. Вычисляем $\hat{\tau}$:

$$\hat{\tau} = \arg \max_{\tau \in [\tau_-, T - \tau_-]} \hat{\rho}(\tau). \quad (18)$$

Теорема 4. В асимптотике (10) статистическая оценка $\hat{\tau}$ (18) является состоятельной оценкой момента разладки τ^0 :

$$\hat{\tau} \xrightarrow{P} \tau^0.$$

Доказательство. Так как статистическая оценка $\hat{\rho}(\tau)$ является состоятельной оценкой $\rho(\tau)$, и $\rho(\tau)$ имеет единственный максимум, который достигается в точке τ^0 , то по теореме 3.2.2 из [11] статистическая оценка $\hat{\tau}$ является состоятельной оценкой момента разладки τ^0 . Теорема 4 доказана.

Асимптотический анализ точности оценивания момента разладки (18). Введем обозначение: $\eta_\tau = \hat{\rho}(\tau) - \hat{\rho}(\tau^0)$.

Теорема 5. В асимптотике (10) вероятность того, что статистическая оценка $\hat{\tau}$ (18) равна моменту разладки τ^0 , допускает приближение

$$P\{\hat{\tau} = \tau^0\} = P\{\eta_{\tau_-}, \eta_{\tau_-+1}, \dots, \eta_{\hat{\tau}-1}, \eta_{\hat{\tau}+1}, \dots, \eta_{T-\tau_-} < 0\} = \int_{-\infty}^0 \dots \int_{-\infty}^0 n_{T-2\tau_-1}(\mu, \Sigma) dy_1 \dots dy_{T-2\tau_-1}. \quad (19)$$

Доказательство. Событие $\{\hat{\tau} = \tau^0\}$ наступает только тогда, когда $\hat{\rho}(\hat{\tau}) = \max_{\tau \in [\tau_-, T - \tau_-]} \hat{\rho}(\tau)$. Все слагаемые η_τ в асимптотике (10) имеют в совокупности асимптотически нормальное распределение. Следовательно, η_τ также распределено по асимптотически нормальному закону. Теорема 5 доказана.

Так как вычисление вероятности (19) затруднительно (интеграл растущей кратности), рассмотрим подход на основе анализа различимости распределений вероятностей статистик $\hat{\rho}(\tau^0)$ и $\hat{\rho}(\tau)$ в ε -окрестности τ^0 : $|\tau - \tau^0| \leq \varepsilon$. Для этого нам понадобится решить вспомогательную задачу статистической проверки двух гипотез относительно гауссовской случайной величины ξ : $H_0: \xi \sim N_1(\mu_0, \sigma_0^2)$ и $H_1: \xi \sim N_1(\mu_1, \sigma_1^2)$.

Обозначим квадратное уравнение:

$$Ax^2 + Bx + C = 0, \quad A = \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}, \quad B = 2\left(\frac{\mu_0}{\sigma_0^2} - \frac{\mu_1}{\sigma_1^2}\right), \quad C = \frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{\mu_0^2}{\sigma_0^2} + 2\ln \frac{\sigma_1}{\sigma_0}, \quad (20)$$

и его корни:

$$r_{1,2} = \frac{-B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad r_1 \leq r_2. \quad (21)$$

Лемма. Вероятности ошибок первого и второго рода для проверки H_0 , H_1 по методу максимального правдоподобия равны

$$\alpha = P(H_1 | H_0) = \begin{cases} \Phi\left(\frac{r_2 - \mu_0}{\sigma_0}\right) - \Phi\left(\frac{r_1 - \mu_0}{\sigma_0}\right), & A > 0; \\ 1 - \left[\Phi\left(\frac{r_2 - \mu_0}{\sigma_0}\right) - \Phi\left(\frac{r_1 - \mu_0}{\sigma_0}\right)\right], & A < 0, \end{cases}$$

$$\beta = P(H_0 | H_1) = 1 - \begin{cases} \Phi\left(\frac{r_2 - \mu_1}{\sigma_1}\right) - \Phi\left(\frac{r_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right), & A < 0, \\ \left[1 - \left[\Phi\left(\frac{r_2 - \mu_1}{\sigma_1}\right) - \Phi\left(\frac{r_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)\right]\right], & A > 0. \end{cases}$$

Доказательство. Для рассматриваемой задачи проверки H_0 , H_1 отношение правдоподобия

$$\Lambda(x) = \frac{\mathcal{L}_0\{x\}}{\mathcal{L}_1\{x\}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \exp\left(-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2} + \frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) > 1 \quad (22)$$

определяет решающее правило: принимаем гипотезу H_0 , если $\Lambda(x) > 1$, иначе принимаем гипотезу H_1 . Логарифмируем неравенство (22):

$$\begin{aligned} & -\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2} + \frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} + \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_0} > 0, \\ & x^2 \left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2} \right) + 2x \left(\frac{\mu_0}{\sigma_0^2} - \frac{\mu_1}{\sigma_1^2} \right) + \left(\frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{\mu_0^2}{\sigma_0^2} \right) + 2 \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_0} > 0, \end{aligned}$$

и находим область $\mathcal{R} = \{x \mid \Lambda(x) > 1\}$, при которой принимается гипотеза H_0 :

$$\mathcal{R} = \begin{cases} (r_1, r_2), & A < 0; \\ (-\infty, r_1) \cup (r_2, +\infty), & A > 0. \end{cases}$$

Лемма доказана.

Для оценки различимости распределений вероятностей $\hat{\rho}(\tau^0)$ и $\hat{\rho}(\tau)$ в ε -окрестности τ^0 применим лемму для различения двух вспомогательных гипотез:

$$H_0 = \{\tau = \tau^0\} : \hat{\rho}(\tau) \sim N_1(\rho(\tau^0), \sigma_0^2)$$

и

$$H_1 = \{\tau = (1-\varepsilon)\tau^0\} : \hat{\rho}(\tau) \sim N_1(\rho((1-\varepsilon)\tau^0), \sigma_1^2),$$

где $\varepsilon \in (0, 1)$.

Теорема 6. Безусловная вероятность ошибки различения гипотез $H_0 = \{\tau = \tau^0\}$ и $H_1 = \{\tau = (1-\varepsilon)\tau^0\}$ в асимптотике (10) выражается следующей формулой:

$$r = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{2} \begin{cases} \Phi\left(\frac{r_2 - \mu_0}{\sigma_0}\right) - \Phi\left(\frac{r_1 - \mu_0}{\sigma_0}\right) + 1 - \left[\Phi\left(\frac{r_2 - \mu_1}{\sigma_1}\right) - \Phi\left(\frac{r_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right) \right], & A > 0, \\ 1 - \left[\Phi\left(\frac{r_2 - \mu_0}{\sigma_0}\right) - \Phi\left(\frac{r_1 - \mu_0}{\sigma_0}\right) \right] + \Phi\left(\frac{r_2 - \mu_1}{\sigma_1}\right) - \Phi\left(\frac{r_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right), & A < 0, \end{cases}$$

где $\mu_0 = r(\tau^0)$, $\mu_1 = r((1-\varepsilon)\tau^0)$, A определено в (20), r_1 , r_2 – в (21), σ_0^2, σ_1^2 – в (17) при $\alpha = \alpha^0$ и $\alpha = \alpha^0(1-\varepsilon)$ соответственно.

Доказательство. В асимптотике (10) статистическая оценка $\hat{\rho}(\tau)$ имеет асимптотически нормальное распределение. Следовательно, используя формулы из леммы, получим формулу безусловной вероятности ошибки различения гипотез H_0 и H_1 . Теорема 6 доказана.

На рис. 2 приведен график зависимости безусловной вероятности ошибки оценивания $\rho(\tau)$ от ε при $\rho^0 = 0,9055$, $T = 1000$, $\alpha^0 = 0,5$, $p_{00}^{(0)} = 0,7$, $p_{11}^{(0)} = 0,6$, $p_{00}^{(1)} = 0,8$, $p_{11}^{(1)} = 0,2$. На рис. 3 показаны графики плотностей распределений при $\varepsilon = 0,1$.

Из рис. 3 видно, что 10%-ная ошибка в оценивании истинного момента разладки τ^0 возникает с вероятностью не более 0,12. Из рис. 2 и 3 также видно, что при увеличении ε вероятность ошибки различения гипотез экспоненциально уменьшается.

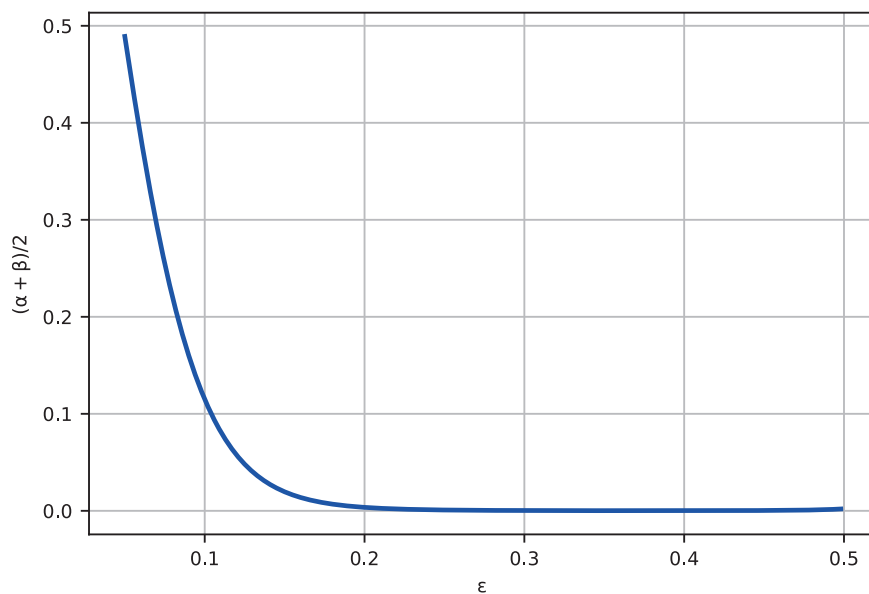


Рис. 2. График зависимости безусловной вероятности ошибки различения гипотез от ε

Fig. 2. Dependence of the unconditional error probability of hypothesis testing on ε

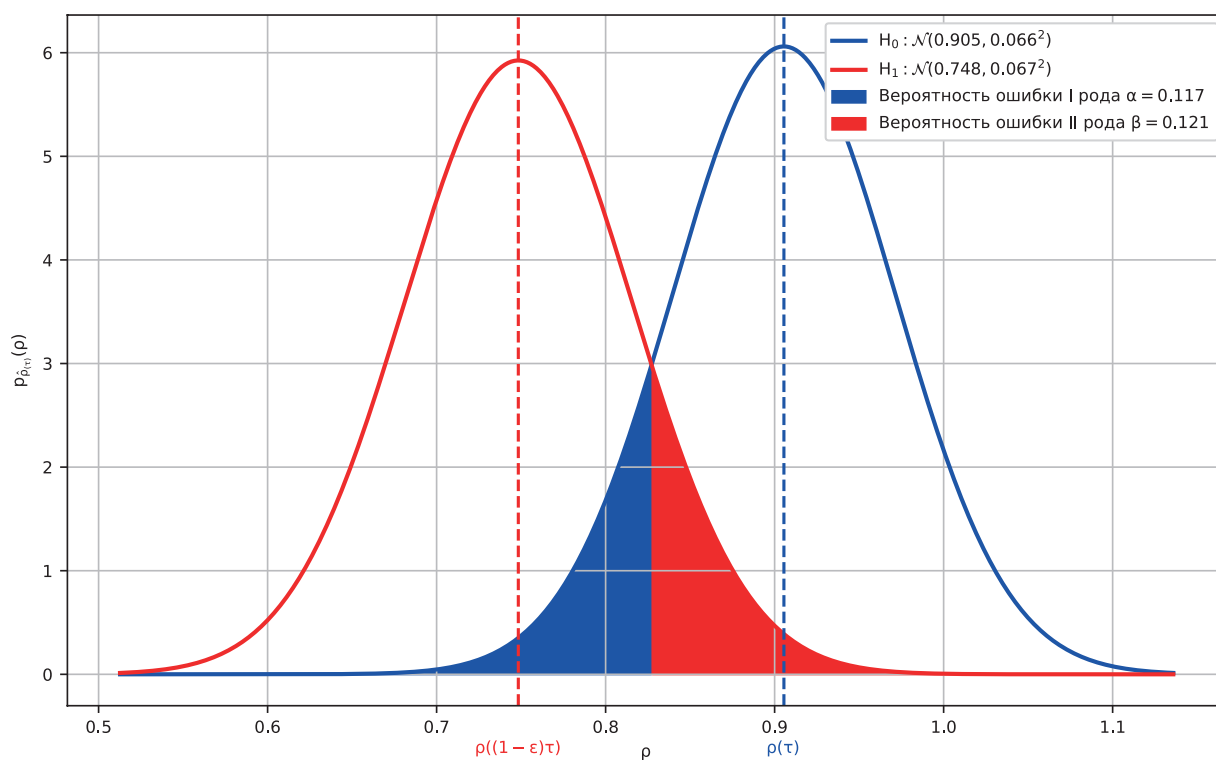


Рис. 3. Графики плотностей распределений при $\varepsilon = 0,1$

Fig. 3. Plots of the probability density functions for $\varepsilon = 0.1$

Компьютерные эксперименты на модельных данных. Для компьютерных экспериментов на модельных данных использовались матрицы переходных вероятностей P_1^0 и P_2^0 с фиксированным значением ρ^0 :

$$P_1^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \theta & \frac{1}{2} - \theta \\ \frac{1}{2} - \theta & \frac{1}{2} + \theta \end{pmatrix}, \quad P_2^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \theta & \frac{1}{2} + \theta \\ \frac{1}{2} + \theta & \frac{1}{2} - \theta \end{pmatrix}, \quad \rho = 16\theta^2, \quad \theta \in [0; 0,5].$$

Методом Монте-Карло оценивалось выборочное среднее абсолютное отклонение оценки $\hat{\tau}$ от τ^0 :

$$\Delta_{\tau^0} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|\hat{\tau}_i - \tau^0|}{T},$$

где $\hat{\tau}_i$ – оценка момента разладки для i -й реализации; n – число реализаций цепи Маркова с заданными P_1^0 , P_2^0 и τ^0 .

В таблице приведены значения оценок Δ_{τ^0} в компьютерных экспериментах для различных значений ρ^0 и τ^0 ; число реализаций цепи Маркова $n = 1000$, $T = 10000$, иллюстрирующие состоятельность оценки $\hat{\tau}$, определяемой (18).

Результаты компьютерных экспериментов на модельных данных

Results of computational experiments on simulated data

ρ^0	τ^0/T								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,2	0,01676	0,01762	0,00373	0,00093	0,00003	0,00073	0,00404	0,02109	0,01951
0,4	0,01498	0,00578	0,00099	0,00055	0,00013	0,00019	0,00081	0,00574	0,01408
0,6	0,01072	0,00197	0,00070	0,00033	0,00010	0,00011	0,00058	0,00215	0,01149
0,8	0,00839	0,00130	0,00046	0,00024	0,00012	0,00005	0,00030	0,00105	0,00854
1,0	0,00683	0,00088	0,00042	0,00022	0,00012	0,00002	0,00018	0,00080	0,00645
1,2	0,00505	0,00071	0,00033	0,00016	0,00008	0,00004	0,00009	0,00059	0,00492
1,4	0,00353	0,00056	0,00022	0,00015	0,00011	0,00006	0,00004	0,00037	0,00343
1,6	0,00232	0,00046	0,00020	0,00012	0,00011	0,00009	0,00000	0,00031	0,00280
1,8	0,00209	0,00036	0,00017	0,00009	0,00010	0,00010	0,00001	0,00022	0,00196
2,0	0,00159	0,00032	0,00014	0,00009	0,00010	0,00011	0,00008	0,00014	0,00154
2,2	0,00115	0,00026	0,00013	0,00007	0,00009	0,00013	0,00008	0,00008	0,00109
2,4	0,00094	0,00024	0,00008	0,00006	0,00010	0,00014	0,00011	0,00002	0,00078
2,6	0,00069	0,00019	0,00007	0,00005	0,00009	0,00015	0,00012	0,00004	0,00057
2,8	0,00052	0,00013	0,00007	0,00004	0,00010	0,00016	0,00015	0,00005	0,00034
3,0	0,00047	0,00012	0,00006	0,00004	0,00010	0,00016	0,00015	0,00007	0,00032
3,2	0,00036	0,00010	0,00004	0,00003	0,00010	0,00017	0,00015	0,00010	0,00017
3,4	0,00022	0,00007	0,00004	0,00002	0,00010	0,00017	0,00016	0,00014	0,00005
3,6	0,00019	0,00004	0,00003	0,00002	0,00010	0,00018	0,00018	0,00016	0,00004
3,8	0,00009	0,00003	0,00001	0,00003	0,00010	0,00018	0,00019	0,00018	0,00012

Заключение. В работе получены следующие основные результаты: 1) построена математическая модель двоичной цепи Маркова с разладкой; 2) разработан алгоритм статистического оценивания момента разладки в случае априорно известных матриц переходных вероятностей P_1 и P_2 ; 3) построены статистические оценки параметров для случая неизвестных матриц переходных вероятностей P_1 и P_2 , доказаны их асимптотические свойства; разработан алгоритм статистического оценивания момента разладки в случае неизвестных матриц переходных вероятностей; 4) проведен анализ точности оценивания момента разладки на основе анализа различимости распределений вероятностей статистик $\hat{\rho}(\tau^0)$ и $\hat{\rho}(\tau)$ в ε -окрестности τ^0 ; 5) проведены

компьютерные эксперименты, иллюстрирующие работоспособность алгоритма оценивания момента разладки.

Перспективные задачи: 1) расширение множества состояний цепи Маркова; 2) повышение порядка цепи Маркова; 3) увеличение числа моментов разладки.

Список использованных источников

1. Харин, Ю. С. Современные тенденции в компьютерном анализе данных / Ю. С. Харин, С. В. Абламейко // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2026. – № 1. – С. 6–15.
2. Statistical analysis of multivariate discrete-valued time series / K. Fokianos, R. Fried, Yu. Kharin, V. Voloshko // Journal of Multivariate Analysis. – 2022. – Vol. 188. – Art. ID 104805. <https://doi.org/10.1016/j.jmva.2021.104805>
3. Kong, J. Poisson Count Time Series / J. Kong, R. Lund // Journal of Time Series Analysis. – 2026. – Vol. 47, № 2. – P. 279–303. <https://doi.org/10.1111/jtsa.12799>
4. Bastian, P. Multiscale detection of practically significant changes in a gradually varying time series / P. Bastian, H. Dette // Electronic Journal of Statistics. – 2026. – Vol. 20, № 1. – P. 138–162. <https://doi.org/10.1214/26-ejs2485>
5. Wang, D. Univariate mean change point detection: Penalization, CUSUM and optimality / D. Wang, Y. Yu, A. Rinaldo // Electronic Journal of Statistics. – 2020. – Vol. 14, № 1. – P. 1917–1961. <https://doi.org/10.1214/26-ejs2485>
6. Kirch, C. Detection of change points in discrete valued time series / C. Kirch, J. Tajdudje Kamgaing // Handbook of Discrete-Valued Time Series. – 2016. – Vol. 8, № 2. – P. 235–255. – <https://doi.org/10.1201/b19485-12>
7. Berchtold, A. High-Order Extensions of the Double Chain Markov Model / A. Berchtold; University of Washington Department of Statistics. – Seattle, 1999. – (Technical Report; N 356). – URL: <https://stat.uw.edu/research/tech-reports/higher-order-extensions-double-chain-markov-model>
8. Харин, Ю. С. Неоднородные цепи Маркова высокого порядка: модели и их вероятностно-статистический анализ / Ю. С. Харин // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2026. – Т. 70, № 3. – С. 191–200. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2026-70-3-191-200>
9. Billingsley, P. Statistical Methods in Markov Chains / P. Billingsley // The Annals of Mathematical Statistics. 1961. – Vol. 32, № 1. – P. 12–40. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177705136>
10. Shiryaev, A. N. Probability / A. N. Shiryaev. – New York: Springer, 1995. – 624 p.
11. Van der Vaart, A. W. Weak Convergence and Empirical Processes: With Applications to Statistics / A. W. Van der Vaart, J. A. Wellner. – New York: Springer, 1996. – XVI, 508 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2545-2>

References

1. Kharin Yu. S., Ablameyko S. V. Current trends in computer data analysis. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika = Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2026, no. 1, pp. 6–15 (in Russian).
2. Fokianos K., Fried R., Kharin Yu., Voloshko V. Statistical analysis of multivariate discrete-valued time series. *Journal of Multivariate Analysis*, 2022, vol. 188, art. ID 104805. <https://doi.org/10.1016/j.jmva.2021.104805>
3. Kong J., Lund R. Poisson Count Time Series. *Journal of Time Series Analysis*, 2026, vol. 47, pp. 279–303. <https://doi.org/10.1111/jtsa.12799>
4. Bastian P., Dette H. Multiscale detection of practically significant changes in a gradually varying time series. *Electronic Journal of Statistics*, 2026, vol. 20, no. 2, pp. 138–162. <https://doi.org/10.1111/jtsa.12799>
5. Wang D., Yu Y., Rinaldo A. Univariate mean change point detection: Penalization, CUSUM and optimality. *Electronic Journal of Statistics*, 2020, vol. 14, no. 1, pp. 1917–1961. <https://doi.org/10.1214/26-ejs2485>
6. Kirch C., Tajdudje Kamgaing J. Detection of change points in discrete valued time series. *Handbook of Discrete-Valued Time Series*, 2016, vol. 8, no. 2, pp. 235–255. <https://doi.org/10.1201/b19485-12>
7. Berchtold A. *High-Order Extensions of the Double Chain Markov Model. Technical Report no. 356*. Seattle, 1999. Available at: <https://stat.uw.edu/research/tech-reports/higher-order-extensions-double-chain-markov-model>
8. Kharin Yu. S. Non-homogeneous high-order Markov chains: models and their probabilistic-statistical analysis. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2026, vol. 70, no. 3, pp. 191–200 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2026-70-3-191-200>
9. Billingsley P. Statistical Methods in Markov Chains. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1961, vol. 32, no. 1, pp. 12–40. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177705136>
10. Shiryaev A. N. *Probability*. New York, Springer, 1995. 624 p.
11. Van der Vaart A. W., Wellner J. A. *Weak Convergence and Empirical Processes: With Applications to Statistics*. New York, Springer, 1996. XVI, 508 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2545-2>

Информация об авторах

Харин Юрий Семенович – академик Национальной академии наук Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, директор, Научно-исследовательский институт прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: kharin@bsu.by

Шибалко Сергей Анатольевич – магистрант, младший научный сотрудник, Научно-исследовательский институт прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: shibalko2003@bk.ru

Information about the authors

Yuriy S. Kharin – Academician of the National Academy of Sciences of Belarus, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Director, Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., Minsk, 220030, Republic of Belarus). E-mail: kharin@bsu.by

Shibalko Siarhei A. – Master Student, Junior Researcher, Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., Minsk, 220030, Republic of Belarus). E-mail: shibalko2003@bk.ru