

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И СИСТЕМЫ
INFORMATION TECHNOLOGIES AND SYSTEMS

УДК 004.932.4

Поступила в редакцию 10.03.2017
Received 10.03.2017

В. М. Артемьев, А. О. Наумов, Л. Л. Кохан

Институт прикладной физики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

**РЕКУРРЕНТНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ
ПОЛЕЙ В УСЛОВИЯХ АПРИОРНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ**

Аннотация. Задача фильтрации случайных динамических полей актуальна для ряда приложений. Для ее решения можно использовать статистический подход на основе теории фильтра Калмана. Из-за большой размерности изображений полей это приводит к сложным уравнениям и требует больших вычислительных затрат, что затрудняет решение задачи в реальном масштабе времени. В данной работе вместо статистического предложено использовать детерминистский подход на основе рекуррентного метода наименьших квадратов. Предполагается, что априорно заданы модель поля, его ковариационные характеристики, а также модель и характеристики результатов измерений. Для получения рекуррентных уравнений фильтрации используется функция потерь, состоящая из двух частей: первая является квадратичным функционалом невязки решения с весом в виде обратной ковариационной матрицы измерений, вторая – квадратичным функционалом разности текущей оценки и ее экстраполяции на следующий момент времени. В результате в явном виде получен алгоритм оптимальной фильтрации, который может быть реализован в реальном масштабе времени со значительно меньшими вычислительными затратами по сравнению с фильтром Калмана. Выведено уравнение для дисперсии ошибок фильтрации, что дает возможность оценить точность фильтрации и сравнить ее с точностью фильтра Калмана. Приведен пример использования предложенной методики.

Ключевые слова: линейная фильтрация, случайные поля, метод наименьших квадратов, фильтр Калмана, априорная статистика, регуляризация

Для цитирования. Артемьев, В. М. Рекуррентная линейная фильтрация случайных динамических полей в условиях априорной неопределенности / В. М. Артемьев, А. О. Наумов, Л. Л. Кохан // Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2017. – №4. – С. 105–111.

V. M. Artemiev, A. O. Naumov, L. L. Kokhan

Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

RECURSIVE LINEAR FILTERING OF THE RANDOM DYNAMIC FIELDS UNDER A PRIORI UNCERTAINTY

Abstract. The task of filtering random dynamic fields is relevant for a number of applications. To solve it, one can use a statistical approach based on the Kalman filter theory. Because of large dimension of the images, this leads to complicated equations and requires large computational costs, which makes it difficult to solve the problem in real time. Instead of statistical, it is suggested to use a deterministic approach based on the recursive least-squares technique. It is assumed that the field model, its covariance characteristics, as well as the model and characteristics of the measurement results are a priori given. To obtain recursive filter equations the loss function is used, which consists of two parts. The first one is the quadratic residual functional of the solution with weight in the form of an inverse covariance measurement matrix. The second one is a quadratic functional of the difference between the current estimation and its extrapolation to the next time point. As a result, an optimal filtering algorithm is obtained in an explicit form, which can be realized in real time with significantly less computational costs compared to the Kalman filter. An equation for the variance of filtering errors is obtained, that allows estimating the accuracy of the proposed filter and its comparison with the accuracy of the Kalman filter. An example of using the proposed methodology is given.

Keywords: linear filtering, random fields, least squares method, Kalman filter, priori statistics, regularization

For citation. Artemiev V. M., Naumov A. O., Kokhan L. L. Recursive linear filtering of the random dynamic fields under a priori uncertainty. *Vesti Natsyonal'noi akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2017, no. 4, pp. 105–111 (in Russian).

Введение. Фильтрация случайных динамических (изменяющихся во времени) полей, измеряемых на фоне шумов, является задачей, часто встречающейся на практике. Полагается, что такие поля обладают временной корреляцией, пространственной ковариацией и задаются посредством стохастических моделей в дискретные моменты времени в пространстве состояний на дискретной сетке с числом строк N и столбцов M . Путем сканирования по строкам и столбцам модель поля может быть отображена посредством вектора $\mathbf{x}_k = [x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{Sk}]^T$, где $S = N \times M$ – размерность поля, $k = 0, 1, 2, \dots$ – дискретное время, а T – символ транспонирования. В линейном случае модель поля описывается следующим стохастическим конечно-разностным уравнением:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_k, \quad (1)$$

где \mathbf{A}_k – переходная матрица поля размерности $S \times S$, а случайный S -мерный вектор $\mathbf{w}_k = [w_{1k}, w_{2k}, \dots, w_{Sk}]^T$ есть формирующее воздействие в виде централизованного дискретного белого шума с ковариационной матрицей \mathbf{Q}_k . Линейные измерения описываются L -мерным вектором $\mathbf{z}_k = [z_{1k}, z_{2k}, \dots, z_{Lk}]^T$ с уравнением

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad (2)$$

где \mathbf{H}_k – матрица измерений размерности $L \times S$, а вектор шумов измерений $\mathbf{v}_k = [v_{1k}, v_{2k}, \dots, v_{Lk}]^T$ полагается централизованным дискретным белым шумом с ковариационной матрицей \mathbf{R}_k , статистически независимым от \mathbf{w}_k .

При сделанных предположениях оптимальная линейная фильтрация поля по критерию минимума дисперсий ошибок фильтрации может быть осуществлена посредством фильтра Калмана (ФК) [1–3]. Эта методика предполагает априорные знания ковариационных характеристик воздействий \mathbf{w}_k и \mathbf{v}_k , и при высокой размерности S , что характерно для случайных полей, реализация ФК в реальном масштабе времени приводит к большим вычислительным затратам. На практике априорные статистические характеристики поля, как правило, известны не полностью, и возникает задача синтеза фильтров в условиях неопределенности. В настоящей работе полагается, что модели поля (1) и измерений (2) известны, а неизвестными являются ковариационные матрицы \mathbf{Q}_k и \mathbf{R}_k . В такой постановке задача решалась методами робастной [4, 5] и адаптивной [6, 7] фильтрации на основе статистического подхода. Но их применение для фильтрации случайных динамических полей также требует чрезмерных вычислительных затрат.

В данной работе предлагается использовать детерминистский подход на основе метода наименьших квадратов (МНК) [8], требующий значительно меньшего объема вычислительных затрат и априорной статистики. Однако классический подход на этой основе приводит к синтезу фильтров с независимыми во времени оценками или непрерывно растущей размерностью, что обычно неприемлемо на практике. Рассмотрим рекуррентный МНК (РМНК), который позволяет получать решения в рекуррентной форме, используя некоторые эмпирические представления о характеристиках входных воздействий. Подобный подход дает возможность существенно снизить вычислительные затраты, но синтезированный таким методом фильтр наименьших квадратов (ФНК) приводит к увеличению ошибок фильтрации по сравнению с ФК. Далее приводится методика синтеза ФНК и на конкретном примере дается оценка его точности в сравнении с ФК.

Уравнение фильтра. Задача состоит в нахождении уравнения оценки вектора поля $\hat{\mathbf{x}}_k = [\hat{x}_{1k}, \hat{x}_{2k}, \dots, \hat{x}_{Sk}]^T$ по результатам измерений (2) в детерминистской постановке с использованием РМНК. В основе методики синтеза лежит выбор критерия оптимальности, который должен приводить как к пространственной, так и временной фильтрации. При классической методике синтеза МНК в качестве критерия используется квадратичная форма невязки $(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k)^T (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k)$, зависящая от текущей оценки $\hat{\mathbf{x}}_k$ и обеспечивающая пространственную фильтрацию [9]. Для учета временных изменений поля предлагается в состав критерия включить дополнительную сглаживающую квадратичную форму, которая зависит от вектора оценки $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ на предыдущем шаге фильтрации. Вариантом такой формы может быть выражение $(\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1})^T (\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1})$, где $\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1} = [\hat{x}_{1,k,k-1}, \hat{x}_{2,k,k-1}, \dots, \hat{x}_{S,k,k-1}]^T$ есть экстраполирующий вектор поля текущей оценки $\hat{\mathbf{x}}_k$, полученный на основе результатов предыдущей оценки $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$. В итоге рекуррентный критерий оптимальности принимает вид квадратичного функционала:

$$J_k(\hat{\mathbf{x}}_k) = (1 - \alpha)(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k)^T (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k) + \alpha(\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1})^T (\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (3)$$

Этот критерий определяет текущие потери при пространственно-временной фильтрации и является основой РМНК. Здесь первое слагаемое учитывает влияние измерения \mathbf{z}_k на величину оценки $\hat{\mathbf{x}}_k$, второе является сглаживающим функционалом, позволяющим согласовать текущую оценку с оценкой на предыдущем шаге фильтрации. Выбором величины коэффициента $0 < \alpha < 1$ можно регулировать вес слагаемых критерия и обеспечивать регуляризацию решения. Величина этого коэффициента выбирается из эмпирических представлений об отношении сигнала к шумам. Эмпирические данные следуют из физического смысла задачи, результатов моделирования и экспериментов.

Оптимальную оценку $\hat{\mathbf{x}}_k$ можно получить из условия минимума критерия (3), необходимое условие которого выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial J_k(\hat{\mathbf{x}}_k)}{\partial \hat{\mathbf{x}}_k} = -2(1 - \alpha)\mathbf{H}_k^T (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k) + 2\alpha(\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}) = 0.$$

Его решение приводит к уравнению оптимального ФНК на основе РМНК, которое имеет вид

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{K}_{1k} \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1} + \mathbf{K}_{0k} \mathbf{z}_k. \quad (4)$$

Здесь матричный коэффициент усиления \mathbf{K}_{0k} имеет размерность $L \times S$ и выражается следующим образом:

$$\mathbf{K}_{0k} = (1 - \alpha) \left(\alpha \mathbf{I} + (1 - \alpha) \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k \right)^{-1} \mathbf{H}_k^T, \quad (5)$$

а матричный коэффициент \mathbf{K}_{1k} размерности $S \times S$ равен

$$\mathbf{K}_{1k} = \alpha \left(\alpha \mathbf{I} + (1 - \alpha) \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k \right)^{-1}. \quad (6)$$

В этих выражениях \mathbf{I} есть единичная матрица, а символ « -1 » определяет операцию обращения матрицы. Поскольку матрица $\mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k$ неотрицательно определена, то матрица $(\alpha \mathbf{I} + (1 - \alpha) \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k)$ будет положительно определенной, и поэтому существует матрица ей обратная. При $\alpha = 0$ уравнение (4) принимает вид $\hat{\mathbf{x}}_k = (\mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k)^{-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{z}_k$, соответствующий классическому фильтру МНК при независимых во времени оценках [9].

Путем эквивалентных преобразований уравнение (4) может быть приведено к структуре фильтра с обратной связью типа ФК, для чего представляется в виде

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{K}_{1k}^* \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1} + \mathbf{K}_{0k}^* \left[\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{K}_{1k}^* \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1} \right]. \quad (7)$$

Приравнивая правые части уравнений (4) и (7) с учетом выражений (5) и (6) после группировки слагаемых получаем следующие выражения для матричных коэффициентов усиления фильтра с обратной связью $\mathbf{K}_{0k}^* = \mathbf{K}_{0k}$, $\mathbf{K}_{1k}^* = \mathbf{I}$. В итоге уравнение ФНК принимает вид

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1} + \mathbf{K}_{0k} \left[\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1} \right], \quad (8)$$

откуда следует, что $\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}$ есть вектор экстраполяции поля, как у ФК. Из полученных формул для коэффициентов усиления ФНК видно, что они не зависят от ковариационных матриц воздействий \mathbf{Q}_k и \mathbf{R}_k , и это существенно снижает объем вычислительных затрат. Для линейной модели поля (1) вектор экстраполяции, как и у ФК, выбирается в виде

$$\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1} = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}. \quad (9)$$

Дисперсии ошибок ФНК. Критерий (3) определяет величину потерь фильтрации при детерминистском подходе, и синтезированный ФНК будет оптимальным по этому критерию. При статистическом подходе качество фильтрации оценивается величиной дисперсии ошибки фильтрации, и оптимальным фильтром в классе линейных является ФК. Представляет интерес

сравнение дисперсий ошибок обоих типов фильтров при одинаковых исходных данных, что дает возможность оценки потерь за счет неучета априорной статистики, поскольку дисперсия ошибки ФНК будет выше, чем у ФК.

Ошибка фильтрации определяется выражением $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k$. После подстановки формул (1), (4) и группировки слагаемых можно получить уравнение

$$\mathbf{e}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{0k} \mathbf{H}_k) \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{0k} \mathbf{H}_k) \mathbf{A}_k \mathbf{e}_{k-1} - \mathbf{K}_{1k} \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1} + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{0k} \mathbf{H}_k) \mathbf{w}_k - \mathbf{K}_{0k} \mathbf{v}_k.$$

После использования формулы (5) матрица $(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{0k} \mathbf{H}_k)$ преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{0k} \mathbf{H}_k) &= \left(\alpha \mathbf{I} + (1 - \alpha) \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k \right)^{-1} \left(\alpha \mathbf{I} + (1 - \alpha) \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k \right) \times \\ &\times \left[\mathbf{I} - (1 - \alpha) \left(\alpha \mathbf{I} + (1 - \alpha) \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k \right)^{-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k \right] = \alpha \left(\alpha \mathbf{I} + (1 - \alpha) \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k \right)^{-1} = \mathbf{K}_{1k}, \end{aligned}$$

что следует из формулы (6). Для линейной модели поля (1) после подстановки (9) уравнение ошибки ФНК принимает вид

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{K}_{1k} \mathbf{A}_k \mathbf{e}_{k-1} + \mathbf{K}_{1k} \mathbf{w}_k - \mathbf{K}_{0k} \mathbf{v}_k. \quad (10)$$

При нулевом математическом ожидании ошибки ковариационная матрица ошибки $\mathbf{P}_{e,k} = \langle \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T \rangle$, где треугольные скобки обозначают операцию нахождения математического ожидания. При статистически независимых белых шумах \mathbf{w}_k и \mathbf{v}_k , а также учитывая независимость ошибки \mathbf{e}_{k-1} в момент $k-1$ от белых шумов в последующий момент времени k , уравнение для ковариационной матрицы ошибки ФНК выражается следующим образом:

$$\mathbf{P}_{e,k} = \mathbf{K}_{1k} \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{e,k-1} \mathbf{A}_k^T \mathbf{K}_{1k}^T + \mathbf{K}_{1k} \mathbf{Q}_k \mathbf{K}_{1k}^T + \mathbf{K}_{0k} \mathbf{R}_k \mathbf{K}_{0k}^T. \quad (11)$$

Это уравнение является автономным, не зависящим от уравнения оценки, как и у ФК. Диагональные элементы матрицы $\mathbf{P}_{e,k}$ определяют дисперсии ошибок фильтрации составляющих вектора поля. Важно отметить, что в выражения для коэффициентов усиления ФНК (5) и (6) ковариационная матрица (11) не входит, что снижает объем вычислительных затрат по сравнению с ФК.

Сравнение точности ФНК и ФК. Сравнительную оценку точности по величинам дисперсий ошибок у ФНК и ФК проведем на следующем примере. Полагаем переходную матрицу модели поля диагональной, равной $\mathbf{A}_k = a_k \mathbf{I}$ ($0 < a_k < 1$). Такое поле относится к классу полей без пространственной динамики [3], и его ковариационная матрица формируется лишь посредством ковариационной матрицы формирующего воздействия \mathbf{Q}_k . Рассмотрим случай, когда матрица измерений $\mathbf{H}_k = h_k \mathbf{I}$ и ковариационная матрица шумов измерений равна $\mathbf{R}_k = \sigma_{vk}^2 \mathbf{I}$, где σ_{vk}^2 – дисперсия составляющих вектора шумов. Для этого примера ковариационная матрица ошибок фильтрации ФНК (11) с учетом выражений для коэффициентов усиления (5) и (6) имеет вид

$$\mathbf{P}_{e,k} = \frac{1}{\left(\alpha + (1 - \alpha) h_k^2 \right)^2} \left[\alpha^2 a_k^2 \mathbf{P}_{e,k-1} + \alpha^2 \mathbf{Q}_k + (1 - \alpha)^2 h_k^2 \sigma_{vk}^2 \mathbf{I} \right]. \quad (12)$$

При постоянных параметрах $a_k = a$, $h_k = h$, $\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}$, $\sigma_{vk}^2 = \sigma_v^2$ в установившемся режиме ковариационная матрица ошибки будет постоянной $\mathbf{P}_{e,k} = \mathbf{P}_e$ и равной

$$\mathbf{P}_e = \frac{1}{\left(\alpha + (1 - \alpha) h^2 \right)^2} \left[\alpha^2 \mathbf{Q} + (1 - \alpha)^2 h^2 \sigma_v^2 \mathbf{I} \right]. \quad (13)$$

Дисперсии ошибок фильтрации ФНК составляющих поля являются диагональными элементами матрицы (13). Выбор величины весового коэффициента α осуществляется из условия минимизации дисперсии ошибки с учетом регуляризации решения.

При моделировании размерность поля полагалась равной $S = 64 \times 64$ и использовалась ковариационная функция поля в виде осесимметричной двухмерной гауссовой функции с интервалом ковариации 16 единиц на уровне 0,1 от максимума.

Дисперсия поля обозначается символом σ_x^2 , величина $\rho = \sigma_x/\sigma_y$ есть отношение сигнала к шумам, коэффициент a модели поля выбирался равным 0,95, что соответствует длительности корреляции $\tau_x = 19$, а дисперсия задавалась величиной $\sigma_x^2 = 0,04$. Измерение поля проводилось с параметром $h = 1$. На рис. 1, *a* приведены фрагменты результатов моделирования поля для моментов времени $k = 1, 2, 5, 10, 20$. На рис 1, *b* показаны результаты измерений при отношении сигнала к шумам $\rho = 3$.

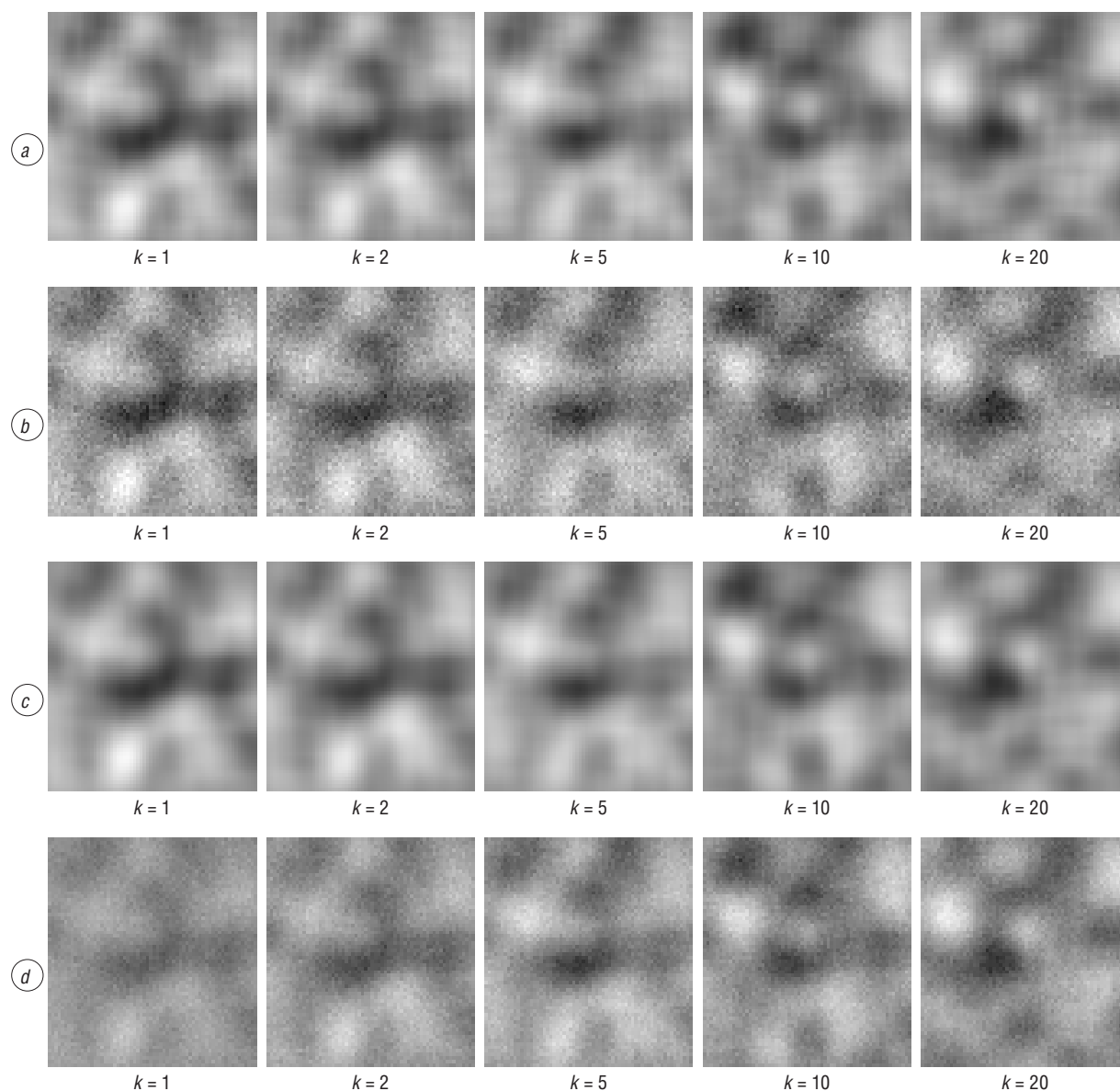


Рис. 1. Фрагменты изображений случайного динамического поля: *a* – исходное изображение, *b* – результаты его измерений, *c* – фильтрация посредством ФК, *d* – фильтрация посредством ФНК

Fig. 1. Fragments of the random dynamic field images: *a* – original image, *b* – results of its measurements, *c* – filtering by Kalman filter, *d* – filtering by Least Squares filter

Фильтрация посредством ФК (рис. 1, *c*) проводилась по известной методике, а посредством ФНК (рис. 1, *d*) – по методике, описанной выше, при $\alpha = 0,5$. Эти рисунки позволяют качественно сравнить результаты фильтрации посредством ФК и ФНК.

На рис. 2 сплошными линиями приведены графики зависимости относительных среднеквадратических отклонений (СКО) ошибок фильтрации $\varepsilon_{\text{ФНК}} = \sigma_e/\sigma_x$ от величины параметра α при различных отношении сигнала к шумам ρ . Пунктиром показаны значения относительных среднеквадратических отклонений ошибок $\varepsilon_{\text{ФК}}$ при тех же условиях.

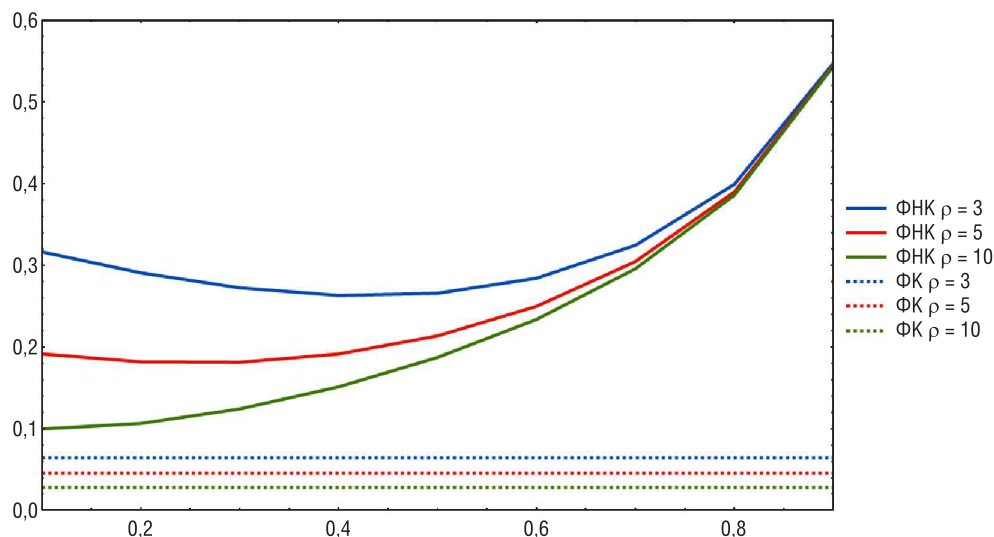


Рис. 2. Относительные величины СКО ошибок фильтрации ФНК и ФК при различных значениях параметра α и отношениях сигнала к шумам ρ

Fig. 2. Relative RMS values of filtering error using Kalman filter and Least Squares filter for different values of the parameter α and signal-to-noise ratio ρ

Из рис. 2 видно, насколько увеличивается дисперсия ошибки ФНК за счет неучета априорной информации о ковариационных характеристиках воздействий. При больших отношениях сигнала к шумам величина коэффициента α близка к нулю. Это говорит о том, что оптимальная оценка близка к случаю независимых оценок. При меньшем отношении сигнала к шумам проявляется оптимальное значение коэффициента α . Следует отметить, что модель поля без пространственной динамики дает наибольшую разницу дисперсий ошибок ФНК и ФК, так как ковариационная характеристика поля формируется лишь посредством ковариационной характеристики формирующего воздействия, которая не учитывается при синтезе ФНК.

Заключение. Использование фильтра Калмана (ФК) для фильтрации в реальном масштабе времени результатов измерений случайных динамических полей трудно реализуемо из-за больших вычислительных затрат. Кроме того, его синтез требует знания априорных статистических характеристик воздействий, что на практике не всегда доступно. Предложен альтернативный подход к решению этой задачи, приводящий к меньшему объему вычислительных затрат и требуемых априорных знаний. Для этого использован детерминистский подход на основе рекуррентного метода наименьших квадратов. Приводится методика синтеза линейных фильтров при неизвестных статистических характеристиках воздействий, формирующих модели полей. В состав уравнений фильтра входит параметр α , выбираемый из эмпирических представлений об отношении сигнала к шумам. Качественно можно отметить, что при большом отношении сигнала к шумам предпочтение следует отдавать результатам измерений и выбирать $\alpha < 0,5$. При малом отношении сигнала к шумам возрастает роль сглаживания решения и α следует увеличивать.

Использование детерминистского подхода приводит к увеличению дисперсии ошибок фильтрации по сравнению с ФК, что требует от пользователя выбора между снижением вычислительных затрат и точностью фильтрации. В дальнейшем представляет интерес расширение детерминистского подхода на нелинейные модели случайных динамических полей.

Список использованных источников

1. Дубенко, Т.И. Фильтр Калмана для случайных полей / Т.И. Дубенко // Автоматика и телемеханика. – 1978. – №4. – С. 37–40.
2. Красовский, А.А. Оценивание стационарного поля при размытом изображении / А.А. Красовский // Докл. Акад. наук СССР. – 1979. – Т. 249, №5. – С. 1071–1073.
3. Артемьев, В.М. Реконструкция динамических изображений в томографии процессов / В.М. Артемьев, А.О. Наумов, Г.-Р. Йениш. – Минск: Изд. центр БГУ, 2004. – 168 с.

4. Ершов, А. А. Робастный фильтр Калмана в дискретном времени / А. А. Ершов, Р. Ш. Липцер // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 3. – С. 60–70.
5. Lewis, F. L. Optimal and Robust Estimation: With an Introduction to Stochastic Control Theory / F. L. Lewis, L. Xie, D. Popa. – CRC Press, 2008. – 552 p.
6. Шильман, С. В. Адаптивно-оптимальная фильтрация случайных процессов / С. В. Шильман // Автоматика и телемеханика. – 1986. – № 2. – С. 113–126.
7. Haykin, S. Adaptive Filter Theory / S. Haykin. – New Jersey: Prentice Hall, 1996. – 997 p.
8. Эльясберг, Л. Е. Определение движения по результатам измерений / Л. Е. Эльясберг. – М.: Наука, 1976. – 267 с.
9. Simon, D. Optimal State Estimation: Kalman, H-infinity, and Nonlinear Approaches / D. Simon. – John Wiley & Sons, 2006. – 482 p.

References

1. Dubenko T. I. Kalman Filter for random fields. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 1978, no. 4, pp. 37–40 (in Russian).
2. Krasovskii A. A. Estimation of the stationary field in a blurred image. *Doklady Akademii nauk SSSR = Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1979, vol. 249, no. 5, pp. 1071–1073 (in Russian).
3. Artemiev V. M., Naumov A. O., Jaenisch G.-R. *Dynamic image reconstruction for process tomography*. Minsk, BSU Publ., 2004. 168 p. (in Russian).
4. Ershov A. A., Liptser R. Sh. Robust Kalman filter in discrete time. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 1978, no. 3, pp. 60–70 (in Russian).
5. Lewis F. L., Xie L., Popa D. *Optimal and Robust Estimation: With an Introduction to Stochastic Control Theory*. CRC Press, 2008. 552 p.
6. Shilman S. V. Adaptive-optimal filtering of random processes. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 1986, no. 2, pp. 113–126 (in Russian).
7. Haykin S. *Adaptive Filter Theory*. New Jersey, Prentice Hall, 1996. 997 p.
8. Elyasberg L. E. *Determination of movement from measurements results*. Moscow, Nauka Publ., 1976. 267 p. (in Russian).
9. Simon D. *Optimal State Estimation: Kalman, H-infinity, and Nonlinear Approaches*. John Wiley & Sons, 2006. 482 p. Doi: 10.1002/0470045345

Информация об авторах

Артемьев Валентин Михайлович – член-корреспондент Национальной академии наук Беларуси, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт прикладной физики Национальной академии наук Беларуси (ул. Академическая 16, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: artemiev@iaph.bas-net.by

Наумов Александр Олегович – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией радиотомографии, Институт прикладной физики Национальной академии наук Беларуси (ул. Академическая 16, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: naumov@iaph.bas-net.by

Кохан Леонид Леонидович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики Национальной академии наук Беларуси (ул. Академическая 16, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: kokhanll@iaph.bas-net.by

Information about the authors

Valentin M. Artemiev – Corresponding Member of National Academy of Sciences of Belarus, D. Sc. (Engineering), Professor, Chief Researcher, Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (16, Akademicheskaya Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: artemiev@iaph.bas-net.by

Alexander O. Naumov – Ph. D. (Physics and Mathematics), Head of Laboratory, Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (16, Akademicheskaya Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: naumov@iaph.bas-net.by

Leonid L. Kokhan – Ph. D. (Engineering), Senior Researcher, Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (16, Akademicheskaya Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kokhanll@iaph.bas-net.by