

ВЕСЦІ

НАЦЫЯНАЛЬнай АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ

СЕРЫЯ ФІЗІКА-ТЭХНІЧНЫХ НАВУК. 2017. № 4

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 2017. № 4

Журнал издается с января 1956 г.

Выходит четыре раза в год

Учредитель – Национальная академия наук Беларуси

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь,
свидетельство о регистрации № 391 от 18 мая 2009 г.

Главный редактор:

Петр Александрович Витязь –
Президиум Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

Редакционная коллегия:

- А. П. Ласковнѐв** (*заместитель главного редактора*) – Президиум Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- И. А. Старостина** (*ведущий редактор журнала*)
- А. В. Белый** – Физико-технический институт Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- В. Г. Залесский** – Физико-технический институт Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- А. Ф. Ильющенко** – Государственное научно-производственное объединение порошковой металлургии, Минск, Беларусь
- Л. Г. Красневский** – Объединенный институт машиностроения Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- Е. И. Марукович** – Институт технологии металлов Национальной академии наук Беларуси, Могилев, Беларусь
- Н. К. Мышкин** – Институт механики металлополимерных систем имени В. А. Белого Национальной академии наук Беларуси, Гомель, Беларусь
- О. Г. Пенязьков** – Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

Ю. М. Плескачевский – Президиум Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
В. М. Федосюк – Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению, Минск, Беларусь
М. Л. Хейфец – Президиум Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
С. А. Чижик – Президиум Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

Редакционный совет:

С. Воденичаров – Институт металловедения, оборудования и технологий «Академик Ангел Балевский» с Центром по гидро- и аэродинамике Болгарской академии наук, София, Болгария
Ю. Гавлик – Институт технологии машиностроения и автоматизации производства Краковской политехники (Технологический университет), Краков, Польша
Г. Жинтялис – Литовская академия наук, Вильнюс, Литва
Б. Каталинич – Дунайско-Адриатическая Ассоциация по автоматизации и производству (ДАААМ), Венский технический университет, Вена, Австрия
В. В. Клубович – Институт технической акустики Национальной академии наук Беларуси, Витебск, Беларусь
А. А. Михалевич – Институт энергетики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
А. Г. Наумовец – Национальная академия наук Украины, Киев, Украина
К. А. Солнцев – Институт металлургии и материаловедения имени А. А. Байкова, Москва, Россия
Л. Танович – Белградский университет, Белград, Сербия
Б. М. Хрусталёв – Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь

Журнал рецензируется. Входит в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований, включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ)

*Адрес редакции:
ул. Академическая, 1, к. 119, 220072, г. Минск, Республика Беларусь.
Тел.: + 375 17 284-19-19; e-mail: ftvesti@mail.ru
vestift.belnauka.by*

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ.

Серия физико-технических наук. 2017. №4

Выходит на русском, белорусском и английском языках

Редактор *И. А. Старостина*
Компьютерная верстка *А. В. Новик*

Подписано в печать 22.12.2017. Выход в свет 27.12.2017. Формат 60×84 1/8. Бумага офсетная.
Печать цифровая. Усл. печ. л. 14,88. Уч.-изд. л. 16,4. Тираж 86 экз. Заказ 265.
Цена номера: индивидуальная подписка – 10,34 руб., ведомственная подписка – 25,29 руб.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Республиканское унитарное предприятие «Издательский дом «Беларуская навука».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий №1/18 от 02.08.2013. ЛП №02330/455 от 30.12.2013. Ул. Ф. Скорины, 40, 220141, г. Минск, Республика Беларусь

© РУП «Издательский дом «Беларуская навука»,
Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-тэхнічных навук, 2017

PROCEEDINGS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

PHYSICAL-TECHNICAL SERIES. 2017. no. 4

The Journal has been published since January 1956

Issued four times a year

Founder is the National Academy of Sciences of Belarus

The Journal was registered on May 18, 2009 by the Ministry of Information of the Republic of Belarus
in the State Registry of Mass Media, reg. No. 391

Editor-in-Chief:

Pyotr A. Vityaz – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Editorial Board:

Aleksandr P. Laskovnev – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
(*Associate Editor-in-Chief*)

Irina A. Starostsina (*lead editor*)

Aleksei V. Byeli – Physical-Engineering Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Vitaliy G. Zalesky – Physical-Engineering Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Aleksandr F. Ilyuschenko – State Scientific and Production Amalgamation of Powder Metallurgy, Minsk, Belarus

Leonid G. Krasnevski – Joint Institute of Mechanical Engineering of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Evgenii I. Marukovich – Institute of Technology of Metals of the National Academy of Sciences of Belarus, Mogilev, Belarus

Nikolai K. Myshkin – V. A. Bielyi Institute of Mechanics of Metal-Polymer Systems of the National Academy of Sciences of Belarus, Gomel, Belarus

Oleg G. Penyazkov – A. V. Lykov Institute of Heat and Mass Transfer of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Yury M. Pleskachevsky – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Valeri M. Fedosyuk – Scientific and Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Mikhail L. Kheiyfets – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Sergey A. Chizhik – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Editorial Council:

Stephan Vodenicharov – Institute of Metal Science, Equipment and Technologies “Acad. A. Balevski”
with Hydro- and Aerodynamics Centre of Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria

Jozef Gawlik – Institute for Manufacturing Engineering and Automation of Cracow University
of Technology, Poland

Gintautas Žintelis – Lithuanian Academy of Sciences, Vilnius, Lithuania
Branko Katalinic – DAAAM International Vienna, TU Wien, Wien, Austria
Vladimir V. Klubovich – Institute of Technical Acoustics of the National Academy of Sciences of Belarus,
Vitebsk, Belarus
Aleksandr A. Mikhalevich – Institute of Power of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk,
Belarus
Anton G. Naumovets – national academy of sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine
Konstantsin A. Solntsev – A. A. Baikov Institute of Metallurgy and Material Science of the Russian Academy
of Sciences, Moskow, Russia
Lyubodrag Tanovich – University of Belgrade, Belgrade, Serbia
Boris M. Khrustalyov – Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus

*The Journal is included in The List of Journals for Publication of the Results
of Dissertation Research in the Republic of Belarus and in the database
of Russian Science Citation Index (RSCI)*

*Address of the Editorial Office:
1, Akademicheskaya str., room 119, 220072, Minsk, Republic of Belarus.
Tel.: + 375 17 284-19-19; e-mail: ftvesti@mail.ru
vestift.belnauka.by*

PROCEEDING OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS.
Physical-technical series, 2017, no. 4

Printed in Russian, Belarusian and English languages

Editor *I. A. Starostina*
Computer imposition *A. V. Novik*

It is sent of the press 22.12.2017. Appearance 27.12.2017. Format 60×84 1/8. Offset paper. The press digital.
Printed pages 14,88. Publisher's signatures 16,4. Circulation 86 copies. Order 265.
Number price: individual subscription – 10,34 byn., departmental subscription – 25,29 byn.

Publisher and printing execution:
Republican unitary enterprise "Publishing House "Belaruskaya Navuka"
Certificate on the state registration of the publisher, manufacturer, distributor of printing editions No. 1/18 dated August 2,
2013. License for the press No. 02330/455 dated December 30, 2013. Address: 40, F. Scorina Str., Minsk, 220141,
Republic of Belarus.

© RUE "Publishing House "Belaruskaya Navuka",
Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ, МЕТАЛЛУРГИЯ

Витязь П. А., Ильющенко А. Ф., Савич В. В., Соболев С. Ф., Чурик М. И. Получение высокопрочных деформируемых алюминиевых сплавов типа АМг10	7
Белый А. В., Карпович А. Н., Ковальчук Е. В., Тявловский А. К. Работа выхода электрона и физико-химические свойства поверхностных слоев ионно-легированного твердого сплава ВК6	17
Богданова В. В., Арестович Д. Н., Кирлица В. П. Исследование основных рецептурных факторов, оказывающих доминирующее влияние на термоизолирующую способность и атмосферостойкость огнезащитных покрытий	24
Матковская Л. К., Юрженко М. В., Мамуня Е. П., Буато Ж. Взаимосвязь между структурой, электрическими и диэлектрическими свойствами ионопроводящих полимерных композитов на основе эпоксидных олигомеров и соли перхлората лития.	32

МАШИНОСТРОЕНИЕ, МЕХАНИКА

Крень А. П., Рудницкий В. А., Зинькевич Н. В. Моделирование ударного контакта индентора с нежесткими стальными конструкциями при измерении твердости	38
---	----

ЭНЕРГЕТИКА, ТЕПЛО- И МАССООБМЕН

Ольшанский А. И., Жерносек С. В., Ольшанский В. И. Кинетика теплообмена по экспериментальным данным влагообмена в процессе конвективной сушки тонких плоских материалов	46
Кузьмич М. А., Журавлёв А. С., Хуухэнхуу Б. Влияние сил гравитации на параметры пародинамического термосифона	55
Мельников А. С., Попов Б. И. Аналитическое представление графика продолжительности электрической нагрузки для оптимизационных исследований	63

РАДИОЭЛЕКТРОНИКА И ПРИБОРОСТРОЕНИЕ

Костромницкий С. М., Шамович Э. И. Исследование способов постановки помех приемникам систем глобальной навигации, устойчивых к подавлению средствами когерентной автокомпенсации	68
Тузлуков В. П. Линейное суммирование сигналов равной мощности, передаваемых посредством обобщенного канала связи с замираниями	80
Беленкевич Н. И., Ильинков В. А. Совместное описание сигналов, линейных звеньев и реакций систем телекоммуникаций и радиоэлектроники	93

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И СИСТЕМЫ

Артемьев В. М., Наумов А. О., Кохан Л. Л. Рекуррентная линейная фильтрация случайных динамических полей в условиях априорной неопределенности	105
Першина Ю. И., Шилин А. В. Решение 3D-задачи компьютерной томографии по известным томограммам на системе произвольных плоскостей	112
Васильева Ю. Д. Разработка прогнозируемой трехмерной модели лица пациента после лечения зубочелюстных аномалий	122

CONTENTS**MATERIALS ENGINEERING, METALLURGY**

Vityaz P. A., Ilyushenko A. Ph., Sobol S. Ph., Savich V. V., Churik M. N. Producing high-strength deformable aluminum alloys of type AMg10	7
Byeli A. V., Karpovich A. N., Kovalchuk E. V., Tyavlovsky A. K. Electron work function and physical-chemical properties of surfaces layers of ion-doped hard alloy BK6	17
Bogdanova V. V., Arestovich D. N., Kirlica V. P. Research of main recipe factors providing a dominant impact on the thermal insulating capacity and atmospheric resistance of fire protective coatings	24
Matkovska L. K., Iurzhenko M. V., Mamunya Ye. P., Boiteux G. The relationship between structure, electrical and dielectric properties of the ion-conducting polymer composites based on the epoxy oligomers and the lithium perchlorate salts	32

MECHANICAL ENGINEERING AND MECHANICS

Kren A. P., Rudnitsky V. A., Zinkevich N. V. Modeling of impact contact of indenter and non-rigid steel constructions during measurement of hardness	38
---	----

POWER ENGINEERING, HEAT AND MASS TRANSFER

Ol'shanskii A. I., Zhernosek S. V., Ol'shanskii V. I. The kinetics of heat transfer using experimental data of moisture exchange in the process of convective drying of thin flat materials	46
Kuzmich M. A., Zhuravlyov A. S., Khuukhenkhuu B. Impact of gravity force on heat transfer characteristics of vaporodynamic thermosiphon	55
Melnikov A. S., Popov B. I. Analytical representation of electrical load duration curve for optimization research	63

RADIOELECTRONICS AND INSTRUMENT-MAKING

Kostromitsky S. M., Shamovich E. I. Researching the GNSS receiver jammers that are resistant to suppression through employment of coherent automatic jamming cancelers	68
Tuzlukov V. P. Equal gain combining over generalized fading channels	80
Belenkevich N. I., Ilyinkov V. A. The compatible description of signals, linear links and responses of telecommunications and radioelectronics systems	93

INFORMATION TECHNOLOGIES AND SYSTEMS

Artemiev V. M., Naumov A. O., Kokhan L. L. Recursive linear filtering of the random dynamic fields under a priori uncertainty	105
Pershyna Iu. I., Shylin O. V. The solution to the 3D problem of computer tomography with known tomograms on the system of arbitrary planes	112
Vasilyeva Yu. D. Development of a predicted three-dimensional model of patient's face after the treatment of dental alveolar anomalies	122

МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ, МЕТАЛЛУРГИЯ**MATERIALS ENGINEERING, METALLURGY**

УДК 621.74.01:621.771.02

Поступила в редакцию 19.04.2017

Received 19.04.2017

П. А. Витязь¹, А. Ф. Ильющенко^{2,3}, С. Ф. Соболев⁴, В. В. Савич³, М. Н. Чурик⁴¹*Президиум Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*²*ГНПО порошковой металлургии, Минск, Беларусь*³*Институт порошковой металлургии, Минск, Беларусь*⁴*СЗАО «БелМетКомпозит», Минск, Беларусь***ПОЛУЧЕНИЕ ВЫСОКОПРОЧНЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ АЛЮМИНИЕВЫХ СПЛАВОВ
ТИПА АМг10**

Аннотация. Традиционные марки алюминиевых сплавов не всегда могут обеспечить выполнение требований современной ракетно-космической и авиационной техники. Литейные сплавы системы Al–Si из-за структурных особенностей – грубых хрупких включений кремния и интерметаллических фаз, имеют невысокий уровень прочностных свойств и низкую пластичность, не позволяющую проводить их обработку давлением. Предложена технология создания высокопрочных алюминиевых сплавов, заключающаяся в получении кольцевых заготовок методом направленной кристаллизации расплава при наложении нестационарных силовых полей центробежных сил и одновременном введении модификаторов. Полученные заготовки имеют микроструктуру и пластичность, позволяющую подвергать их раскатке, и форму трубных заготовок, механическая прочность которых соизмерима с конструкционной сталью. Технология включает в себя гидротермальный синтез наноструктурированных частиц оксида алюминия, которые перед введением в расплав алюминиевого сплава перегреваются выше температуры расплава, что повышает полноту протекания процессов интеркристаллического упрочнения при минимальных колебаниях по объему упрочненного материала внутренних напряжений. Материалы имеют предел прочности до 380 МПа (до модификации нанодисперсным оксидом алюминия – 210 МПа). В микроструктуре наблюдается изменение игольчатой дендритной составляющей, которая становится более дисперсной и равноосной, что и приводит к повышению механической прочности в 1,25–1,32 раза.

Ключевые слова: алюминий, сплав АМг10, расплав, легирование, термообработка, микроструктура

Для цитирования. Получение высокопрочных деформируемых алюминиевых сплавов типа АМг10 / П. А. Витязь [и др.] // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2017. – №4. – С. 7–16.

P. A. Vityaz¹, A. Ph. Ilyushenko^{2,3}, S. Ph. Sobol⁴, V. V. Savich³, M. N. Churik⁴¹*Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*²*SSPA Powder Metallurgy, Minsk, Belarus*³*Institute of Powder Metallurgy, Minsk, Belarus*⁴*Joint Closed Joint-Stock Company “BelMetComposite”, Minsk, Belarus***PRODUCING HIGH-STRENGTH DEFORMABLE ALUMINUM ALLOYS OF TYPE AMg10**

Abstract. Traditional grades of aluminum alloys do not always meet the requirements of modern aerospace engineering. Al–Si foundry alloys possess insufficient mechanical strength characteristics and low plasticity due to their structural features (coarse brittle silicon inclusions and intermetallic phases). Therefore they cannot be exposed to pressure treatment. A technique for producing high-strength aluminum alloys, which consists in obtaining ring blanks by means of direct crystallization of melts with application of non-stationary centrifugal force fields and simultaneous introduction of modifiers, is proposed. The microstructure and plasticity of resulting tube-shaped blanks allow them to be exposed to sheeting for subsequent production of pipe workpieces with mechanical strength commensurate with mechanical strength of structural steel. The technique involves hydrothermal synthesis of nanostructured particles of aluminum oxide, which are overheated above the melt temperature prior to introduction into the molten aluminum alloy. This procedure enhances the processes of intercrystalline hardening with minimal fluctuations of internal stresses within the hardened material. The materials have tensile

strength of up to 380 MPa (before modification by nanodispersed aluminum oxide it was 210 MPa). The microstructure has showed changes in the acicular dendrite component, which tends to become more dispersed and equiaxial. Eventually this leads to an increase in the mechanical strength by a factor of 1.25–1.32.

Keywords: aluminum, AMg10 alloy, melt, alloying, heat treatment, microstructure

For citation. Vityaz P. A., Ilyushenko A. Ph., Sobol S. Ph., Savich V. V., Churik M. N. Producing high-strength deformable aluminum alloys of type AMg10. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2017, no. 4, pp. 7–16 (in Russian).

Введение. Одним из важнейших направлений развития ракетно-космической техники является разработка технологий получения алюминиевых сплавов с повышенным уровнем механических и эксплуатационных свойств. Анализ известных основных технологий в промышленно развитых странах мира показывает, что методы легирования и модифицирования, используемые для повышения свойств алюминиевых сплавов, во многом исчерпали себя и уже не дают того повышения механических и эксплуатационных свойств, которые обеспечили бы новый уровень качества изделий из них. В связи с этим поиск новых инновационных технологических методов для повышения как механических, так и эксплуатационных свойств алюминиевых сплавов является актуальной научно-технической задачей, от которой зависит дальнейшая модернизация и совершенствование производства широкой номенклатуры изделий.

Потенциальные возможности группы сплавов Al–Mg не раскрыты в полной мере, что, несмотря на их высокую востребованность в производстве, ограничивает их использование. Одна из основных причин популярности этих сплавов в аэрокосмической отрасли – их высокая удельная прочность, численно выражаемая отношением прочности к удельному весу сплава. Это связано с тем, что существующие многокомпонентные сплавы, а также технологии их производства не обеспечивают стабильности повышенных характеристик прочности и, особенно, пластичности, с увеличением содержания магния в сплаве выше 5–6 %. Поэтому сплавы с повышенным содержанием магния используются в основном для изготовления литых заготовок деталей, в то время как сфера потребления листового проката в ракетно-космической технике может быть существенно расширена при использовании сплавов с повышенным комплексом свойств. Известно применение алюминий-магниевого сплава и в ракетостроении. Корпуса первой и второй ступеней баллистических ракет серии РС с жидкостным ракетным двигателем состоят из боковых оболочек, изготовленных из сплава Al–Mg (6 %), так как отливки из сплава с большим содержанием Mg (например, 10 %) невозможно прокатать и гнуть из-за крупного зерна. Прочность сплавов на основе системы Al–Mg с увеличением концентрации магния до 13 % возрастает, при этом основной упрочняющей фазой является химическое соединение Al_3Mg_2 .

Современное состояние проблемы. Прочность сплавов на основе системы Al–Mg (AMg10, AMg10ч, AMg5K, AMg11, AMg6л, AMg6лч, AMg5Mц) с увеличением концентрации магния до 13 % возрастает, но пластичность начинает снижаться при его содержании более 11 %. Основной упрочняющей фазой является химическое соединение $\beta(Al_3Mg_2)$. Сплавы с содержанием Mg, %: 4,5–7 – сплавы средней прочности, применяемые без термической обработки (AMg5к, AMg6л); 9,5–13 – сплавы повышенной прочности, применяемые в закаленном состоянии (AMg10, AMg11). Для улучшения технологических свойств в большинство сплавов вводят до 0,15–0,20 % титана и циркония. Образующиеся на их основе интерметаллиды $TiAl_3$ и $ZrAl_3$ более тугоплавкие, чем основа сплава, и являются модификаторами первого рода. При их использовании механические свойства сплавов повышаются на 20–30 %. Сплавы системы Al–Mg обладают повышенной склонностью к взаимодействию с газами и к образованию газовой и газоусадочной пористости, а при взаимодействии с азотом и парами воды образуются неметаллические включения и оксидные пленки. Плавку сплавов следует проводить под слоем флюса, а если в их состав входит Be – без флюса.

Сплавы AMg10 применяют только в закаленном состоянии. Особенностью сплавов AMg10, AMg10ч является повышенная чувствительность к естественному старению. Поэтому литые детали из них можно применять для рабочих температур от –60 до +80 °С. Детали из сплавов AMg10 используют в судостроении (в условиях высокой влажности), в летательных аппаратах, где важно значение удельной прочности.

Сплавы АМгбл, АМгблч и АМг5Мц, не содержащие Si, применяют без термической обработки. Механические свойства этих сплавов невысоки, пластичность низкая. Их рекомендуют использовать для литья в кокиль и песчаные формы средненагруженных деталей, работающих в коррозионных средах. Сплавы АМгбл и АМгблч применяются в литом состоянии без термической обработки и в закаленном состоянии. Сплавы АМгбл и АМгблч в литом состоянии предназначены для изготовления деталей, несущих средние статические и небольшие ударные нагрузки, а в термически обработанном состоянии сплав АМгблч используют для изготовления деталей, работающих при средних статических и ударных нагрузках. Сплав АМг5Мц применяют в литом состоянии для изготовления арматуры трубопроводов пресной воды, масляных и топливных систем, а также для деталей судовых механизмов и оборудования.

Сплавы АМг5Ки АМг11, содержащие 0,8–1,3 % Si, имеют более высокие литейные свойства, так как кремний увеличивает количество эвтектики, в результате чего повышается жидкотекучесть и плотность отливок, снижается их склонность к образованию горячих трещин. Рекомендуется применять эти сплавы для литья в кокиль, песчаные формы и, особенно, под давлением. Из сплава АМг5К изготавливают детали морских судов, а также детали, работающие при температуре 180–200 °С (например, головки двигателей воздушного охлаждения).

Для модифицирования микроструктуры авторами работы [1] предложено дополнительно легировать алюминиевый сплав с высоким (10 мас.%) содержанием магния элементами Sc, Zr и Ti в количествах 0,05–0,20 мас.%, что обеспечивает измельчение зерна в отливке, однако приводит к удорожанию процесса и сложности при введении легирующих компонентов.

Авторами [2] рекомендовано два листа с очищенной и обезжиренной поверхностью складывать пакетом, который после предварительного нагрева (до температур ниже температур рекристаллизации) прокатывается с разовым обжатием не менее 50 % для обеспечения соединения (сваривания) отдельных слоев. Затем полученная полоса, состоящая из двух сваренных слоев, режется на две части, соединяемые стороны которых очищают, складывают в пакет, нагревают и снова прокатывают. Процесс повторяют вплоть до достижения заданного числа циклов прокатки. При прокатке алюминиевого сплава АМг10 по этому методу, названному авторами ARB, формируется сильно фрагментированная ультрамелкозернистая структура с размером блоков около 200–500 нм. При этом для обеспечения достигнутого результата необходимо, чтобы величина накопленной интенсивности деформаций составляла порядка 9–10. При всей привлекательности полученных в [2] результатов вызывает сомнение пригодность ARB-технологии для промышленного производства ввиду ее крайне большой трудоемкости.

Автор работы [3] исследовала процессы термообработки сплава АМг10 и показала, что старение этого сплава при температуре $T_{ст} = 180$ °С, времени выдержки $\tau = 4,0$ ч и предварительной деформации со степенью $\varepsilon = 21,0$ % приводит к снижению уровня остаточных напряжений I рода в 4 раза, росту напряжений II и III рода – в среднем в 2,5–3 раза, что способствует повышению штампуемости в 2,4 раза по сравнению со штампуемостью без ТО и предварительной деформационной обработки.

В работе [4] показано, что после взрывного деформирования наблюдается изменение формы зерен, с увеличением степени деформации зерна вытягиваются, изменяется их ориентировка, что приводит к образованию текстуры. Ввиду вытягивания зерна площадь его сечения в плоскости, перпендикулярной к направлению вытяжки, уменьшается.

Установлено влияние лигатуры AlC0,9Ti0,8 на размер зерна, механические и технологические свойства сплавов АМг10 [5]. Показано, что микролегирование комплексом углерода и титана в оптимальных количествах позволяет достигнуть уменьшения размера зерна сплавов на 16–27 %, повысить относительное удлинение на 30–50 %. Также улучшаются технологические свойства сплавов.

Материалы, методика и оборудование исследований. Для исследований был выбран литейный сплав АМг10 (ГОСТ 1583-93), который, как известно, труднодеформируемый и получение из него проката в промышленном производстве проблематично, так как при прокате изделие разрушается. Химический состав сплава приведен в табл. 1.

Т а б л и ц а 1.
Химический состав сплава АМг10
Table 1.
Chemical composition of АМг10 alloy

Химический элемент	Содержание, мас.%
Mg	10,6
Si	0,16
Fe	0,20
Be	0,005
Ti	0,1
Al	Остальное

При разработке технологии получения проката из алюминиевых сплавов используется компьютерный метод обработки микроструктур, который позволяет количественно классифицировать режимы обработки по микроструктурам.

Для разработки оборудования и анализа процессов, протекающих при обработке, создана компьютерная система многомерного моделирования динамики изменения жидко-твердого состояния сплава в специальном оборудовании. Основу компьютерной системы составляют специальные математические модели, построенные на уравнениях Навье – Стокса, неразрывности потока, теплопроводности, которые численно решаются для системы граничных условий, учитывающих пространственные особенности оборудования.

На рис. 1, 2 представлены варианты исследовательского оборудования. В литейных машинах достигается изменение технологических параметров, необходимых для реализации обработки, и осуществляется управляемая кристаллизация сплава.

На опытном оборудовании разработана технология изготовления проката из сплава АМг10. Полученные образцы из проката были изучены в Исследовательском центре Института порошковой металлургии. Образцы АМг10, обработанные при различных режимах, исследованы на испытательной машине INSTRON 1195, металлографические исследования проводились с помощью металлографического микроскопа MeF-3, замер твердости осуществлялся на приборе ТШ-2М. Первичные свойства деформируемого сплава АМг10 и образцы изделий из проката также изучались в Исследовательском центре Университета Дуйсбург-Эссен (Германия).

Результаты исследований и их обсуждение. Существует два вида прикладных задач, которые целесообразно решать с помощью центробежной кристаллизации: перераспределение компонентов вещества и повышение структурного совершенства получаемого композиционного материала.

Центрифугирование при массовой (объемной) кристаллизации может быть положено (и в ограниченных масштабах используется сейчас) в основу многих производств, таких как рафинирование расплавов, обогащение, создание защитных покрытий для химически активных металлов, выделение эвтектик из многокомпонентных сплавов. Развитие этих приложений для многих систем с незначительным различием плотностей кристаллизующейся (отделяемой) и маточной жидкой фаз сдерживается неполным или замедленным развитием ликвации в стационарных условиях.



Рис. 1. Лабораторная установка для получения заготовок массой 30 кг

Fig. 1. Laboratory plant for production blanks weighing 30 kg



Рис. 2. Опытный образец промышленной установки для получения заготовок массой 200 кг

Fig. 2. Prototype sample of the industrial plant for production blanks weighing 200 kg

Дополнительно к этому постановка экспериментов с использованием управляемой ливкации, когда скорость кристаллизации определяется условиями контролируемого теплоотвода (направленная кристаллизация, зонная плавка), на центрифугах позволяет изучать эффекты, определяемые условиями конвективного перемешивания. В зависимости от технологической задачи конвекция, обусловленная градиентом плотности перед фронтом кристаллизации, в условиях центрифугирования может быть существенно усилена или ослаблена. К настоящему времени перспективность такого использования центробежных полей подтверждена при получении композитных материалов на основе двойных металлических сплавов.

Представляет значительный интерес проведение сравнительных кристаллизационных экспериментов в различных условиях с целью изучения явлений, зависящих и не зависящих от центробежных сил, и одновременного получения информации о возможности синтеза сплавов с более совершенными структурой и свойствами.

Выявлено, что центрифугирование создает предпосылки для формирования при кристаллизации более мелкодисперсной микроструктуры с преобладанием доли равноосных частиц и не приводит к перераспределению концентрации компонентов сплава. С увеличением центробежной перегрузки и скорости охлаждения степень дифференцировки микроструктуры возрастает неоднородно: наибольшие изменения фиксируются у частей образцов, находившихся в процессе центрифугирования на удаленном от центра вращения конце. Изменение микроструктуры в пределах одного образца связано с неоднородностью термических условий кристаллизации за счет седиментационных процессов, обусловленных действием центрифугирования. Это было подтверждено дополнительным экспериментом по центробежной кристаллизации чистого алюминия, в результате которого морфология и размеры кристаллических зерен, сформировавших структуру разных частей образца, существенно отличались, а при оптимальных режимах литья и частоты вращения – были одинаковыми во всем объеме отливки (рис. 3).

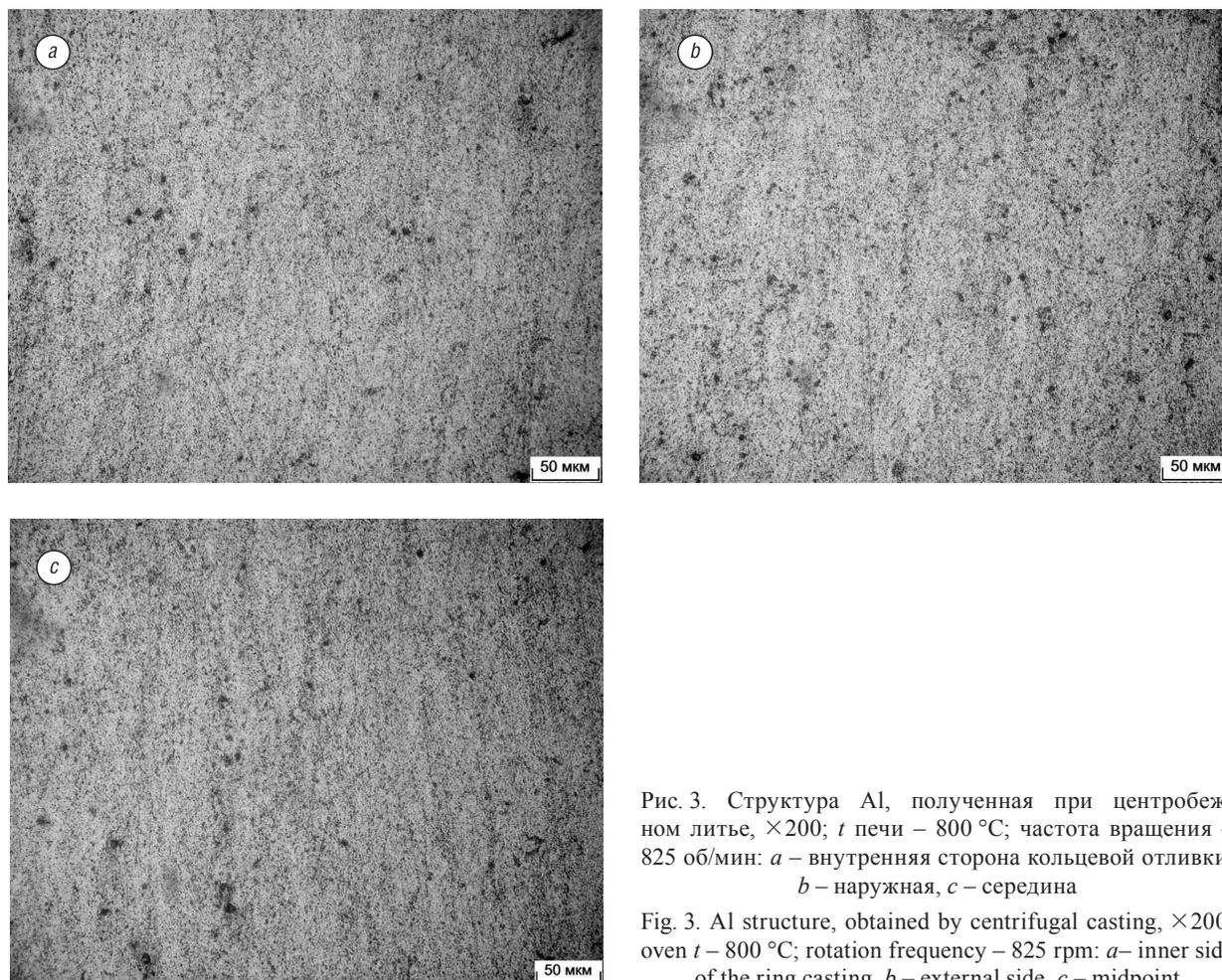


Рис. 3. Структура Al, полученная при центробежном литье, $\times 200$; t печи – $800\text{ }^{\circ}\text{C}$; частота вращения – 825 об/мин : a – внутренняя сторона кольцевой отливки, b – наружная, c – середина

Fig. 3. Al structure, obtained by centrifugal casting, $\times 200$; oven $t = 800\text{ }^{\circ}\text{C}$; rotation frequency – 825 rpm : a – inner side of the ring casting, b – external side, c – midpoint

Использование центробежного литья алюминиевых композиционных материалов позволяет частично снять противоречие между повышением служебных (прочность, твердость, ударная вязкость, пластичность, износостойкость) и снижением технологических (обрабатываемость резанием, давлением, жидкотекучесть) свойств при повышении объемной доли наполнителя.

Установлено, что различий в удельном весе армирующих частиц и матричного сплава достаточно, чтобы под действием центробежных сил более тяжелые частицы из расплава алюминиевого композиционного материала осели на внешнюю поверхность отливки, образовав упрочненный слой с 30–40 об.% частиц, и внутреннюю часть отливки, полностью свободную от частиц. Этот способ позволяет получать литые слоистые изделия, а также изделия с градиентной структурой из легких сплавов с относительно небольшой объемной долей наполнителя (до 13 %) и хорошими литейными свойствами.

В ходе исследований изучались возможности получения композиционных материалов на основе сплавов алюминия с повышенными эксплуатационными и механическими свойствами путем использования поля центробежных сил центрифуги при введении в расплав наноразмерных упрочняющих добавок.

Выбраны и обоснованы наноструктурированные лигатуры, полученные методами самораспространяющегося высокотемпературного синтеза и позволившие изменить свойства затвердевших заготовок при их литье в поле центробежных сил. В частности использованы алюминиды титана Al_3Ti .

Изучены особенности влияния центробежных сил на процесс кристаллизации композиционного материала, а также механизм структурообразования композиционных материалов на основе алюминия, полученных в поле центробежных сил центрифуги при введении наноструктурированных лигатур.

Определена зависимость величины зерна отливок композиционного материала в полях центробежных сил центрифуги от центробежных ускорений.

Показана целесообразность введения наноструктурированных лигатур разной химической природы в композиционные материалы на основе алюминия в количестве 0,05–0,50 мас.% и 0,01–0,50 мас.%, так как при этом увеличивается прочность в 1,5–2 раза и износостойкость – в 2 раза.

Установлено, что упрочняющие компоненты находятся внутри зерна композиционного материала, а механические и трибологические свойства полученных в полях центробежных сил центрифуги композиционных материалов на основе алюминия повышаются.

Оптимизированы технологические режимы воздействия поля центробежных сил центрифуги на кинетику процесса кристаллизации расплава, в результате чего получены изделия с оптимальным сочетанием прочности и пластичности.

Разработаны технологические схемы получения композиционных материалов на основе алюминия при введении в исходную шихту наноструктурированных лигатур.

При воздействии центробежного поля меняется характер кристаллизации. Причем принципиально новым и важным моментом является то, что при достаточном числе оборотов изложницы энергетическое воздействие центробежного поля возрастает настолько, что благодаря его объемному характеру возникают эффекты, приводящие к началу интенсивного образования твердой фазы еще до того, как расплав успеет сколько-нибудь существенно понизить свою среднюю температуру.

Наложение давления в процессе кристаллизации уменьшает энергию межфазного взаимодействия (поверхностное натяжение) на границе расплав – кристалл, а следовательно, и размер критического зародыша. Кроме того, приложением давления можно добиться появления смачиваемости между различными фазами, если оно отсутствовало в обычных условиях. Приложение давления к кристаллизующемуся расплаву приводит к увеличению числа центров кристаллизации и в результате к измельчению структуры, оказывая тем самым модифицирующее влияние на структуру металлов и сплавов.

Для введения модифицирующих частиц было решено применить брикеты, состоящие из механической смеси порошков добавки и алюминия, полученной прессованием.

Экспериментальным путем найдено оптимальное центробежное ускорение ($g = 500–600$), соответствующее минимальному размеру зерна матричной фазы (1,0–1,7 мкм) и наиболее высоким свойствам получаемого металла.

Сплав АМг10 легче сплава АМг6 и имеет более высокую прочность, однако из-за низкой пластичности сплава АМг10 из него нельзя получить прокат. Предложенный метод позволяет получать прокат из литейного сплава АМг10, что открывает широкие возможности для его использования в автомобилестроении, в энергетике (для производства силовых электрических кабелей), а в перспективе – и в авиационной промышленности.

Применение данного метода позволяет сделать недеформируемый сплав АМг10 деформируемым (рис. 4). При этом достигается существенное увеличение его прочностных характеристик в 2,5–2,8 раза (табл. 2, 3).

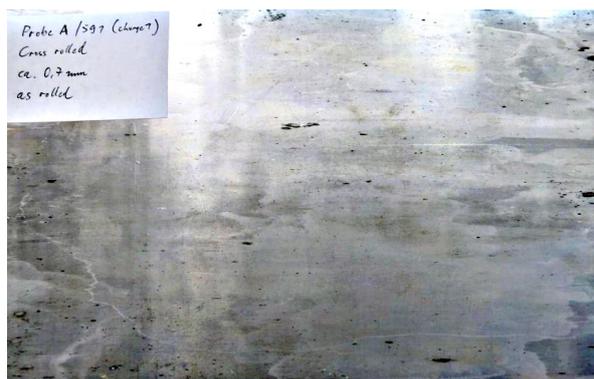


Рис. 4. Фотография проката, полученного из сегментированных заготовок АМг10

Fig. 4. Image of rolled products obtained from segmented AMg10 blanks

Таблица 2. Механические свойства сплава АМг10 после центробежной обработки

Table 2. Mechanical properties of AMg10 alloy after centrifuging processing

Регистрационный № образца	№ образца	σ_b , МПа	$\sigma_{0,2}$, МПа	δ , %	Деформация
542 (прокаты до 1,0 мм)	1	480,4	421,9	6	90 %
	2	492,7	443,5	5	
	3	488,4	415,5	4	
	Среднее	487,2	427,0	5	
542 (прокаты до 1,5 мм)	1	424,4	343,2	9	85 %
	2	430,3	354,6	10	
	3	425,1	345,9	11	
	Среднее	426,6	347,9	10	

Таблица 3. Механические свойства литого АМг10

Table 3. Mechanical properties of AMg10 cast alloy

№ образца	№ измерений	σ_b , МПа	$\sigma_{0,2}$, МПа	δ , %
524	1	178,6	151,8	1,14
	2	178,8	152,0	1,00
	3	166,9	141,8	0,60
	Среднее	174,8	148,5	0,91

При разработке технологии получения проката из алюминиевых сплавов используется компьютерный метод обработки микроструктур, который позволяет количественно классифицировать режимы центробежной обработки по микроструктурам. На рис. 5 и 6 представлены фрагменты этих микроструктур.

Накопленный опыт показывает, что классический металловедческий качественный анализ не позволяет разделять прокатываемые (рис. 5) и непрокатываемые микроструктуры (рис. 6). Применение компьютерных методов обработки изображений микроструктур позволяет существенно повысить производительность научно-исследовательских работ при разработке технологического процесса и выявить новые закономерности типа «режимы центробежной обработки – микроструктура сплава» при большом количестве микроструктур. Компьютерная обработка позволяет классифицировать микроструктуры и использовать это для оптимизации режимов центробежной обработки сплавов (табл. 4).

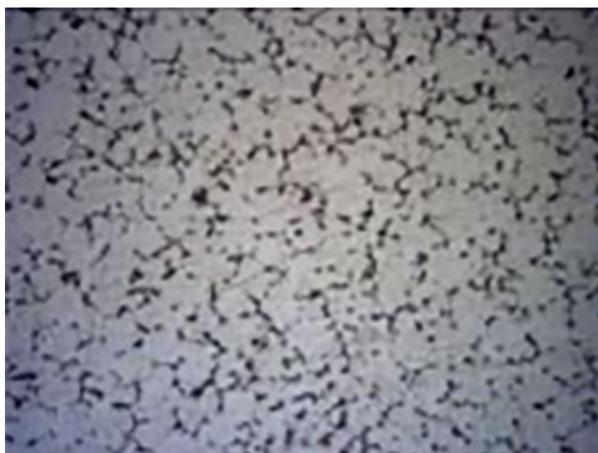


Рис. 5. Микроструктура прокатываемого сплава АМг10 перед прокаткой

Fig. 5. Microstructure of rolled AMg10 alloy before rolling



Рис. 6. Микроструктура традиционного литого сплава АМг10

Fig. 6. Microstructure of the traditional AMg10 cast alloy

Т а б л и ц а 4. Основные параметры магниевой фазы и совокупный критерий оценки степени прокатываемости сплава при компьютерной обработке изображений

Table 4. The main parameters of the magnesium phase and the overall criterion for estimating the rolling ability degree of the alloy under computer image processing

Параметр	Непрокатываемые				Прокатываемые			
	93,8	97,1	97,0	84,7	55,6	74,4	60,0	53,2
Степень разветвленности максимального включения, %	93,8	97,1	97,0	84,7	55,6	74,4	60,0	53,2
Средняя длина скелета включений, нм	855	967	874	1240	347	428	416	367
Количество включений	18	22	29	13	65	53	53	60
Совокупный критерий оценки прокатываемости микроструктуры	5,2	4,4	3,3	6,5	0,9	1,4	1,1	0,9

В целях оптимизации режимов центробежной обработки сплавов разработан комплекс программ для обработки изображений микроструктур алюминиевых сплавов. Разработанные методы позволяют с высокой степенью точности рассчитать параметры морфологии и дисперсности фазовых составляющих микроструктуры по ее изображению.

На рис. 7 представлены результаты изучения прочности на сжатие для образцов из сплава АМг10 в Исследовательском центре Университета Дуйсбург-Эссен (а) и в Национальной академии наук Беларуси (б).

Согласно полученному заключению из Университета Дуйсбург-Эссен, изготовленный центробежным методом алюминиевый сплав АМг10 по своим прочностным свойствам (500 МПа) сравним с некоторыми марками конструкционной стали. В настоящее время проводятся работы по повышению прочности на сжатие для этого сплава на уровне 700 МПа и выше. Планируется совершенствование композиций и режимов центробежной обработки с целью создания высокопрочных алюминиевых сплавов, близких по своим характеристикам не только к сталям, но и к титановым сплавам. Экспертами из германской компании «PPM-Unternehmensberatung GmbH» был проведен предварительный технико-экономический анализ мирового рынка потенциального потребления полученного указанным методом сплава АМг10, результаты которого свидетельствуют о широких возможностях применения данного сплава в энергетике, автомобилестроении, авиастроении и других отраслях.

В целях повышения качества сплавов и для отработки технологии их промышленного производства завершены конструкторские работы по автоматизированному технологическому комплексу. Его продукцией является заготовка из сплава АМг10 с 90%-м выходом годного для последующего изготовления листового проката, не уступающего по прочности стальному.

В краткосрочной перспективе будут реализованы опытные работы по разработке технологии и оборудования для повышения свойств сплавов группы алюминий-магний с повышенным содержанием магния (АМг12, АМг14, АМг16), а также других групп алюминиевых сплавов (алю-

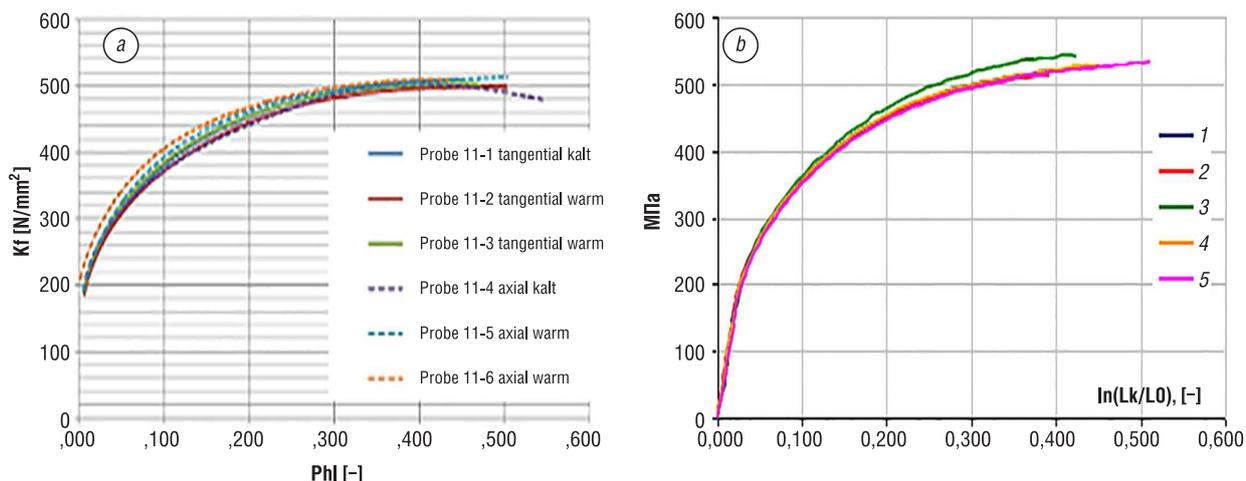


Рис. 7. Результаты исследований прочностных характеристик сплава АМг10: *a* – в университете Дуйсбург-Эссен, *b* – в Национальной академии наук Беларуси

Fig. 7. Results of research of the strength characteristics of AMg10 alloy: *a* – in University of Duisburg-Essen, *b* – in the National Academy of Sciences of Belarus

миний-магний-цинк и др.) с целью замены тяжелых конструкций из сталей и чугунов на более легкие конструкции из алюминиевых сплавов, имеющих высокую удельную прочность. Схема автоматизированного технологического комплекса представлена на рис. 8.

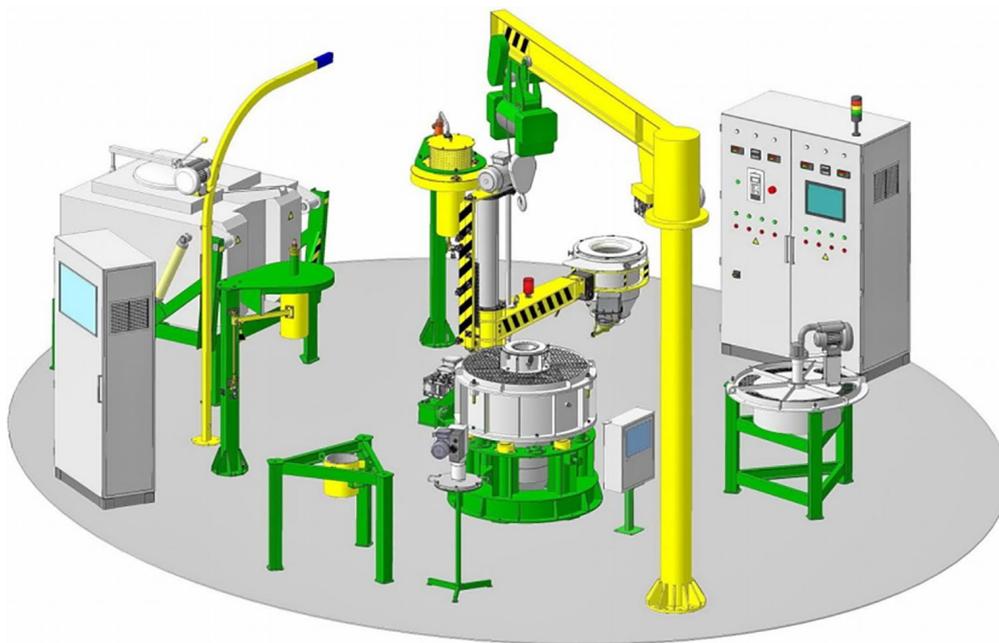


Рис. 8. Автоматизированный технологический комплекс

Fig. 8. Automated technological system

Заключение. Проведенные исследования по получению заготовок из алюминиевого сплава АМг10 с помощью центробежной обработки показали, что недеформируемый сплав АМг10 может быть прокатан.

Полученные материалы имеют предел прочности до 380 МПа (до модификации нанодисперсным оксидом алюминия – 210 МПа). В микроструктуре наблюдается изменение игольчатой дендритной составляющей, которая становится более дисперсной и равноосной, что и приводит к повышению механической прочности в 1,25–1,32 раза.

Разработан комплекс технологического оборудования для реализации центробежного метода кристаллизации, который может быть поставлен заинтересованным потребителям.

Список использованных источников

1. Effects of Sc, Zr and Ti on the microstructure and properties of Al alloys with high Mg content / Xu Wang [et al.] // *Rare Metals*. – 2010. – Vol. 29, iss. 1. – P. 66–71.
2. Гречников, Ф. В. Получение алюминиевого сплава АМг10 с ультрамелкозернистой структурой прокаткой по ARB методу / Ф. В. Гречников, И. П. Попов, Я. А. Ерисов // *Изв. Самар. науч. центра Рос. акад. наук*. – 2013. – Т. 15, №4. – С. 165–169.
3. Савельева, О. Г. Разработка режимов термической и деформационной обработки листов из сплавов систем Al–Mg и Al–Cu–Mg для формирования структуры, остаточных напряжений и технологических свойств, обеспечивающих улучшение штампуемости: автореф. дис. ... канд. техн. наук / О. Г. Савельева. – Самара, 2013. – 20 с.
4. Остапчук, В. В. Исследование структуры и свойств сплавов системы Al–Mg–Si после взрывного деформирования / В. В. Остапчук // *Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр.* – Харьков: Харьков. авиац. ин-т, 2012. – Вып. 4. – С. 149–154.
5. Кулинич, А. А. Влияние углерода и титана на структуру, механические и технологические свойства сплавов и АМг10 / А. А. Кулинич // *Вісн. СевНТУ. Сер.: Механіка, енергетика, екологія: зб. наук. пр.* – Севастополь: Вид-во СевНТУ, 2012. – Вип. 133. – С. 179–183.

References

1. Xu Wang, Guoqin Chen, Bing Li, Lianmei Wu, Daming Jiang. Effects of Sc, Zr and Ti on the microstructure and properties of Al alloys with high Mg content. *Rare Metals*, 2010, vol. 29, Iss. 1, pp. 66–71. Doi: 10.1007/s12598-010-0012-8
2. Grechnikov Ph. V., Popov I. P., Erisov Ya. A. Production of aluminum AMg10 alloy with ultra-fine-grained structure rolling by ARB method. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra Rossiiskoi akademii nauk = Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, 2013, vol. 15, no. 4, pp. 165–169 (in Russian).
3. Savelieva O. G. *Development of the modes for thermal and deformation treatment of sheets from the alloys of Al–Mg and Al–Cu–Mg systems for the structure formation, residual stresses and technological properties, providing formability improvement*. Samara, 2013. 20 p. (in Russian).
4. Ostapchuk V. V. Investigation of the structure and properties of the Al–Mg–Si system alloys after explosive deformation. *Voprosy proektirovaniya i proizvodstva konstruktssii letatel'nykh apparatov: sb. nauch. tr.* [Design and Production Issues of Aircraft Constructions: collection of scientific papers]. Khar'kov, Khar'kovskii aviatsionnyi institute, 2012. Issue 4. Pp. 149–154 (in Russian).
5. Kulinich A. A. Carbon and titanium effect on the structure, mechanical and technological properties of alloys and AMg10. *Visnik SevNTU. Seriya: Mekhanika, energetika, ekologiya: zbirnik naukovikh prats' = Journal of the Sevastopol National Technical University. Series: Mechanics, Power Engineering, Ecology*. Sevastopol, 2012. Issue 133. Pp. 179–183 (in Russian).

Информация об авторах

Витязь Петр Александрович – академик Национальной академии наук Беларуси, доктор технических наук, профессор, руководитель Аппарата Национальной академии наук Беларуси, Президиум Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 66, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: vitiaz@presidium.bas-net.by

Ильющенко Александр Федорович – член-корреспондент Национальной академии наук Беларуси, доктор технических наук, профессор, директор, Институт порошковой металлургии Национальной академии наук Беларуси (ул. Платонова, 41, 220005, Минск, Республика Беларусь). E-mail: alexil@mail.belpak.by

Соболь Сергей Федорович – директор, СЗАО «БелМетКомпозит» (ул. Платонова, 41, к. 108, 220005, Минск, Республика Беларусь). E-mail: info@belmc.by

Савич Вадим Викторович – кандидат технических наук, доцент, заместитель директора, Институт порошковой металлургии (ул. Платонова, 41, 220005, Минск, Республика Беларусь). E-mail: savich@pminstitute.by

Чурик Михаил Николаевич – кандидат технических наук, главный специалист, СЗАО «БелМетКомпозит» (ул. Платонова, 41, к. 108, 220005, Минск, Республика Беларусь). E-mail: info@belmc.by

Information about the authors

Piotr A. Vityaz – Academician of the National Academy of Sciences of Belarus, D. Sc. (Engineering), Professor, Head of Staff of National Academy of Sciences of Belarus, Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus (66, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vitiaz@presidium.bas-net.by

Alexander Ph. Ilyuschenko – Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, D. Sc. (Engineering), Professor, Director, Powder Metallurgy Institute of the National Academy of Sciences of Belarus (41, Platonov Str., 220005, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: alexil@mail.belpak.by

Sergey Ph. Sobol – Director, Joint Closed Joint-Stock Company “BelMetComposite” (41, of. 108, Platonov Str., 220005, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: info@belmc.by

Vadim V. Savich – Ph. D. (Engineering), Associate Professor, Vice-Director, Powder Metallurgy Institute of the National Academy of Sciences of Belarus (41, Platonov Str., 220005, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: savich@pminstitute.by

Mikhail N. Churik – Ph. D. (Engineering), Chief Metallurgist, Joint Closed Joint-Stock Company “BelMetComposite” (41, of. 108, Platonov Str., 220005, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: info@belmc.by

А. В. Белый¹, А. Н. Карпович¹, Е. В. Ковальчук¹, А. К. Тявловский²

¹Физико-технический институт Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

²Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь

РАБОТА ВЫХОДА ЭЛЕКТРОНА И ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЕВ ИОННО-ЛЕГИРОВАННОГО ТВЕРДОГО СПЛАВА ВК6

Аннотация. Установлена взаимосвязь между структурно-фазовыми превращениями, происходящими в поверхностных слоях твердого сплава ВК6 в процессе ионно-лучевого азотирования при различных температурах (670–870 К), и их физико-химическими свойствами. Исследовано распределение работы выхода электрона по поверхности твердосплавных пластин, обработанных концентрированными потоками ионов азота при различных температурах. Показано, что массовый износ поверхностных слоев, обработанных ионами азота при различных температурах, первые 450 м равномерен и проходит с одинаковой интенсивностью. На более поздних стадиях испытаний интенсивность износа заметно отличается, что связано прежде всего с истиранием модифицированного слоя и выходом в поверхностные слои неимплантированного материала. Также показано, что обработка твердого сплава ВК6 в диапазоне температур 750–790 К приводит к возрастанию его микротвердости и снижению массового износа при трении без смазочного материала до 3 раз, что зависит от образования карбонитридов и увеличения их прочности вследствие твердорастворного упрочнения. Кроме того, для поверхностного слоя сплава ВК6, обработанного ионами азота при 750–790 К, характерны высокие значения работы выхода электрона, что связано с повышением электронной концентрации поверхности насыщенного азотом сплава ввиду образования карбонитридов и твердых растворов азота с кобальтовой матрицей. Полученные при сканировании данные по распределению работы выхода электрона по поверхности образцов позволили предположить, что ионно-лучевое азотирование в данном температурном диапазоне также будет способствовать повышению коррозионной стойкости.

Ключевые слова: ионно-лучевое азотирование, твердый сплав, микротвердость, структурно-фазовые превращения, коэффициент трения, работа выхода электрона, износостойкость

Для цитирования. Работа выхода электрона и физико-химические свойства поверхностных слоев ионно-легированного твердого сплава ВК6 / А. В. Белый [и др.] // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2017. – №4. – С. 17–23.

A. V. Byeli¹, A. N. Karpovich¹, E. V. Kovalchuk¹, A. K. Tyavlovsky²

¹Physical-Technical Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

²Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus

ELECTRON WORK FUNCTION AND PHYSICAL-CHEMICAL PROPERTIES OF SURFACES LAYERS OF ION-DOPED HARD ALLOY BK6

Abstract. The correlation between structural-phase transformations and physical-chemical properties of surface layers of hard alloy after ion-beam nitriding (temperature range 670–870 K) was established. The distribution of electron work function on hard-alloy plate surface after ion-beam nitriding was investigated. It is shown, that wear resistance of surface layers of hard alloy after ion-beam nitriding under different temperatures is uniform and has the same intensity for the first 450 m. At later stages of testing, the intensity of wear resistance is markedly different due to the modified layer abrasion. It is shown, that hard alloy BK6 after ion-beam nitriding in the temperature range 750–790 K has enhanced microhardness, corrosion resistance and decreased up to 3 times mass wear during friction without lubricant, which is associated with carbonitrides formation and their strength increasing due to solid-solution hardening. The high values of the electron work function are characteristic for the surface layer of a hard alloy BK6 after ion-beam nitriding under 750–790 K, which is explained by the electron concentration increase. It is suggested, that ion-beam nitriding under this temperature range increases the corrosion resistance.

Keywords: ion-beam nitriding, hard alloy, microhardness, structural-phase transformations, coefficient of friction, electron work function, wear resistance

For citation. Byeli A. V., Karpovich A. N., Kovalchuk E. V., Tyavlovsky A. K. Electron work function and physical-chemical properties of surfaces layers of ion-doped hard alloy BK6. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk* = *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2017, no. 4, pp. 17–23 (in Russian).

Введение. Наноструктурирование поверхностных слоев вольфрамсодержащих твердых сплавов с кобальтовой связкой является перспективным методом повышения эксплуатационных свойств твердосплавных режущих пластин [1, 2]. Концепция формирования многомасштабной структуры при трении учитывает влияние разномасштабных структурных уровней и их сочетаний на закономерности деформирования и разрушения материалов в условиях высоких динамических нагрузок. При деформации материалов с мультимодальной структурой неизбежно вовлечение максимально возможного числа структурных уровней, что приводит к смене доминирующего механизма зарождения и росту магистральной хрупкой трещины. Зарождение, последовательное развитие и продвижение вершины трещины в мезоскопически неповрежденном материале сменяется образованием в окрестности вершин микротрещин мезоповреждений с последующим их объединением в магистральные трещины, что обеспечивает существенное увеличение времени их образования.

Создание в поверхностном слое металлокерамического сплава мультимодальной структуры возможно в результате создания структурно-неравновесного состояния, например при ионно-лучевой обработке (ИЛО) [3].

Применение методов, основанных на измерении работы выхода электрона (РВЭ), позволяет получить информацию о состоянии и свойствах исследуемых поверхностей, в частности об электронном строении, определяющем их многие физические свойства [1, 4–7].

Целью проведенных исследований являлось установление взаимосвязи между структурно-фазовыми превращениями, величиной и распределением по поверхности РВЭ и физико-химическими свойствами поверхностных слоев твердосплавных пластин, модифицированных ионами азота при различных температурах.

Материалы и методика исследований. Исследования проводились на плоских пластинах $15 \times 20 \times 3$ мм из твердого сплава ВК6, сведения о химическом составе сплава приведены в табл. 1 (ГОСТ 3882-74).

Ионно-лучевое азотирование (ИЛА) осуществлялось в рабочей камере вакуумной установки УВН-2М, оснащенной ионным источником с замкнутым дрейфом электронов. Для обеспечения равномерности облучения использовалась система механического сканирования образцов. Имплантация проводилась при энергии ионов азота 3 кэВ и плотности ионного тока 2 mA/cm^2 . Температура образцов в процессе ИЛА составляла 670–870 К и контролировалась с помощью хромель-алюмелевой термопары. Образцы подвергались ИЛА в течение 3 ч, флюенс легирования 10^{20} ион/см².

ДюрOMETрические испытания проводились не менее 5 раз на микротвердомере DM 8 AFFRI при нагрузке 200 г. Точность измерений составляла 0,1 HV.

Трибологические испытания в режиме трения без смазочного материала проходили на трибометре JLTB-02 по схеме «шарик – диск» при частоте вращения диска 600 об/мин. Нагрузка при испытаниях составляла 5 Н, температура окружающей среды – 24,5 °С, относительная влажность – 40 %. Материал шарика – сталь ШХ15.

Взвешивание образцов проводилось через каждые 400 м пути трения на аналитических весах АДВ-200 не менее 5 раз.

Рентгеноструктурный анализ осуществлялся с помощью рентгеновского дифрактометра ДРОН-3М в CoK_α излучении. Для расшифровки дифрактограмм использовалась картотека Объединенного комитета дифракционных стандартов (JCPDS). По положению дифракционных линий определялся период кристаллической решетки исследуемых фаз.

Измерение РВЭ проводилось методом Кельвина [1, 4–7], суть которого заключается в регистрации изменения контактной разности потенциалов (КРП), возникающей между поверхностью исследуемого образца и поверхностью вибрирующего зонда (никель) в диапазоне ± 5 мВ.

Т а б л и ц а 1. Химический состав твердого сплава ВК6

T a b l e 1. The chemical composition of the hard alloy ВК6

Марка сплава	Химический состав, мас.%	
	Co	WC
ВК6	6	94

Результаты исследований и их обсуждение. В исходном состоянии микротвердость сплава ВК6 достигает 13,5 ГПа. В состав необработанного ионами азота твердого сплава входят карбид вольфрама WC (гранцентрированная кубическая (ГЦК) решетка, пространственная группа $P-6m2$, $a = 0,29063$ нм, $c = 0,28375$ нм) и кобальтовая связь (ГЦК кристаллическая решетка β -Co, пространственная группа $Fm-3m$, $a = 0,35447$ нм).

В результате ИЛА при 770 К микротвердость поверхностного слоя исследуемого материала возрастает до 20 ГПа, фазовый состав при этом не изменяется по сравнению с исходным состоянием: WC, W_2C , $W_{1-2}C$ и β -Co. Вместе с тем данные рентгеноструктурного анализа не исключают возможности образования в модифицированном слое частиц гексагонального δ -нитрида WN ($a = 0,2893$ нм, $c = 0,2826$ нм, $c/a = 0,9768$), так как кристаллические решетки WC и WN изоморфны и близки по параметрам, выявление дифракционного спектра от частиц WN на фоне дифракционных линий от WC не представляется возможным. Вследствие высокой концентрации азота в модифицированном слое, происходит замещение атомов углерода атомами азота в решетке WC с образованием $W(C, N)$. При этом замещение углерода азотом вследствие существенного различия в их атомных размерах должно сопровождаться твердорастворным упрочнением модифицированного карбида. В пользу данного предположения свидетельствует регистрируемое возрастание микротвердости модифицированного при 770 К сплава ВК6. Кроме этого, ионы азота могут образовывать твердые растворы с кобальтовой матрицей, что увеличивает прочность последней и повышает сопротивление усталостному выкрашиванию карбидных зерен из матрицы [1].

Повышение температуры до 820 К при ИЛА ВК6 приводит к увеличению микротвердости сплава до 21 ГПа. Поверхностный слой содержит WC, $W_{1-2}C$, W_2C , β - W_4N и β -Co (рис. 1). Кроме этого, на дифракционной картине вблизи линий от гексагонального карбида W_2C и кубического карбида $W_{1-2}C$ обнаруживаются дополнительные максимумы со стороны малых углов рассеяния, что указывает на замещение атомов углерода атомами азота. Таким образом, возрастание микротвердости твердого сплава после ИЛА при 820 К обусловлено образованием карбонитридов $W(C, N)$, $W_{1-2}(C, N)$, $W_2(C, N)_3$ и увеличением их прочности вследствие твердорастворного упрочнения.

В случае высокотемпературной обработки (870 К) наблюдается снижение микротвердости до 19 ГПа, что может быть связано с более интенсивным распылением поверхности обрабатываемого материала, в частности кобальтовой связи.

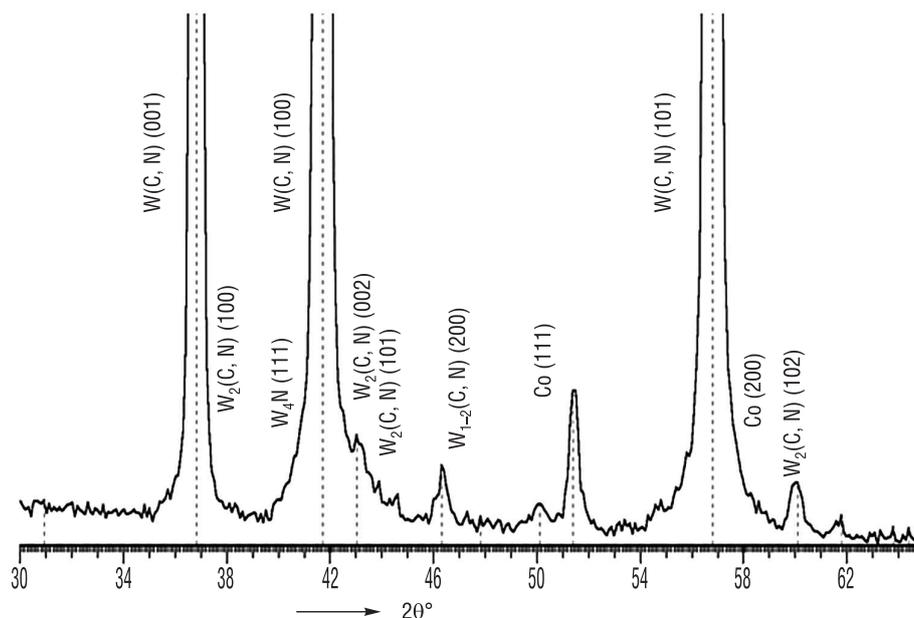


Рис. 1. Фрагмент рентгеновской дифрактограммы поверхностного слоя твердого сплава ВК6 после ионно-лучевого азотирования при 820 К

Fig. 1. Fragment of X-ray diffractogram of the surface of the hard alloy BK6 after ion-beam nitriding at 820 K

Из рис. 2 видно, что средний коэффициент трения неимплантированного сплава составляет 0,65, с ростом температуры ИЛА происходит повышение коэффициента трения до 0,7–0,75, что связано с ростом шероховатости поверхностей вследствие распыления связующего материала Со.

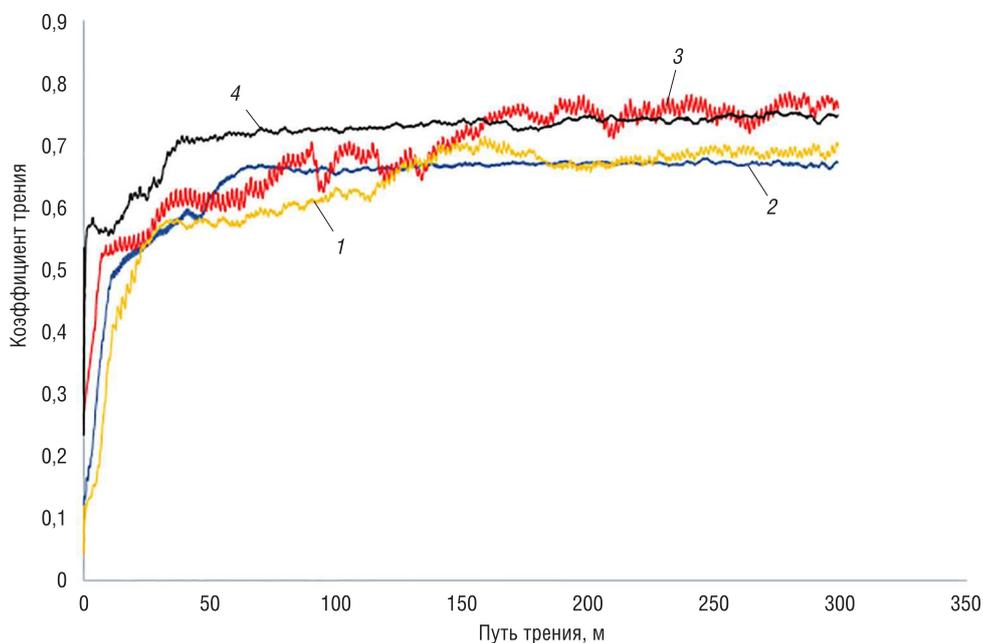


Рис. 2. Зависимость коэффициента трения твердосплавных пластин, обработанных ионами азота при различных температурах, от пути трения: 1 – исходное состояние; ионно-лучевое азотирование: 2 – при 670 К, 3 – при 770 К, 4 – при 870 К

Fig. 2. Dependence of coefficient of friction of carbide plates treated with nitrogen ions at different temperatures from the friction path: 1 – initial state; ion-beam nitriding: 2 – at 670 K, 3 – at 770 K, 4 – at 870 K

Известно, что распределение значений КРП по поверхности образца отражает не только неоднородности структуры поверхности, связанные с наличием дефектов кристаллического строения, адсорбированных слоев и прочим, но и изменение интегральных свойств поверхности под действием ИЛА, в частности электронной структуры твердого тела [5–7]. На рис. 3 представлены данные сканирования образцов поверхностей твердого сплава ВК6, модифицированного ионами азота при различных температурах. Справа приведена шкала соответствия цветности и величины КРП.

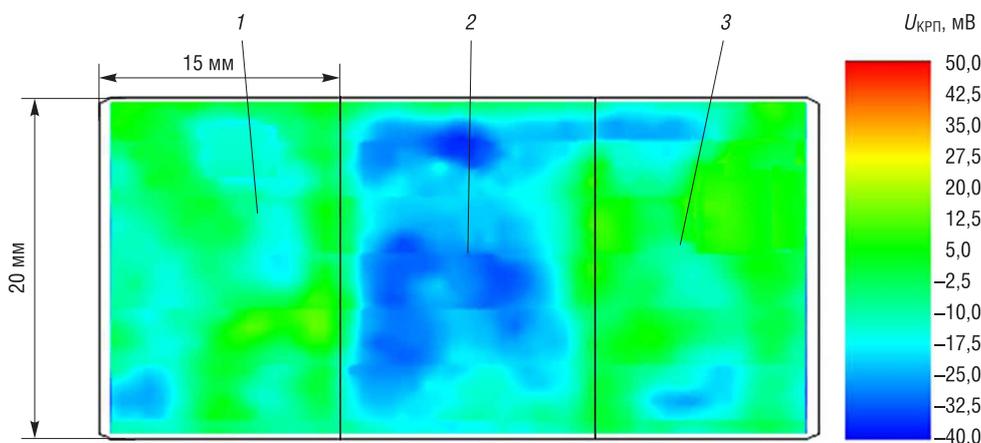


Рис. 3. Распределение контактной разности потенциалов по поверхности твердосплавных пластин, обработанных ионами азота при различных температурах: 1 – при 670 К, 2 – при 770 К, 3 – при 870 К

Fig. 3. Distribution of contact potential difference over the surface of carbide plates treated with nitrogen ions at different temperatures: 1 – at 670 K, 2 – at 770 K, 3 – at 870 K

В случае неимплантированных образцов усредненные значения КРП составили 0–10 мВ. КРП на поверхности образцов после ИЛА при 670 и 870 К имеет близкие значения: –5,4 и –6,5 мВ соответственно. В случае ИЛА при 770 К наблюдаются минимальные значения КРП по поверхности –25,1 мВ. Таким образом, увеличение РВЭ для сплава после ИЛА при 770 К можно связать с повышением электронной концентрации поверхности насыщенного азотом сплава вследствие образования карбонитридов и твердых растворов азота с кобальтовой матрицей. Учитывая ранее полученные данные и установленные закономерности между распределением КРП по поверхности образцов и их эксплуатационными свойствами [4–7], можно сделать вывод, что ИЛА твердого сплава ВК6 при 770 К окажет положительный эффект на его износо- и коррозионную стойкость.

На рис. 4 приведены зависимости массового износа исследуемых образцов от пути трения без смазочного материала. Видно, что ИЛА при 670–770 К приводит к уменьшению массового износа в 1,5–3 раза.

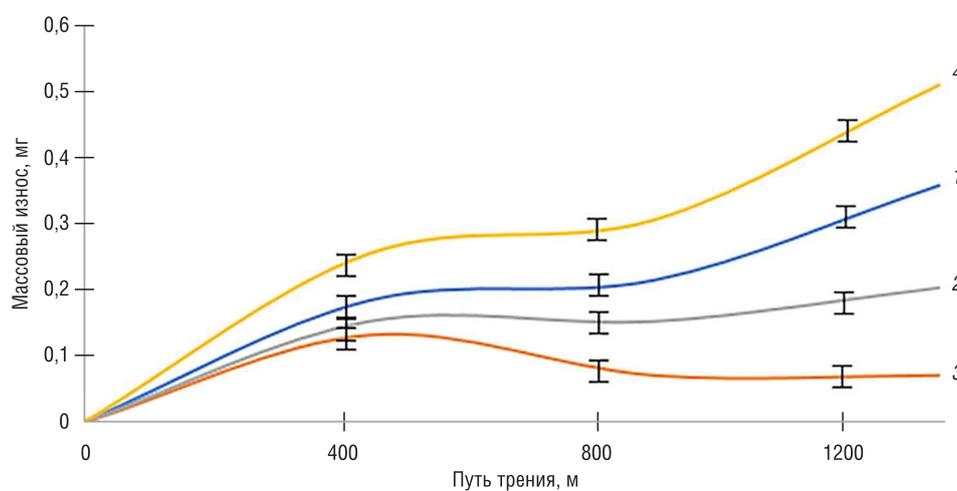


Рис. 4. Зависимость потери массы пластин твердого сплава ВК6, обработанных ионами азота при различных температурах, от пути трения: 1 – исходное состояние; имплантация N⁺: 2 – при 670 К; 3 – при 770 К; 4 – при 870 К

Fig. 4. Dependence of the weight loss of the ВК6 hard alloy plates treated with nitrogen ions at different temperatures from the friction path: 1 – initial state; implantation of N⁺: 2 – at 670 К; 3 – at 770 К; 4 – at 870 К

Видно, что первые 400–500 м массовый износ модифицированных при различных температурах поверхностных слоев равномерен и проходит с одинаковой интенсивностью, а на более поздних стадиях испытаний интенсивность износа заметно отличается, что связано с истиранием модифицированного слоя и выходом в поверхностные слои неимплантированного материала. Повышенная интенсивность массового износа исследуемого сплава, обработанного ионами азота при 870 К, по-видимому, связана с уменьшением микротвердости и увеличением коэффициента трения модифицированной поверхности.

Данные по микротвердости, коэффициентам трения, величинам массового износа образцов твердого сплава ВК6, обработанных ионами азота при различных температурах, а также результаты пересчета средних значений КРП, полученных при сканировании, в соответствующие значения РВЭ, сведены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2. Характеристики поверхностных слоев твердосплавных пластин, обработанных ионами азота при различных температурах

Table 2. Characteristics of surface layers of carbide plates treated with nitrogen ions at different temperatures

Температура ИЛА, К	Микротвердость, ГПа	Среднее значение РВЭ, мэВ	Средний коэффициент трения	Массовый износ, мг
Исходный образец	13,5	–8,0	0,60–0,65	0,19
670	17,5	8,6	0,63–0,65	0,13
770	20,0	40,2	0,65–0,75	0,07
870	19,0	10,4	0,70–0,73	0,26

Как видно из данных табл. 2, ИЛА при 620–820 К эффективно для повышения износостойкости сплавов группы ВК. Сформированный слой работает до 1000 м пути трения без смазочного материала. Кроме того, по данным РВЭ можно предположить, что ИЛА в данном температурном диапазоне будет способствовать повышению коррозионных свойств.

Заключение. На основании проведенных исследований установлено, что обработка твердых сплавов группы ВК в диапазоне температур 750–790 К приводит к увеличению микротвердости сплава и снижению массового износа при трении без смазочного материала до 3 раз. Высокие значения РВЭ, характерные для поверхности твердого сплава, обработанного ионами азота при 770 К, свидетельствуют о его повышенной коррозионной стойкости по сравнению с исходным состоянием.

Благодарности

Авторы выражают признательность В. А. Кукареко за помощь в проведении структурно-фазовых исследований.

Acknowledgements

The authors are grateful to V. A. Kukareko for assistance in carrying out structural-phase studies.

Список использованных источников

1. Инженерия поверхностей конструкционных материалов с использованием плазменных и пучковых технологий / А. В. Белый [и др.]. – Минск: Наука и технология, 2017. – 750 с.
2. Макаров, А. В. Повышение износостойкости сплавов железа за счет создания метастабильных и нанокристаллических структур: дис. ... д-ра техн. наук / А. В. Макаров. – Челябинск, 2009. – 424 с.
3. Белый, А. В. Инженерия поверхностей конструкционных материалов концентрированными потоками ионов азота / А. В. Белый, В. А. Кукареко, А. П. Патеюк. – Минск: Беларус. наука, 2007. – 244 с.
4. Zharin, A. Contact Potential Techniques as Probing Tools in Tribology and Surface Mapping / A. Zharin // *Scanning Probe Microscopy in Nanoscience and Nanotechnology* / ed. by B. Bushan. – Berlin: Springer, 2009. – P. 687–720.
5. Работа выхода электрона и физико-механические свойства хромсодержащих ионно-легированных сталей / А. В. Белый [и др.] // *Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-техн. наук.* – 2016. – № 1. – С. 21–27.
6. Исследование влияния ионно-лучевой обработки стали 12Х18Н10Т на работу выхода электрона / А. В. Белый [и др.] // *Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-техн. наук.* – 2008. – № 4. – С. 62–66.
7. Карпович, А. Н. Повышение эксплуатационных свойств поверхностных слоев хромистых, хромоникелевых и вольфрамомолибденовых сталей методом ионно-лучевого азотирования: дис. ... канд. техн. наук / А. Н. Карпович. – Минск, 2016. – 155 с.

References

1. Belyi A. V., Kalinichenko O. G., Devoyno V. A., Kukareko V. A. *Engineering surfaces of structural materials using plasma and beam technologies*. Minsk, Nauka i tekhnologiya Publ., 2017. 750 p. (in Russian).
2. Makarov A. V. *Increasing the wear resistance of iron alloys by creating metastable and nanocrystalline structures*. Chelyabinsk, 2009. 424 p. (in Russian).
3. Belyi A. V., Kukareko V. A., Pateyuk A. P. *Engineering surfaces of structural materials with concentrated nitrogen ion fluxes*. Minsk, Belorusskaya nauka Publ., 2007. 244 p. (in Russian).
4. Zharin A. Contact Potential Techniques as Probing Tools in Tribology and Surface Mapping. Bushan B. (ed.) *Scanning Probe Microscopy in Nanoscience and Nanotechnology*. Berlin, Springer, 2009, pp. 687–720.
5. Belyi A. V., Karpovich A. N., Zharin A. L., Tyavlovskiy A. K. Work function of the electron and the physical and mechanical properties of chromium-containing ion-alloyed steels. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2016, no. 1, pp. 21–27 (in Russian).
6. Belyi A. V., Zharin A. L., Shipitsa N. A., Kukareko V. A., Taran I. I., Saroko D. I. Investigation of the influence of ion-beam treatment of 12X18H10T steel on the work function of an electron. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2008, no. 4, pp. 62–66 (in Russian).
7. Karpovich A. N. *Increase of operational properties of surfaces layers of chromium, chromium-nickel and tungsten-molybdenum steels by the method of ion-beam nitriding*. Minsk, 2016. 155 p. (in Russian).

Информация об авторах

Белый Алексей Владимирович – член-корреспондент Национальной академии наук Беларуси, доктор технических наук, профессор, заместитель директора по научной работе, Физико-технический институт Национальной академии наук Беларуси (ул. Купревича, 10, 220141, Минск, Республика Беларусь). E-mail: vmo@tut.by

Information about the authors

Alexey V. Belyi – Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, D. Sc. (Engineering), Professor, Deputy Director, Physical-Technical Institute of the National Academy of Sciences of Belarus (10, Kuprevich Str., 220141, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vmo@tut.by

Карпович Анна Николаевна – кандидат технических наук, заведующая лабораторией высокоэнергетических методов обработки, Физико-технический институт Национальной академии наук Беларуси (ул. Купревича, 10, 220141, Минск, Республика Беларусь). E-mail: annakarpovich@bk.ru

Ковальчук Евгений Викторович – аспирант, научный сотрудник лаборатории высокоэнергетических методов обработки, Физико-технический институт Национальной академии наук Беларуси (ул. Купревича, 10, 220141, Минск, Республика Беларусь). E-mail: 1230753@mail.ru

Тявловский Андрей Константинович – кандидат технических наук, доцент кафедры «Информационно-измерительная техника и технологии», Белорусский национальный технический университет (пр. Независимости, 65, 220013, Минск, Республика Беларусь). E-mail: andrey_psf@tut.by

Anna N. Karpovich – Ph. D. (Engineering), Head of the Laboratory of High-Energy Treatment Techniques, Physical-Technical Institute of the National Academy of Sciences of Belarus (10, Kuprevich Str., 220141, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: annakarpovich@bk.ru

Evgeniy V. Kovalchuk – Postgraduate Student, Scientific worker of the Laboratory of High-Energy Treatment Techniques, Physical-Technical Institute of the National Academy of Sciences of Belarus (10, Kuprevich Str., 220141, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: 1230753@mail.ru

Andrey K. Tyavlovski – Ph. D. (Engineering), Associate Professor of Department “Informational and Measuring Technique and Technologies”, Belarusian National Technical University (65, Nezavisimosti Ave., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: andrey_psf@tut.by

В. В. Богданова¹, Д. Н. Арестович², В. П. Кирлица³

¹*Научно-исследовательский институт физико-химических проблем Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь*

²*Университет гражданской защиты МЧС Республики Беларусь, Минск, Беларусь*

³*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНЫХ РЕЦЕПТУРНЫХ ФАКТОРОВ, ОКАЗЫВАЮЩИХ ДОМИНИРУЮЩЕЕ ВЛИЯНИЕ НА ТЕРМОИЗОЛИРУЮЩУЮ СПОСОБНОСТЬ И АТМОСФЕРОСТОЙКОСТЬ ОГНЕЗАЩИТНЫХ ПОКРЫТИЙ

Аннотация. Использован метод математического планирования эксперимента для установления факторов, оказывающих определяющее влияние на термоизолирующие и атмосферостойкие свойства огнезащитных вспениваемых покрытий. Исследования проведены на модельном составе, состоящем из связующего, источника углерода, замедлителя горения и порообразующего агента. Оценку влияния содержания и соотношения основных компонентов покрытия проводили по изменению его термоизолирующей способности и атмосферостойкости. В ходе разведочных экспериментов выбрана рецептура модельного состава со следующим содержанием основных компонентов в расчете на 100 г краски: 30 г меламин-формальдегидной смолы, 10 г пентаэритрита, 30 г полифосфата аммония, 10 г двуокиси титана. Эксперименты по термоизолирующей способности состояли в замере времени в минутах, в течение которого на обратной стороне металлической пластины регистрируется температура 500 °С (СТБ 11.03.02-2010). Атмосферостойкость огнезащитного покрытия определяли согласно НПБ 98-2004. С использованием большого количества экспериментальных данных по изменению термозащитных и атмосферных свойств покрытия в зависимости от его рецептуры построена математическая модель для максимизации математического ожидания. Эта модель с использованием метода Бокса – Уилсона позволила определить оптимальное соотношение базовых компонентов в модельной рецептуре огнезащитного состава для обеспечения нормативных термоизоляционных и эксплуатационных свойств. Показано, что основной вклад в получение требуемого термоизолирующего эффекта вносят такие базовые компоненты состава, как карбонизирующий (пентаэритрит) и порообразующий (двуокись титана) агенты. Однако состав с улучшенными свойствами имеет худшие физико-механические характеристики и не соответствует нормативным требованиям. Найдено, что существует баланс между огне-термозащитными и атмосферостойкими свойствами покрытия. Установление этих фактов позволит направленно подходить к регулированию атмосферостойких и огнезащитных свойств известных и созданию новых эффективных, экономичных огнезащитных покрытий с требуемыми нормативными свойствами.

Ключевые слова: огнезащитное вспениваемое покрытие, математическое планирование эксперимента, доминирующие факторы, атмосферостойкость

Для цитирования. Богданова, В. В. Исследование основных рецептурных факторов, оказывающих доминирующее влияние на термоизолирующую способность и атмосферостойкость огнезащитных покрытий / В. В. Богданова, Д. Н. Арестович, В. П. Кирлица // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2017. – №4. – С. 24–31.

V. V. Bogdanova¹, D. N. Arestovich², V. P. Kirlica³

¹*Scientific Research Institute of Physico-Chemical Problems of the Belarusian State University, Minsk, Belarus*

²*Civil Protection University of the Ministry of Emergency Situations of the Republic of Belarus, Minsk, Belarus*

³*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

RESEARCH OF MAIN RECIPE FACTORS PROVIDING A DOMINANT IMPACT ON THE THERMAL INSULATING CAPACITY AND ATMOSPHERIC RESISTANCE OF FIRE PROTECTIVE COATINGS

Abstract. The method of mathematical experiment planning was used to determine the factors that exert a determining influence on heat-insulating and weather-resistant properties of flame retardant foaming coatings. The studies were carried out on a model composition consisting of a binder, a carbon source, a flame retardant and a pore-forming agent. Evaluation of the influence of the content and the ratio of the main components of the coating was carried out by a change in its heat-insulating ability and weather resistance. During the exploratory experiments, the formulation of the model composition was chosen with the following content of the main components per 100 g of paint: 30 g of melamine-formaldehyde resin, 10 g of

pentaerythritol, 30 g of ammonium polyphosphate, 10 g of titanium dioxide. Experiments on the thermal insulation ability consisted in measuring the time in minutes, during which the temperature of 500 °C was recorded on the back of the metal plate (STB 11.03.02-2010). Weather resistance of the fire retardant coating was determined according to the NPB 98-2004. Using numerous experimental data on the change in the thermal and atmospheric properties of the coating, a mathematical model was constructed to maximize the mathematical expectation, depending on its formulation. This model with the use of the Box – Wilson method allowed to determine the optimal ratio of the base components in the model formulation of the fire-retardant composition to provide the normative heat-insulating and operational properties. It is shown that the basic contribution to obtaining the required heat-insulating effect is made by such basic components of the composition as carbonizing (pentaerythritol) and pore-forming (titanium dioxide) agents. However, the composition with improved properties has the worst physical and mechanical characteristics and does not meet regulatory requirements. It has been found that there is a balance between fire-protective and weather-resistant coating properties. The establishment of these facts will make it possible to approach the regulation of weatherproof and fireproof properties in a directed manner and to create new efficient, economical fire-protective coatings with the required regulatory properties.

Keywords: intumescent flame retardant coating, mathematical planning of experiment, dominant factors, atmospheric resistance

For citation. Bogdanova V. V., Arestovich D. N., Kirlica V. P. Research of main recipe factors providing a dominant impact on the thermal insulating capacity and atmospheric resistance of fire protective coatings. *Vesti Natsyyanal'noi akademii nauk Belarusi. Seriya fizika-technichnykh nauk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2017, no. 4, pp. 24–31 (in Russian).

Введение. Известно, что одной из разновидностей полимерных композиционных материалов, проявляющих вспенивающий эффект, являются огне-термозащитные покрытия (ОТП), в состав которых входят четыре основные группы компонентов [1–3]: полимерное пленкообразующее связующее, источник углерода (коксообразующее вещество), порообразующий и дегидратирующий агенты. Для увеличения термоизолирующей способности огнезащитных покрытий данного типа авторами апробированы добавки, интенсифицирующие процесс вспенивания [4–7].

С использованием огнезащитных покрытий, состоящих в основном из перечисленных компонентов, наряду с эмпирическим подбором ингредиентов для создания композиций с эффективной огне-термозащитой выполнено большое количество исследований механизма процесса вспенивания и роста температуры на необогреваемой поверхности огнезащищенной металлической пластины [8–13]. Однако работ, где бы проводилась оценка влияния содержания и соотношения основных рецептурных компонентов на термоизолирующую способность и атмосферостойкость ОТП, не обнаружено. Вместе с тем наличие такой информации необходимо для обеспечения снижения количества эмпирических экспериментов и улучшения эксплуатационных характеристик при разработке новых рецептур таких покрытий.

С целью накопления информации о базовых рецептурных факторах, вносящих основной вклад в термоизолирующую способность покрытий при воздействии высоких температур, а также о влиянии этих же факторов на атмосферостойкость ОТП методом математического планирования эксперимента определено влияние содержания основных компонентов такого покрытия на его термоизолирующие свойства.

При выборе состава термовспенивающейся огнезащитной краски были проведены пробные исследования, цель которых – выбрать наилучший состав краски для достижения максимального значения долговечности и огнезащитной эффективности. В ходе разведочных экспериментов остановились на модельном составе, в который входили следующие компоненты в расчете на 100 г краски: $x_1^{(0)} = 10$ г источника углерода – пентаэритрита; $x_2^{(0)} = 30$ г фосфорсодержащего антипирена – полифосфата аммония; $x_3^{(0)} = 30$ г пленкообразователя – меламин-формальдегидной смолы; $x_4^{(0)} = 10$ г негорючего порообразующего наполнителя – двуокиси титана. Эти компоненты в соответствии с данными [1–3] были выбраны как основные составляющие огнезащитной краски по металлу.

Эксперименты состояли в замере времени в минутах, в течение которого на обратной стороне металлической пластины температура достигнет 500 °C, и проводились по методике, соответствующей нормативному документу – СТБ 11.03.022010 «Система стандартов пожарной безопасности. Средства огнезащитные. Общие технические требования и методы испытаний». Для исследуемого состава эти значения составили пятимерный вектор $y = (57; 62; 60; 60; 60)$ мин, среднее значение – 59,8 мин. Атмосферостойкость ОТП определяли согласно НТБ 98-2004 «Огнезащитные покрытия. Методы определения устойчивости к старению».

Для построения математической модели, описывающей процесс защиты металла с помощью термовспенивающейся краски огневого воздействия, было решено вначале построить регрессионную модель, содержащую как линейные факторы x_1, x_2, x_3, x_4 , так и их парные взаимодействия:

$$E\{y\} = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{14}x_1x_4 + a_{23}x_2x_3 + a_{24}x_2x_4 + a_{34}x_3x_4, \quad (1)$$

где y – наблюдаемый эффект огнезащитного действия (огне-термоизолирующая эффективность, мин); $E\{y\}$ – математическое ожидание y (эффекта); x_1, x_2, x_3, x_4 – компоненты состава термовспенивающейся краски, измеряемые в граммах; $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}, a_{34}$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие оцениванию.

Для получения наилучших линейных несмещенных оценок неизвестных параметров модели наблюдений (1) был использован полный факторный эксперимент (ПФЭ) с повторными (в данном случае двукратными) наблюдениями в каждой точке ПФЭ. В качестве центра плана ПФЭ была выбрана точка $x_1^{(0)} = 10$ г, $x_2^{(0)} = 30$ г, $x_3^{(0)} = 30$ г, $x_4^{(0)} = 10$ г четырехмерного пространства.

Каждая переменная x_i варьировалась на двух уровнях: $x_i = x_i^0 \pm \Delta x_i, i = 1, 2, 3, 4$. На верхнем уровне $x_i = x_i^0 + \Delta x_i$, на нижнем уровне $x_i = x_i^0 - \Delta x_i$. Здесь Δx_i – интервал варьирования по переменной x_i . Интервал варьирования по каждой компоненте состава термовспенивающейся краски был выбран равным 5 % от значения соответствующей компоненты в центре плана ПФЭ: $\Delta x_1 = 0,5$ г, $\Delta x_2 = 1,5$ г, $\Delta x_3 = 1,5$ г, $\Delta x_4 = 0,5$ г.

В модели (1) для построения ПФЭ перейдем от натуральных переменных x_i к кодированным переменным:

$$X_i = \frac{x_i - x_i^0}{\Delta x_i}, i = 1, 2, 3, 4. \quad (2)$$

Каждая из кодированных переменных X_i принимает значение 1 на верхнем уровне переменной x_i и значение -1 – на нижнем уровне переменной $x_i, i = 1, 2, 3, 4$.

В кодированных переменных (2) модель наблюдения (1) принимает следующий вид:

$$E\{y\} = \theta_0 + \theta_1X_1 + \theta_2X_2 + \theta_3X_3 + \theta_4X_4 + \theta_{12}X_1X_2 + \theta_{13}X_1X_3 + \theta_{14}X_1X_4 + \theta_{23}X_2X_3 + \theta_{24}X_2X_4 + \theta_{34}X_3X_4. \quad (3)$$

Для получения наилучших линейных несмещенных оценок неизвестных параметров модели наблюдений (3) в шестнадцати вершинах гиперкуба кодированных переменных было проведено по два повторных эксперимента с составами термовспенивающейся краски. В табл. 1 представлены план проведения экспериментов и его результаты.

Для того чтобы записать модель наблюдений (3) в матричном виде

$$E\{y\} = P\theta,$$

введем обозначения: $\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{14}, \theta_{23}, \theta_{24}, \theta_{34})$ – вектор неизвестных параметров размерности 11, P – матрица плана эксперимента с повторными наблюдениями, структура которой определяется табл. 2.

В матрице плана экспериментов P столбцы взаимно ортогональны. Наилучшая линейная несмещенная оценка θ для модели наблюдений (3), согласно [18], имеет вид

$$\hat{\theta} = (P'P)^{-1} P'Y, \quad (4)$$

где $Y = (24, 22, 27, 27, 31, 30, 29, 28, 25, 22, 26, 25, 26, 26, 22, 25, 24, 24, 25, 26, 32, 32, 26, 25, 23, 22, 22, 21, 25, 23, 27, 26)$ – вектор наблюдаемых значений экспериментов размерности 32.

Так как матрица планирования экспериментов P имеет взаимно ортогональные столбцы, то формула (4) упрощается и принимает вид

$$\hat{\theta} = N^{-1}P'Y, \quad (5)$$

Т а б л и ц а 1. План проведения экспериментов и его результаты

T a b l e 1. The experiment plan and its results

№ эксперимента	Факторы в натуральном масштабе				Факторы в кодированных переменных				Функция отклика, y
	x_1	x_2	x_3	x_4	X_1	X_2	X_3	X_4	
1	9,5	28,5	28,5	9,5	-1	-1	-1	-1	24
2	9,5	28,5	28,5	9,5	-1	-1	-1	-1	22
3	9,5	28,5	31,5	9,5	-1	-1	1	-1	27
4	9,5	28,5	31,5	9,5	-1	-1	1	-1	27
5	9,5	31,5	28,5	9,5	-1	1	-1	-1	31
6	9,5	31,5	28,5	9,5	-1	1	-1	-1	30
7	9,5	31,5	31,5	9,5	-1	1	1	-1	29
8	9,5	31,5	31,5	9,5	-1	1	1	-1	28
9	10,5	28,5	28,5	9,5	1	-1	-1	-1	25
10	10,5	28,5	28,5	9,5	1	-1	-1	-1	22
11	10,5	28,5	31,5	9,5	1	-1	1	-1	26
12	10,5	28,5	31,5	9,5	1	-1	1	-1	25
13	10,5	31,5	28,5	9,5	1	1	-1	-1	26
14	10,5	31,5	28,5	9,5	1	1	-1	-1	26
15	10,5	31,5	31,5	9,5	1	1	1	-1	22
16	10,5	31,5	31,5	9,5	1	1	1	-1	25
17	9,5	28,5	28,5	10,5	-1	-1	-1	1	24
18	9,5	28,5	28,5	10,5	-1	-1	-1	1	24
19	9,5	28,5	31,5	10,5	-1	-1	1	1	25
20	9,5	28,5	31,5	10,5	-1	-1	1	1	26
21	9,5	31,5	28,5	10,5	-1	1	-1	1	32
22	9,5	31,5	28,5	10,5	-1	1	-1	1	32
23	9,5	31,5	31,5	10,5	-1	1	1	1	26
24	9,5	31,5	31,5	10,5	-1	1	1	1	25
25	10,5	28,5	28,5	10,5	1	-1	-1	1	23
26	10,5	28,5	28,5	10,5	1	-1	-1	1	22
27	10,5	28,5	31,5	10,5	1	-1	1	1	22
28	10,5	28,5	31,5	10,5	1	-1	1	1	21
29	10,5	31,5	28,5	10,5	1	1	-1	1	25
30	10,5	31,5	28,5	10,5	1	1	-1	1	23
31	10,5	31,5	31,5	10,5	1	1	1	1	27
32	10,5	31,5	31,5	10,5	1	1	1	1	26

где $N = nm$ – общее число проведенных экспериментов, n – количество различных точек в ПФЭ, m – количество повторных наблюдений в каждой точке.

Используя статистические функции электронных таблиц Excel, можно получить оценки параметров модели наблюдений (3):

$$E\{y\} = 25,56 - 1,4375X_1 + 1,5X_2 - 0,125X_3 - 0,6875X_4 - 0,625X_1X_2 + 0,25X_1X_3 - 0,125X_1X_4 - 0,9375X_2X_3 + 0,3125X_2X_4 - 0,3125X_3X_4. \quad (6)$$

Проверим, будет ли полученная модель (6) адекватна результатам экспериментов или нет. Согласно формуле (4.5.28) из [18], модель признается неадекватной на уровне значимости α , если выполняется неравенство

$$\frac{(N - n) \left(m\bar{Y}\bar{Y} - N \|\hat{\theta}\|^2 \right)}{(n - p)(Y'Y - m\bar{Y}\bar{Y})} > F_{\alpha; n-p; N-n}, \quad (7)$$

Т а б л и ц а 2. Матрица P

T a b l e 2. The matrix P

X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_1X_2	X_1X_3	X_1X_4	X_2X_3	X_2X_4	X_3X_4
1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1
1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1
1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1
1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1
1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1
1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1
1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

где \bar{Y} – вектор размерности n средних значений экспериментов, в точках с повторными наблюдениями, $F_{\alpha;n-p;N-n}$ – квантиль уровня α распределения Фишера с $n-p$, $N-n$ степенями свободы, p – число оцениваемых параметров модели.

В нашем случае $n=16$, $m=2$, $N=32$, $p=11$, $Y'Y=21174$, $\|\hat{\theta}\|^2=659,4570313$, $\bar{Y}\bar{Y}=10578,5$, $F_{0,05;5;16}=2,8524$. Левая часть неравенства (7) принимает значение 10,2353, что больше, чем 2,8534.

Таким образом, на уровне значимости $\alpha=0,05$ модель наблюдений (6) признается неадекватной и должна быть отклонена. Этот вывод говорит о том, что модель огнезащитного действия термовспенивающейся краски для металлических конструкций должна быть сложнее. Поэтому было решено усложнить модель наблюдений (3) и в новой модели учесть эффекты взаимодействия факторов X_1 , X_2 , X_3 , X_4 тройного и четвертного порядка.

Усложненная модель наблюдений принимает вид:

$$E\{y\} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_4X_4 + b_{12}X_1X_2 + b_{13}X_1X_3 + b_{14}X_1X_4 + \\ + b_{23}X_2X_3 + b_{24}X_2X_4 + b_{34}X_3X_4 + b_{123}X_1X_2X_3 + b_{124}X_1X_2X_4 + \\ + b_{134}X_1X_3X_4 + b_{234}X_2X_3X_4 + b_{1234}X_1X_2X_3X_4. \quad (8)$$

В модели наблюдений (8) число неизвестных параметров $p = 16$, а вектор неизвестных параметров θ имеет вид: $\theta' = (b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_{12}, b_{13}, b_{14}, b_{23}, b_{24}, b_{34}, b_{123}, b_{124}, b_{134}, b_{234}, b_{1234})$.

Аналогично тому, как были получены оценки коэффициентов для модели наблюдений (3), можно получить оценки коэффициентов для модели наблюдений (8):

$$E\{y\} = 25,5625 - 1,4375X_1 + 1,5X_2 - 0,125X_3 - 0,375X_4 - 0,625X_1X_2 + 0,25X_1X_3 - 0,125X_1X_4 - 0,9375X_2X_3 + 0,3125X_2X_4 - 0,3125X_3X_4 + 0,8125X_1X_2X_3 + 0,4375X_1X_2X_4 + 0,5625X_1X_3X_4 + 0,375X_2X_3X_4 + 0,625X_1X_2X_3X_4. \quad (9)$$

Проверим значимость коэффициентов в модели наблюдений (9). Согласно формуле (3.2.13) из [18] коэффициент θ_j значим, если выполняется неравенство

$$\frac{|\theta_j|}{s\sqrt{c_{jj}}} > t_{\alpha; N-p}, \quad (10)$$

где $t_{\alpha; N-p}$ – квантиль уровня α распределения Стьюдента с $N - p$ степенями свободы; c_{jj} – j -й диагональный элемент матрицы $(P'P_1)^{-1}$; P_1 – расширенная матрица планирования экспериментов, составленная по аналогии с матрицей P и включающая дополнительные столбцы, учитывающие эффекты взаимодействия факторов X_1, X_2, X_3, X_4 тройного и четвертного порядка ($X_1X_2X_3, X_1X_2X_4, X_1X_3X_4, X_2X_3X_4, X_1X_2X_3X_4$); s^2 – несмещенная оценка дисперсии равноточных наблюдений.

Для модели наблюдений (9) с двумя повторными наблюдениями в каждой точке ПФЭ имеем: $p = 16, N = 32, s\sqrt{c_{jj}} = 0,1822, t_{0,05;16} = 2,1199$. Следовательно, в силу (10) коэффициенты, стоящие при факторах $X_3, X_4, X_1X_3, X_1X_4, X_2X_4, X_3X_4, X_2X_3X_4$, оказываются незначимыми на уровне значимости $\alpha = 0,05$. Отбрасывая незначимые коэффициенты в модели (9), приходим к модели наблюдений

$$E\{y\} = 25,5625 - 1,4375X_1 + 1,5X_2 - 0,625X_1X_2 - 0,9375X_2X_3 + 0,8125X_1X_2X_3 + 0,4375X_1X_2X_4 + 0,5625X_1X_3X_4 + 0,625X_1X_2X_3X_4. \quad (11)$$

Проверим, будет ли адекватна модель (11) на уровне значимости $\alpha = 0,05$. Для этого воспользуемся неравенством (7). Для модели (11) имеем: $\|\hat{\theta}\|^2 = 660,5859375, F_{\alpha; n-p; N-n} = F_{0,05; 7; 16} = 2,6571966$. Значения $Y'Y$ и $\bar{Y}\bar{Y}$ остаются такими же, как и для модели наблюдений (6). Левая часть неравенства (7) принимает значение 2,45378, что меньше, чем 2,6572. Следовательно, модель (11) адекватна на уровне значимости 0,05 результатам экспериментов.

Для того чтобы перейти от кодированных к натуральным переменным, необходимо произвести в модели наблюдений (11) следующую замену переменных: $X_1 = (x_1 - 10)/0,5; X_2 = (x_2 - 30)/1,5; X_3 = (x_3 - 30)/1,5; X_4 = (x_4 - 10)/0,5$.

Получаем модель наблюдений в натуральных переменных:

$$E\{y\} = 84899,3 - 8527,87x_1 - 2978,17x_2 - 2954,17x_3 - 9200,0x_4 + 299,167x_1x_2 + 296,667x_1x_3 + 920,0x_1x_4 + 103,472x_2x_3 + 321,667x_2x_4 + 318,333x_3x_4 - 10,3889x_1x_2x_3 - 32,1667x_1x_2x_4 - 31,833x_1x_3x_4 - 11,111x_2x_3x_4 + 1,111x_1x_2x_3x_4. \quad (12)$$

Модель (11) можно использовать для максимизации математического ожидания y по методу Бокса – Уилсона [18]. Градиент функции (11) в центре плана ПФЭ, то есть при $X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 0$ представляет собой вектор размерности четыре: $g = (-1,4375; 1,5; 0; 0)$. Двигаясь по направлению этого градиента с шагом $\alpha_s = 0,2$, переходим из центра плана ПФЭ в точку с координатами $X_1 = -0,2875, X_2 = 0,3, X_3 = 0, X_4 = 0$, или в натуральных переменных в точку с координатами $x_1 = 9,86, x_2 = 30,45, x_3 = 30, x_4 = 10$. При изменении рецептуры в соответствии с полученными значениями, определяющими максимальную огнезащитную эффективность факторов по методу Бокса – Уилсона [18], получен новый состав термовспенивающейся краски с улучшенными огнезащитными свойствами. Однако этот состав, как показали дополнительные экспериментальные исследования, имеет худшие физико-механические характеристики и не соответствует требованиям технических нормативных правовых актов Республики Беларусь, предъявляемым к сроку сохранения огнезащитной эффективности состава.

Заклучение. Таким образом, применение метода математического планирования эксперимента позволило выявить рецептурные факторы, оказывающие определяющее влияние на термоизолирующие свойства вспененной структуры, образующейся при тепловом воздействии на огнезащитное покрытие. Найдено, что существует баланс между огне-термозащитными и атмосферостойкими свойствами покрытия. Показано, что основной вклад в получение требуемого термоизолирующего эффекта вносят карбонизирующий и порообразующий агенты. Установление этого факта позволяет направленно подходить к регулированию эксплуатационных и термозащитных свойств известных огнезащитных покрытий и созданию новых эффективных и экономичных вспениваемых материалов.

Список использованных источников

1. Халтуринский, Н. А. О механизме образования огнезащитных вспучивающихся покрытий / Н. А. Халтуринский, Т. А. Рудакова // Изв. ЮФУ. Техн. науки. – 2013. – № 8 (145). – С. 220–227.
2. Машляковский, Л. Н. Органические покрытия пониженной горючести / Л. Н. Машляковский, А. Д. Лыков, В. О. Репкин. – Л.: Химия, 1989. – 235 с.
3. Антонов, А. В. Горение косообразующих вспучивающихся покрытий / А. В. Антонов, И. С. Решетников, Н. А. Халтуринский // Успехи химии. – 1999. – Т. 68, № 7. – С. 667–673.
4. Специфические реакции ингредиентов в огнезащитных вспучивающихся лакокрасочных покрытиях / О. А. Зыбина [и др.] // Лакокрасочные материалы и их применение. – 2014. – № 12. – С. 30–33.
5. Некоторые аспекты повышения огнезащитной эффективности вспенивающегося покрытия / В. П. Васин [и др.] // Полимерные материалы пониженной горючести: тр. VI Междунар. конф. – Вологда: ВОГТУ, 2011. – С. 132–135.
6. Лапушкин, М. П. Влияние неорганических антипиренов на огнезащитную эффективность составов интумесцентного типа / М. П. Лапушкин, П. А. Фещенко, Р. А. Вахитов // Лакокрасочные материалы и их применение. – 2007. – № 1/2. – С. 48–54.
7. Влияние состава и особенностей поведения вспучивающихся огнезащитных покрытий на их эффективность / А. Н. Гаращенко [др.] // Вопр. оборон. техники. Сер. 15. Композиционные неметаллические материалы в машиностроении. – 2010. – Вып. 4. – С. 33–38.
8. Branca, C. Analysis of the combustion kinetics and thermal behavior of an intumescent system / C. Branca, D. Blasi, H. Horacek // Industrial & Engineering Chemistry Research. – 2002. – Vol. 41. – P. 2107–2114.
9. Blasi, D. The state of the art of transport models for charring solid degradation / D. Blasi // Polymer International. – 2000. – Vol. 49. – P. 1133–1146.
10. Страхов, В. Л. Огнезащита строительных конструкций / В. Л. Страхов, А. М. Крутов, Н. Н. Давыдкин. – М.: ТИМР, 2000. – 433 с.
11. Математическое моделирование горения вспучивающихся огнезащитных материалов / В. Л. Страхов [и др.] // Физика горения и взрыва. – 2001. – Т. 37, № 2. – С. 63–73.
12. Ненахов, С. А. Физико-химия вспенивающихся огнезащитных покрытий на основе полифосфата аммония (обзор литературы) / С. А. Ненахов, В. П. Пименова // Пожаровзрывобезопасность. – 2010. – № 8. – С. 11–57.
13. Влияние состава и особенностей поведения вспучивающихся огнезащитных покрытий на их эффективность / А. Н. Гаращенко [и др.] // Полимерные материалы пониженной горючести: тр. VI Междунар. конф. – Вологда: ВОГТУ, 2011. – С. 135–138.
14. Асатурян, В. И. Теория планирования эксперимента / В. И. Асатурян. – М.: Радио и связь, 1983. – 248 с.

References

1. Khalturinski N. A., Rudakova T. A. About of mechanism of fire retardant intumescent covers formation. *Izvestiya YFU. Tehnicheskie nauki = Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*, 2013, no. 8, pp. 220–227 (in Russian).
2. Mashlyakovskiy L. N., Lykov A. D., Repkin V. O. *Organic coatings of low flammability*. Leningrad, Khimiya Publ., 1989. 235 p. (in Russian).
3. Antonov A. V., Reshetnikov I. S., Khalturinskii N. A. Combustion of oblique-forming intumescent coatings. *Russian Chemical Reviews*, 1999, vol. 68, no. 7, pp. 605–614. Doi: 10.1070/rc1999v068n07abeh000408
4. Zybina O. A., Yakunina I. E., Babkin O. E., Mnatsakanov S. S. Specific reactions of ingredients in fireproof intumescent coatings. *Lakokrasochnye materialy i ikh primeneniye = Russian Coatings Journal*, 2014, no. 12, pp. 30–33 (in Russian).
5. Vasin V. P., Rudakova T. A., Grigor'ev Y. A., Azerin N. A. Some Aspects of Increasing the Fire-Resistance Efficiency of a Foaming Coating. *Polimernye materialy ponizhennoi goriuchesti: trudy VI Mezhdunarodnoi konferentsii* [Polymeric Materials of Low Combustibility: Proceedings of the VI International Conference]. Vologda, Vologda State University, 2011, pp. 132–135 (in Russian).
6. Lapushkin M. P., Feshchenko P. A., Vahitov R. A. Influence of inorganic flame retardants on the flame retardant effectiveness of compositions of intumescent type. *Lakokrasochnye materialy i ikh primeneniye = Russian Coatings Journal*, 2007, no. 1/2, pp. 48–54 (in Russian).
7. Garashchenko A. N., Kul'kov A. A., Vasin V. P., Rudakova T. A. Influence of the composition and behavior of intumescent flame retardant coatings on their efficiency. *Voprosy oboronnoi tekhniki. Seriya 15. Kompozitsionnye nemetallicheskie materialy v mashinostroenii* [Questions of defense technology. Series 15. Composite nonmetallic materials in mechanical engineering.], 2010, iss. 4, pp. 33–38 (in Russian).

8. Branca C., Blasi D., Horacek H. Analysis of the combustion kinetics and thermal behavior of an intumescent system. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 2002, vol. 41, pp. 2107–2114. Doi: 10.1021/ie010841u
9. Blasi D. The state of the art of transport models for charring solid degradation. *Polymer International*, 2000, vol. 49, pp. 1133–1146. Doi: 10.1002/1097-0126(200010)49:10<1133::aid-pi519>3.0.co;2-e
10. Strakhov V. L., Krutov A. M., Davydkin N. N. *Fire protection of building structures*. Moscow, TIMR Publ., 2000. 433 p. (in Russian).
11. Strakhov V. L., Garashchenko A. N., Kuznetsov G. V., Rudzinskii V. P. Mathematical modeling of the combustion of intumescent flame retardant materials. *Combustion, Explosion, and Shock Wave*, 2001, vol. 37, no. 2, pp. 178–186. Doi: 10.1023/a:1017557726294
12. Nenakhov S. A., Pimenova V. P. Physical chemistry of foaming fireproof coatings based on ammonium polyphosphate (literature review). *Pozharovzryvobezopasnost' = Fire and Explosion Safety*, 2010, no. 8, pp. 11–57 (in Russian).
13. Garashchenko A. N., Kul'kov A. A., Pasin V. P., Rudakova T. A. Influence of the composition and behavior of intumescent flame retardant coatings on their effectiveness. *Polimernye materialy ponizhennoi goriuchesti: trudy VI Mezhdunarodnoi konferentsii* [Polymeric Materials of Low Combustibility: Proceedings of the VI International Conference]. Vologda, Vologda State University, 2011, pp. 135–138 (in Russian).
14. Asaturyan V. I. *Theory of experimental design*. Moscow, Radio i sviaz' Publ., 1983. 248 p. (in Russian).

Информация об авторах

Богданова Валентина Владимировна – доктор химических наук, профессор, заведующая лабораторией огнетушащих материалов, Научно-исследовательский институт физико-химических проблем Белорусского государственного университета (ул. Ленинградская, 14, 220006, Минск, Республика Беларусь). E-mail: bogdanova@bsu.by

Арестович Дмитрий Николаевич – кандидат технических наук, ученый секретарь, Университет гражданской защиты МЧС Республики Беларусь (ул. Машиностроителей, 25, 220118, Минск, Республика Беларусь). E-mail: dm_ar@tut.by

Кирлица Валерий Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: kirlitsa@bsu.by

Information about the authors

Valentina V. Bogdanova – D. Sc. (Chemistry), Professor, Head of the Laboratory of Fire-Extinguishing Materials, Scientific Research Institute of Physico-Chemical Problems of the Belarusian State University (14, Leningradskaya Str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: bogdanova@bsu.by

Dmitry N. Arestovich – Ph. D. (Engineering), Scientific Secretary, Civil Protection University of the Ministry of Emergency Situations of the Republic of Belarus (25, Mashinostroiteley Str., 220118, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: dm_ar@tut.by

Valery P. Kirlitsa – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kirlitsa@bsu.by

Л. К. Матковская^{1,2}, М. В. Юрженко¹, Е. П. Мамуня¹, Ж. Буато²

¹Институт химии высокомолекулярных соединений Национальной академии наук Украины, Киев, Украина

²Университет Лион 1, Лаборатория инженерии полимерных материалов, Виллербан, Франция

ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ СТРУКТУРОЙ, ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ ИОНОПРОВОДЯЩИХ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТОВ НА ОСНОВЕ ЭПОКСИДНЫХ ОЛИГОМЕРОВ И СОЛИ ПЕРХЛОРАТА ЛИТИЯ

Аннотация. Твердые полимерные электролиты (ТПЭ) могут выступать в качестве ионопроводящего материала в различных электрохимических устройствах. Значительные усилия исследователей в области полимеров направлены на достижение высокой ионной проводимости одновременно с улучшенной механической стабильностью ТПЭ. Целью данной работы является исследование взаимосвязи между структурой, электрическими и диэлектрическими свойствами сшитого ионопроводящего полимера на основе смеси олигомеров, которые имеют сходные функциональные эпоксидные группы. Методами дифференциальной сканирующей калориметрии, широкоугольной дифракции рентгеновских лучей и широкополосной диэлектрической спектроскопии изучено влияние содержания соли перхлората лития на структуру и свойства полимерных систем, синтезированных на основе эпоксидного алифатического олигомера – диглицидилового эфира полиэтиленгликоля ДЭГ-1 и эпоксидиановой смолы ЭД-20, отверждение которых проводилось полиэтиленполиамином. Установлено, что температура стеклования синтезированных систем возрастает с увеличением количества соли LiClO₄, что связано с образованием координационных комплексов между катионами лития и атомами макромолекулярных цепей ДЭГ-1 и ЭД-20. Присутствие на широкоугольной рентгеновской дифрактограмме одного дифракционного максимума диффузного типа, угловое значение которого составляет приблизительно 19,6, свидетельствует, что системы являются аморфными и характеризуются ближним порядком при трансляции в пространстве фрагментов их межузловых молекулярных звеньев. Действительные составляющие диэлектрической проницаемости и комплексной электрической проводимости зависят от содержания соли перхлората лития и температуры, при которой проводились измерения. Максимальный уровень ионной проводимости и диэлектрической проницаемости выявлен при повышенных температурах у систем, синтезированных с концентрацией соли перхлората лития 30 м. ч.

Ключевые слова: алифатический и ароматический олигомеры, соль перхлората лития, аморфная система, температура стеклования, ионная проводимость

Для цитирования. Взаимосвязь между структурой, электрическими и диэлектрическими свойствами ионопроводящих полимерных композитов на основе эпоксидных олигомеров и соли перхлората лития / Л. К. Матковская [и др.] // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2017. – №4. – С. 32–37.

L. K. Matkovska^{1,2}, M. V. Iurzhenko¹, Ye. P. Mamunya¹, G. Boiteux²

¹Institute of Macromolecular Chemistry of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

²University of Lyon, University Lyon 1, Laboratory for Polymer Materials Engineering, Villeurbanne, France

THE RELATIONSHIP BETWEEN STRUCTURE, ELECTRICAL AND DIELECTRIC PROPERTIES OF THE ION-CONDUCTING POLYMER COMPOSITES BASED ON THE EPOXY OLIGOMERS AND THE LITHIUM PERCHLORATE SALTS

Abstract. Solid polymer electrolytes (SPE) have received a great attention to the decisive role as an ionic conductor in various electrochemical devices. Significant efforts have been devoted to the high ionic conductivity with better mechanical stability of SPE. The aim of this work is to investigate the relationship between structure, electrical and dielectric properties of the crosslinked ion-conducting polymers based on a mixture of oligomers with similar functional epoxy groups. The effect of lithium perchlorate salt content on structure and properties of the synthesized polymer systems based on aliphatic epoxy oligomer – diglycidylether of ethylene glycol DEG-1 and epoxy-diane resin ED-20, which were cured by polyethylene polyamine, has been studied by means of the Differential Scanning Calorimetry, the Wide Angle X-ray Diffraction and the Broadband Dielectric Spectroscopy. It was found that the glass transition temperature of the synthesized systems increases with increasing amount of the LiClO₄ that is connected with formation of coordination complexes between lithium cations and atoms of macromolecular chains. Presence of one single diffraction maximum of the diffuse type, an angular value of which is approximately 19.6, on the wide angle X-ray diffractograms indicates that systems are amorphous and they are characterized by the short-range ordering. The real parts of permittivity and complex electrical conductivity depend on the content of lithium perchlorate salt and temperature of measurements. The maximum level of ionic conductivity and permittivity at elevated temperatures was revealed for the systems with a concentration 30 phr. of the lithium perchlorate salt.

Keywords: aliphatic and aromatic oligomers, lithium perchlorate salt, amorphous system, glass transition temperature, ionic conductivity

For citation. Matkovska L. K., Iurzenko M. V., Mamunya Ye. P., Boiteux G. The relationship between structure, electrical and dielectric properties of the ion-conducting polymer composites based on the epoxy oligomers and the lithium perchlorate salts. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2017, no. 4, pp. 32–37 (in Russian).

Введение. Разработка новых твердых полимерных электролитов (ТПЭ) была и остается важной задачей (поскольку до сих пор не достигнуто оптимальное соотношение между высокой ионной проводимостью и хорошей технологичностью материала [1]) в связи с необходимостью поиска новых, более эффективных видов электролитов для расширения области их применения в различных устройствах [2]. ТПЭ, как правило, включают в себя соли различных металлов, растворенных в полимере, который формирует твердую матрицу с ионной проводимостью [3, 4]. Также считается, что при разработке и создании твердотельного электролитного материала целесообразно использовать полимеры, поскольку они могут сочетать в себе такие важные характеристики, как технологичность формирования и обработки, высокая термическая стабильность (по сравнению с существующими жидкостными аналогами), гибкость и легкость формообразования, универсальность, высокая плотность энергии, безопасность, нетоксичность и т. д. [5–7]. Добавление солей в полимеры обеспечивает наличие источника ионов и сопутствует их движению вдоль полимерной цепи, что играет решающую роль в процессе переноса ионов в полимерных электролитах [8]. Среди полимеров, применяемых для создания ТПЭ, наиболее изучен полиэтиленоксид (ПЭО). Это связано с эффективностью координации ионов металлов в нем благодаря оптимальным расстояниям и ориентации атомов эфирного кислорода в его цепях [3]. В то же время ПЭО характеризуется низкой ионной проводимостью при комнатной температуре, что обусловлено высокой степенью его кристалличности и высокой температурой плавления его кристаллической фазы [7, 9, 10]. Однако наличие атомов эфирного кислорода в полимерной цепи характерно не только для ПЭО, но и, к примеру, для эпоксидного алифатического олигомера – диглицидилового эфира полиэтиленгликоля (ДЭГ), что обеспечивает и в нем необходимый перенос катиона металла.

Эпоксидные смолы – это широкоизвестные термореактивные материалы, многие из которых благодаря своим термомеханическим, барьерным, химическим и электрическим свойствам, низкой усадке при отверждении и высокой адгезии к различным подложкам являются интересными объектами для использования в высокотехнологических областях промышленности [11]. Свойства конечных полимеров на их основе существенным образом зависят от конкретной комбинации используемого типа эпоксидных смол и отвердителей [12, 13]. Например, они часто применяются в качестве матрицы как в изоляционных, так и в электропроводящих полимерных композитах [14, 15]. Для получения материалов с оптимизированными свойствами широко используются смеси полимеров [16]. Сополимеры, которые имеют сходные функциональные эпоксидные группы, позволяют формировать сшитые системы благодаря единой для них реакции с диамином – отверждающим агентом [17].

Целью данной работы являлось исследование тепловых и электрических свойств сшитого в присутствии соли перхлората лития аморфного полимера на основе смеси алифатического и ароматического олигомеров, которые имеют сходные функциональные эпоксидные группы.

Методы. Для синтеза эпоксиполимерного ионопроводящего материала использовали эпоксидный олигомер ДЭГ-1 (45 %), эпоксидиановую смолу ЭД-20 (45 %) и соль перхлората лития (LiClO_4) с концентрацией от 0 до 30 м. ч. (массовых частей) к 100 % полимерной матрицы. Соль перхлората лития, ДЭГ-1 и ЭД-20 предварительно сушили 8 ч в вакууме при 80 °С. После высушивания соль растворяли в олигомере ДЭГ-1, нагревая раствор на песчаной бане, и добавляли ЭД-20. В качестве отвердителя использовали полиэтиленполиамин (10 %).

Теплофизические характеристики изучали методом дифференциальной сканирующей калориметрии (ДСК) на приборе TA Instruments DSC Q2000 в интервале температур от –70 до +200 °С со скоростью нагрева 10 °С/мин. Температуры стеклования синтезированных полимерных систем ($T_{\text{ст}}$) определяли по ДСК-кривым при втором нагреве.

Особенности упорядоченности фрагментов макроцепи при трансляции их в объеме полимерных систем на основе эпоксидного полимера и соли перхлората лития LiClO_4 исследовали методом широкоугольной дифракции рентгеновских лучей (ШДРЛ) с использованием рентгеновского дифрактометра ДРОН-4-07, рентгенооптическая схема которого выполнена по методу

Дебая – Шерера на прохождение монохроматизированного Ni-фильтром первичного пучка через исследуемый образец полимера с использованием CuK_α -излучения ($\lambda = 1,54 \cdot 10^{-10}$ м). В качестве источника характеристического рентгеновского излучения использовали рентгеновскую трубку БСВ27Cu, которая работала в режиме $U = 30$ кВ, $I = 30$ мА. Исследование выполняли методом автоматического пошагового сканирования в интервале углов рассеяния (2θ) от 2,6 до 40 градусов, время экспозиции составляло 5 с. Эксперимент проводили при температуре $T = 20 \pm 2$ °С.

Электрическую (действительная составляющая комплексной электрической проводимости σ') и диэлектрическую (действительная составляющая комплексной диэлектрической проницаемости ϵ') характеристики синтезированных систем изучали с помощью широкополосного диэлектрического анализатора Novocontrol Alpha высокого разрешения, совмещенного с Novocontrol Quatro Cryosystem и оборудованного двухэлектродной схемой, в частотном диапазоне 10^{-1} – 10^7 Гц и температурном интервале от -60 до $+200$ °С. Напряжение, которое при этом прикладывалось к образцу, составляло 0,5 В. Исследуемые образцы имели геометрию диска диаметром 30 мм и толщиной 0,5 мм, на которые во избежание ошибок эксперимента и для высокой точности результатов предварительно путем напыления в вакууме наносилось алюминиевые покрытия, выступающие в роли электродов. Измерения проводились в изотермических условиях, скорость нагрева между изотермическими полками составляла 2 °С/мин. Данные анализировались с помощью программного обеспечения Novocontrol WinDETA версии 3.8.

Результаты. Температуры стеклования синтезированных систем напрямую зависят от содержания перхлората лития в реакционной смеси. Так, при содержании LiClO_4 равном 0 м. ч. температура стеклования в первом приближении равна 40 °С, при 5 м. ч. – 63 °С, при 10 м. ч. – 75 °С, при 15 м. ч. – 83 °С, при 20 м. ч. – 92 °С, а при 30 м. ч. – 103 °С. При введении в систему соли LiClO_4 , в структуру которой входят катионы лития Li^+ , в результате их электростатического взаимодействия с атомами макромолекулярных цепей ДЭГ-1 и ЭД-20 образуются координационные комплексы, что сопровождается смещением электронной плотности атомов кислорода и их частичной поляризацией. В результате происходит существенное уменьшение сегментальной подвижности цепей эпоксидных полимеров в пределах образованных комплексов, что и может быть причиной роста температуры стеклования полимерной матрицы.

Анализ широкоуголовых рентгеновских дифрактограмм систем на основе алифатического и ароматического олигомеров и LiClO_4 показал, что они являются аморфными (рис. 1) и, соответственно, характеризуются ближним порядком при трансляции в пространстве фрагментов их меж-

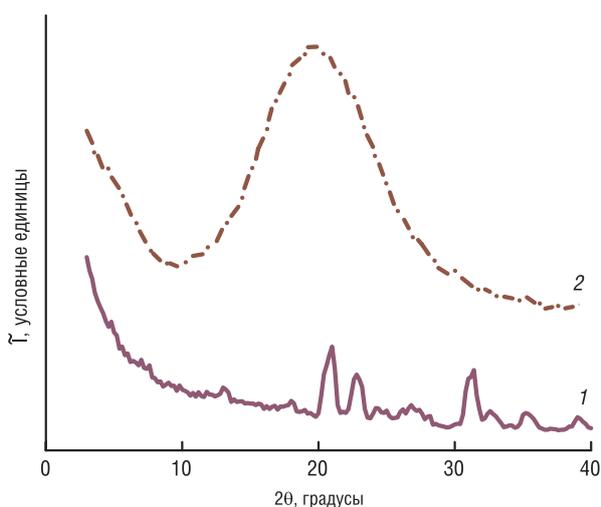


Рис. 1. Широкоуголовые рентгеновские дифрактограммы соли перхлората лития (1) и системы на основе алифатического ДЭГ-1 и ароматического олигомера ЭД-20 с 30 м. ч. LiClO_4 (2)

Fig.1. Wide-angle X-ray diffraction patterns of lithium perchlorate salt (1) and systems based on aliphatic DEG-1 and aromatic oligomer ED-20 with 30 phr. of LiClO_4 (2)

узловых молекулярных звеньев [18]. Об этом свидетельствует проявление на дифрактограмме одного дифракционного максимума диффузного типа, угловое положение ($2\theta_m$) которого составляет приблизительно 19,6. Средняя величина периода (d) ближнего порядка междуузловых молекулярных звеньев ДЭГ-1 и ЭД-20 при размещении их в пространстве, согласно уравнению Брэгга: $d = l (2\sin\theta_m)^{-1}$, где l – длина волны характеристического рентгеновского излучения ($l = 1,54 \cdot 10^{-10}$ м для CuK_α -излучения), – составляет $4,1 \cdot 10^{-10}$ м.

На рис. 2 приведены изотермы действительной составляющей диэлектрической проницаемости (ϵ') и действительной составляющей комплексной электрической проводимости (σ') для различной концентрации LiClO_4 в системах, полученные в пределах температур от -60 до $+200$ °С. Из приведенных данных очевидно, что числовые значения и характер кривых σ' и ϵ' зависят от двух факторов – содержания соли LiClO_4 и температуры изотермической пол-

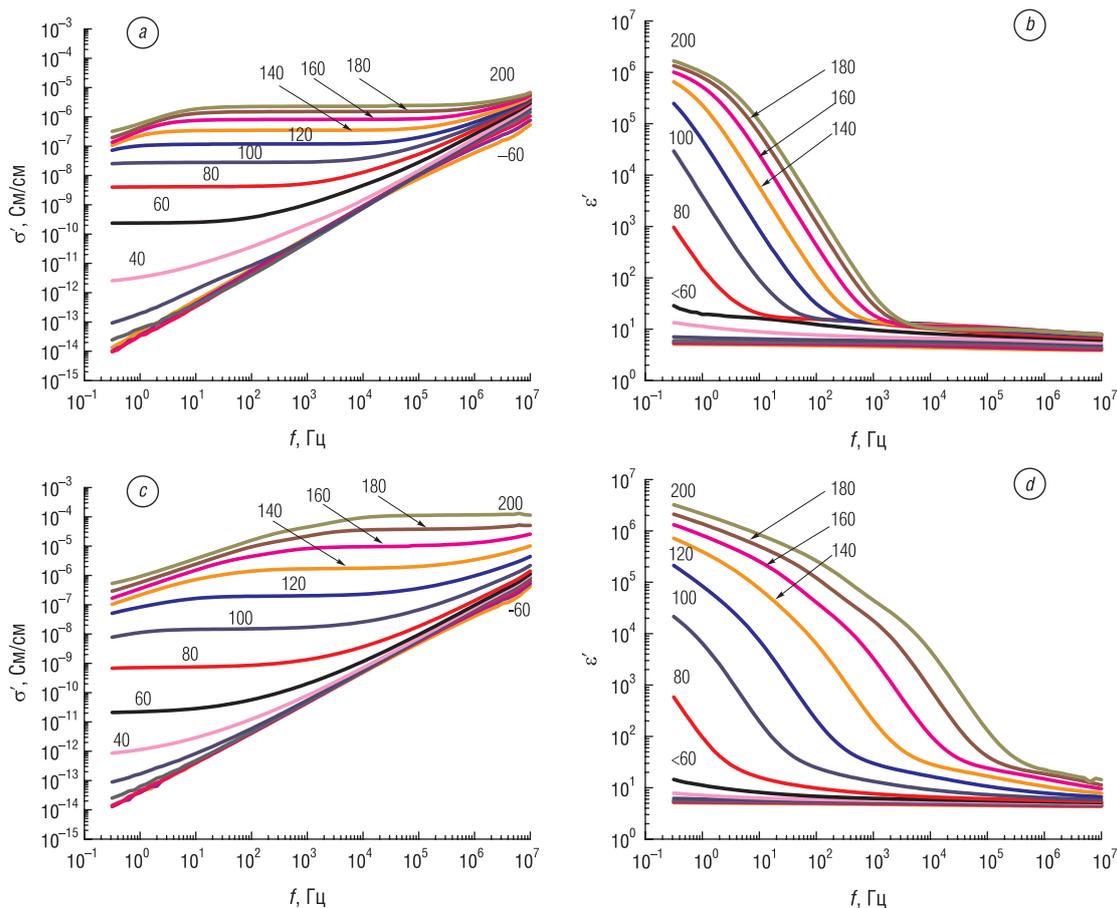


Рис. 2. Спектры действительной составляющей комплексной электропроводимости (a, c) и действительной составляющей комплексной диэлектрической проницаемости (b, d) эпоксидных систем с содержанием соли LiClO_4 0 м. ч. (a, b) и 30 м. ч. (c, d). Цифрами на кривых обозначены температуры измерений

Fig. 2. Spectra of the real part of complex conductivity (a, c) and the real part of complex dielectric permittivity (b, d) of the epoxy systems with 0 (a, b) and 30 (c, d) phr. of LiClO_4 . The values of temperature are shown near curves

ки, при которой проводилось измерение. При температурах ниже температуры стеклования диэлектрическая проницаемость систем имеет низкие значения, неизменные с частотой, что прежде всего свидетельствует о низкой подвижности макромолекулярных цепей полимерной матрицы. При увеличении температуры подвижность макромолекулярных цепей возрастает и количество свободных носителей заряда – ионов лития Li^+ , преодолевающих энергетический барьер и переходящих в проводящее состояние. Свободные катионы лития начинают двигаться вдоль полимерной цепи, образуя и разрушая координационные комплексы с эфирной связью полиэтиленоксидного фрагмента ДЭГ-1 и ОН-группой раскрытого эпоксидного цикла ДЭГ-1, а также с вторичной аминогруппой полиэтиленполиамина, с вторичной или третичной аминогруппами и эфирной связью одновременно [19]. Этот перенос заряда приводит к росту уровня электропроводимости систем и появлению плато при низких частотах (так называемое плато *DC* электропроводимости – область изотермы, на которой ее значения не зависят от частоты) на спектрах их действительной составляющей комплексной электропроводимости σ' .

Заключение. Таким образом, установлено, что синтезированные эпоксидные системы являются аморфными, при этом соль перхлората лития существенно влияет на их структуру, о чем свидетельствует повышение температуры стеклования их полимерной матрицы с 40 до 103 °С с увеличением концентрации соли LiClO_4 от 0 до 30 м. ч. Также добавление соли ведет к увеличению количества носителей заряда – катионов лития Li^+ и, соответственно, сопутствует росту ионной проводимости и диэлектрической проницаемости синтезированных систем. Максимальный уровень ионной проводимости ($\sim 10^{-4}$ См/см) и диэлектрической проницаемости ($3 \cdot 10^4$) при повышенных температурах (до 200 °С) выявлен для систем, синтезированных с концентрацией соли LiClO_4 30 м. ч.

Благодарности

Работа проводилась в рамках проекта «Создание новых электроактивных полимерных композитов с гибридными нанонаполнителями на основе концепции синергизма» Целевой комплексной программы фундаментальных исследований Национальной академии наук Украины «Фундаментальные проблемы создания новых наноматериалов и нанотехнологий».

Л. К. Матковская благодарит за финансовую поддержку Министерство иностранных дел Франции, грант Eiffel № 870734L.

Acknowledgments

This work was carried out in the frame of the project “Creation of new electroactive polymer composites with hybrid nanofillers based on synergism concept” of Target complex programme of fundamental investigations of the National Academy of Sciences of Ukraine “Fundamental problems of creation of new nanomaterials and nanotechnologies”.

L. K. Matkovska acknowledges the financial support of the French Ministry of Foreign Affairs, Eiffel grant № 870734L.

Список использованных источников

1. Ionic conductivity in polyethylene-b-poly(ethylene oxide)/lithium perchlorate solid polymer electrolytes / L. A. Guilherme [et al.] // *Electrochim. Acta*. – 2007. – Vol. 53, № 4. – P. 1503–1511.
2. Chai, M. N. Investigation on the conduction mechanism of carboxyl methylcellulose-oleic acid natural solid polymer electrolyte / M. N. Chai, M. I. N. Isa // *Int. J. Adv. Technol. Eng. Res.* – 2012. – Vol. 2, № 6. – P. 36–39.
3. Solid polymer electrolytes based on polyethylene oxide and lithium trifluoro-methane sulfonate (PEO–LiCF₃SO₃): Ionic conductivity and dielectric relaxation / N. K. Karan [et al.] // *Solid State Ionics*. – 2008. – Vol. 179, № 19–20. – P. 689–696.
4. Supramolecular polymer/metal salt complexes containing quadruple hydrogen bonding units / Kyung Ju Lee [et al.] // *J. Polym. Sci. Part B: Polym. Phys.* – 2007. – Vol. 45. – P. 3181–3188.
5. Guhathakurta, S. Lithium sulfonate promoted compatibilization in single ion conducting solid polymer electrolytes based on lithium salt of sulfonated polysulfone and polyether epoxy / S. Guhathakurta, K. Min // *Polymer*. – 2010. – № 51. – P. 211–221.
6. Free mesogen assisted assembly of the star-shaped liquid-crystalline copolymer/polyethylene oxide solid electrolytes for lithium ion batteries / Yo. Tonga [et al.] // *Electrochim. Acta*. – 2014. – № 118. – P. 33–40.
7. Klongkan, S. Effects of the addition of LiCF₃SO₃ salt on the conductivity, thermal and mechanical properties of PEO–LiCF₃SO₃ solid polymer electrolyte / S. Klongkan, J. Pumchusak // *Int. J. Chem. Eng. Appl.* – 2015. – Vol. 6, № 3. – P. 165–168.
8. Dey, A. Effect of nanofillers on thermal and transport properties of potassium iodide–polyethylene oxide solid polymer electrolyte / A. Dey, S. Karan, S. K. De // *Solid State Communications*. – 2009. – Vol. 149, № 31–32. – P. 1282–1287.
9. Das, S. Ionic conductivity and dielectric permittivity of PEO–LiClO₄ solid polymer electrolyte plasticized with propylene carbonate / S. Das, A. Ghosh // *AIP Advances*. – 2015. – Vol. 5, № 2. – Id. 027125.
10. Karmakar, A. Structure and ionic conductivity of ionic liquid embedded PEO–LiCF₃SO₃ polymer electrolyte / A. Karmakar, A. Ghosh // *AIP Advances*. – 2014. – № 4. – Id. 087112.
11. A review of lithium and non-lithium based solid state batteries / J. G. Kim [et al.] // *J. Power Sources*. – 2015. – № 282. – P. 299–322.
12. Co-continuous structural electrolytes based on ionic liquid, epoxy resin and organoclay: Effects of organoclay content / Ya. Yu [et al.] // *Materials & Design*. – 2016. – № 104. – P. 126–133.
13. Effects of curing agent on conductivity, structural and dielectric properties of an epoxy polymer / W. Jilani [et al.] // *Polymer*. – 2015. – № 79. – P. 73–81.
14. Development of a novel type of solid polymer electrolyte for solid state lithium battery applications based on lithium enriched poly(ethylene oxide) (PEO)/poly(vinyl pyrrolidone) (PVP) blend polymer / B. Jinisha [et al.] // *Electrochim. Acta*. – 2017. – № 235. – P. 210–222.
15. Soumen, J. Electrical conductivity enhancement of a polymer using butyl glycidyl ether (BGE)–lithium hexafluorophosphate (LiPF₆) complex / J. Soumen, Zh. Wei-Hong // *J. Mater. Sci.* – 2008. – № 43. – P. 4607–4617.
16. Polu, A. R. Ionic liquid doped PEO-based solid polymer electrolytes for lithium-ion polymer batteries / A. R. Polu, H.-W. Rhee // *Int. J. Hydrogen Energy*. – 2017. – № 42. – P. 7212–7219.
17. Study of ageing effects in polymer-in-salt electrolytes based on poly(acrylonitrile-co-butyl acrylate) and lithium salts / A. K. Łasińska [et al.] // *Electrochim. Acta*. – 2015. – № 169. – P. 61–72.
18. Штомпель, В. И. Структура линейных полиуретанов / В. И. Штомпель, Ю. Ю. Керча. – Киев: Наук. думка, 2008. – 247 с.
19. Вплив перхлорату літію на структуру епоксидних полімерних композитів / Л. Матковська [та ін.] // *Наносистеми, наноматеріали, нанотехнології*. – 2017. – Т. 15, № 1. – С. 175–184.

References

1. Guilherme L. A., Borges R. S., Mara E., Moraes S., Silva G. G., Pimentac M. A., Marletta A., Silva R. A. Ionic conductivity in polyethylene-b-poly(ethylene oxide)/lithium perchlorate solid polymer electrolytes. *Electrochimica Acta*, 2007, vol. 53, no.4, pp. 1503–1511.
2. Chai M. N., Isa M. I. N. Investigation on the conduction mechanism of carboxyl methylcellulose-oleic acid natural solid polymer electrolyte. *International Journal of Advanced Technology & Engineering Research*, 2012, vol. 2, no.6, pp. 36–39.
3. Karan N. K., Pradhan D. K., Thomas R., Natesan B., Katiyar R. S. Solid polymer electrolytes based on polyethylene oxide and lithium trifluoro-methane sulfonate (PEO–LiCF₃SO₃): Ionic conductivity and dielectric relaxation. *Solid State Ionics*, 2008, vol. 179, no.19–20, pp. 689–696.

4. Kyung Ju Lee, Yong Woo Kim, Joo Hwan Koh, Jong Hak Kim. Supramolecular polymer/metal salt complexes containing quadruple hydrogen bonding units. *Journal of Polymer Science. Part B: Polymer Physics*, 2007, vol. 45, pp. 3181–3188. Doi: 10.1002/polb.21316
5. Guhathakurta S., Min K. Lithium sulfonate promoted compatibilization in single ion conducting solid polymer electrolytes based on lithium salt of sulfonated polysulfone and polyether epoxy. *Polymer*, 2010, no. 51, pp. 211–221.
6. Tonga Yo., Chen L., He X., Chen Yi. Free mesogen assisted assembly of the star-shaped liquid-crystalline copolymer/polyethylene oxide solid electrolytes for lithium ion batteries. *Electrochimica Acta*, 2014, no. 118, pp. 33–40.
7. Klongkan S., Pumphusak J. Effects of the addition of LiCF₃SO₃ salt on the conductivity, thermal and mechanical properties of PEO-LiCF₃SO₃ solid polymer electrolyte. *International Journal of Chemical Engineering and Applications*, 2015, vol. 6, no. 3, pp. 165–168. Doi: 10.7763/IJCEA.2015.V6.474
8. Dey A., Karan S., De S. K. Effect of nanofillers on thermal and transport properties of potassium iodide–polyethylene oxide solid polymer electrolyte. *Solid State Communications*, 2009, vol. 149, no. 31–32, pp. 1282–1287.
9. Das S., Ghosh A. Ionic conductivity and dielectric permittivity of PEO-LiClO₄ solid polymer electrolyte plasticized with propylene carbonate. *AIP Advances*, 2015, vol. 5, no. 2, id. 027125. Doi: 10.1063/1.4913320
10. Karmakar A., Ghosh A. Structure and ionic conductivity of ionic liquid embedded PEO-LiCF₃SO₃ polymer electrolyte. *AIP Advances*, 2014, no. 4, id. 087112. Doi: 10.1063/1.4892855
11. Kim J. G., Son B., Mukherjee S., Schuppert N., Bates A., Kwon O., Choi M. J., Chung H. Y., Park S. A review of lithium and non-lithium based solid state batteries. *Journal of Power Sources*, 2015, no. 282, pp. 299–322.
12. Yu Ya., Zhang B., Wang Y., Qi G., Tian F., Yang J., Wang Sh. Co-continuous structural electrolytes based on ionic liquid, epoxy resin and organoclay: Effects of organoclay content. *Materials & Design*, 2016, no. 104, pp. 126–133.
13. Jilani W., Mzabi N., Fourati N., Zerrouki Ch., Gallot-Lavallee O., Zerrouki R., Guermazi H. Effects of curing agent on conductivity, structural and dielectric properties of an epoxy polymer. *Polymer*, 2015, no. 79, pp. 73–81.
14. Jinisha B., Anilkumar K. M., Manoj M., Pradeep V. S., Jayalekshmi S. Development of a novel type of solid polymer electrolyte for solid state lithium battery applications based on lithium enriched poly (ethylene oxide) (PEO)/poly (vinyl pyrrolidone) (PVP) blend polymer. *Electrochimica Acta*, 2017, no. 235, pp. 210–222.
15. Soumen J., Wei-Hong Zh. Electrical conductivity enhancement of a polymer using butyl glycidyl ether (BGE)–lithium hexafluorophosphate (LiPF₆) complex. *Journal of Materials Science*, 2008, no. 43, pp. 4607–4617. Doi: 10.1007/s10853-008-2677-z
16. Polu A. R., Rhee H.-W. Ionic liquid doped PEO-based solid polymer electrolytes for lithium-ion polymer batteries. *International Journal of Hydrogen Energy*, 2017, no. 42, pp. 7212–7219.
17. Łasińska A. K., Marzantowicz M., Dygas J. R., Krok F., Florjańczyk Z., Tomaszewska A., Zygadło-Monikowska E., Żukowska Z., Lafont U. Study of ageing effects in polymer-in-salt electrolytes based on poly(acrylonitrile-co-butyl acrylate) and lithium salts. *Electrochimica Acta*, 2015, no. 169, pp. 61–72.
18. Shtompel V. I., Kercha Yu. Yu. *Structure of linear polyurethanes*. Kiev, Naukova dumka Publ., 2008. 247 p. (in Russian).
19. Matkovska L., Tkachenko I., Demchenko V., Iurzhenko M., Mamunya Ye. The effect of lithium perchlorate on the structure of epoxy resin composites. *Nanosistemi. Nanomateriali. Nanotehnologii*, 2017, vol. 15, no. 1, pp. 175–184 (in Ukrainian).

Информация об авторах

Матковская Любовь Казимировна – аспирант, Институт химии высокомолекулярных соединений Национальной академии наук Украины (Харьковское шоссе, 48, 02160, Киев, Украина); Лаборатория инженерии полимерных материалов, Университет Лион 1 (бульвар А. Латардже, 15, 69622, Виллербан, Франция). E-mail: lovemk@ukr.net

Юрженко Максим Владимирович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт химии высокомолекулярных соединений Национальной академии наук Украины (Харьковское шоссе, 48, 02160, Киев, Украина). E-mail: 4ewip@ukr.net

Мамуня Евгений Петрович – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт химии высокомолекулярных соединений Национальной академии наук Украины (Харьковское шоссе, 48, 02160, Киев, Украина). E-mail: ymamunya@ukr.net

Буато Жизель – доктор habilitованый, руководитель исследований, Лаборатория инженерии полимерных материалов, Университет Лион 1 (бульвар А. Латардже, 15, 69622, Виллербан, Франция). E-mail: gisele.boiteux@univ-lyon1.fr

Information about the authors

Liubov K. Matkovska – Postgraduate Student, Institute of Macromolecular Chemistry of the National Academy of Sciences of Ukraine (48, Kharkivske chaussee, 02160, Kyiv, Ukraine); University of Lyon, University Lyon 1, Laboratory for Polymer Materials Engineering, UMR CNRS 5223, IMP@LYON1 (15, Boulevard A. Latarjet, 69622, Villeurbanne, France). E-mail: lovemk@ukr.net

Maksym V. Iurzhenko – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Senior Researcher, Institute of Macromolecular Chemistry of the National Academy of Sciences of Ukraine (48, Kharkivske chaussee, 02160, Kyiv, Ukraine). E-mail: 4ewip@ukr.net

Yevgen P. Mamunya – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Leading Researcher, Institute of Macromolecular Chemistry of the National Academy of Sciences of Ukraine (48, Kharkivske chaussee, 02160, Kyiv, Ukraine). E-mail: ymamunya@ukr.net

Gisele Boiteux – Dr. Hab. (Physics), Director of Research CNRS, University of Lyon, University Lyon 1, Laboratory for Polymer Materials Engineering, UMR CNRS 5223, IMP@LYON1 (15, Boulevard A. Latarjet, 69622, Villeurbanne, France). E-mail: gisele.boiteux@univ-lyon1.fr

МАШИНОСТРОЕНИЕ, МЕХАНИКА
MECHANICAL ENGINEERING AND MECHANICS

УДК 620.178

Поступила в редакцию 09.06.2017
Received 09.06.2017

А. П. Крень, В. А. Рудницкий, Н. В. Зинькевич

Институт прикладной физики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

**МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРНОГО КОНТАКТА ИНДЕНТОРА С НЕЖЕСТКИМИ
СТАЛЬНЫМИ КОНСТРУКЦИЯМИ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ТВЕРДОСТИ**

Аннотация. Рассматриваются вопросы измерения твердости конструкций недостаточной жесткости методом ударного вдавливания индентора. Описываются недостатки существующих динамических твердомеров, принцип действия которых заключается в нанесении удара по испытуемому образцу и регистрации коэффициента восстановления скорости, зависящего от твердости. Построены конечно-элементные модели ударного взаимодействия индентора с образцами труб с различной толщиной стенки и диаметром, а также консольно закрепленных пластин разной толщины. Получены диаграммы вдавливания индентора в исследуемые образцы труб и пластин в координатах контактное усилие – перемещение. Показана достаточно хорошая сходимость между результатами моделирования и экспериментальными данными, полученными на твердомере, позволяющем регистрировать кривую нагружения в процессе ударного взаимодействия. С помощью построенных конечно-элементных моделей выделен вклад локальной деформации и прогиба в общий отклик конструкции при индентировании. Установлено влияние прогиба конструкций на процесс внедрения индентора в материал, а также на такие параметры индентирования, как коэффициент восстановления скорости, контактное усилие, перемещение и время активного этапа удара. Определены границы допустимого использования твердомеров ударного действия. Показаны пути повышения точности измерения твердости на основе данных, получаемых на этапе внедрения индентора. Установлено, что использование градуировочных зависимостей между твердостью и временем активного этапа удара, а также отношением контактного усилия к глубине внедрения на этапе нагружения позволяет провести оценку твердости для труб с толщиной стенки свыше 5 мм и консольно закрепленных пластин на расстоянии от места закрепления вплоть до 100 мм.

Ключевые слова: твердость, конечно-элементное моделирование, индентирование, нежесткие конструкции

Для цитирования. Крень, А. П. Моделирование ударного контакта индентора с нежесткими стальными конструкциями при измерении твердости / А. П. Крень, В. А. Рудницкий, Н. В. Зинькевич // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. – 2017. – № 4. – С. 38–45.

A. P. Kren, V. A. Rudnitsky, N. V. Zinkevich

Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

**MODELING OF IMPACT CONTACT OF INDENTER AND NON-RIGID STEEL CONSTRUCTIONS DURING
MEASUREMENT OF HARDNESS**

Abstract. The problems of measuring hardness of constructions with insufficient rigidity by the dynamic indentation are discussed. The disadvantages of the existing dynamic hardness testers are described, the operation of which consists in impact indentation and determination of the hardness, depending on the restitution coefficient. Finite-element models of the contact of the indenter and the pipes samples with various wall thicknesses and diameters and cantilevered plates of various thicknesses are developed. Indentation diagrams for the investigated samples of pipes and plates in the coordinate plane of force-displacement are obtained. The results of the simulation have good convergence with the experimental data. With the help of the finite element models the separation of local penetration and deflection of construction is made. It is shown the influence of steel construction deflection on the process of indenter impression into the material tested and the change of indentation parameters as restitution coefficient, contact force, penetration depth and time of the active part of the impact. The limits of possible application of dynamic hardness testers have been determined. The ways of the increasing of the hardness measurement accuracy on the base of the data obtained during impact interaction are shown. It is established that the

use of dependences between hardness and the time of the active stage of impact, as well as the ratio of the contact force to the depth of penetration at the loading stage, makes it possible to evaluate the hardness for pipes with the wall thickness exceeding 5 mm and cantilevered plates at the distance from the fixed support up to 100 mm.

Keywords: hardness, finite-element modeling, indentation, non-rigid constructions

For citation. Kren A. P., Rudnitsky V. A., Zinkevich N. V. Modeling of impact contact of indenter and non-rigid steel constructions during measurement of hardness. *Vesti Natsyyanal'nai akademii nauk Belarusi. Seriya fizika-technichnykh nauk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2017, no. 4, pp. 38–45 (in Russian).

Введение. Точное измерение твердости имеет важное практическое значение при техническом диагностировании потенциально опасного промышленного оборудования (трубопроводов, сосудов высокого давления, металлоконструкций). Прежде всего это связано с тем, что данная характеристика имеет устойчивую корреляционную связь с прочностью [1] и пределом текучести [2], которые во многом определяют возможность дальнейшей эксплуатации оборудования. При этом одним из главных преимуществ измерения твердости является оперативность ее определения и неразрушающий характер контроля.

В настоящее время наиболее применяемыми на практике являются динамические твердомеры, принцип действия которых заключается в нанесении удара по испытываемой поверхности индентором с заданной кинетической энергией и регистрации коэффициента восстановления скорости K_r , равного отношению скорости отлета индентора V_0 к его предударной скорости V_n . Физически при таком методе измерения значение твердости определяется по величине энергии, затраченной на пластическую деформацию в месте контакта наконечника индентора с испытываемым материалом. Главным недостатком этих приборов является обязательное требование к достаточной массивности и жесткости контролируемого изделия. Как правило, сосредоточенная масса под индентором должна составлять не менее 2,5 кг, а изделие не должно при этом вибрировать. Если при испытательном ударе – динамическом индентировании – возникает прогиб контролируемого участка изделия (что часто происходит при контроле тонкостенных труб или консольно закрепленных элементов), то возникает значительная погрешность измерений, поскольку эта деформация принимается за локальную пластическую деформацию.

Оценить влияние прогиба конструкции при обычных измерениях довольно сложно, а учесть его эмпирическими коэффициентами для широкой номенклатуры изделий также затруднительно. В данном случае более эффективным методом, позволяющим провести анализ локальных деформаций и отделить их от прогиба, является конечно-элементное моделирование, которое дает возможность оценить напряженно-деформированное состояние в месте контакта для изделий с различными массогабаритными параметрами. При получении достаточного объема аналитических данных такое моделирование позволяет достичь цели настоящей работы – определить границы допустимого использования твердомеров ударного действия, а также обосновать меры по повышению точности измерений.

Постановка задачи и метод исследования. Основными вариантами конструкций для анализа поведения их при динамическом индентировании являлись трубы различного диаметра, а также консольно закрепленные стальные пластины разной толщины. Индентирование пластин проводилось на различном расстоянии L от места закрепления. Схема основных перемещений индентора и пластины показана на рис 1. Изучение выпускаемого в настоящее время сортамента горяче-, холоднодеформированных и электросварных труб согласно ГОСТ 10 704-91 «Трубы стальные электросварные прямошовные» позволило отобрать для моделирования наиболее характерные варианты: внешний диаметр D – 70 мм, 152 и 402 мм, толщина стенки h – от 3,0 мм до 12 мм. Геометрические параметры пластин были выбраны исходя из опыта работ на промышленных объектах: толщина h – выше 5 мм, ширина b – более 20 мм. Диапазон изменения твердости сталей, применяемых

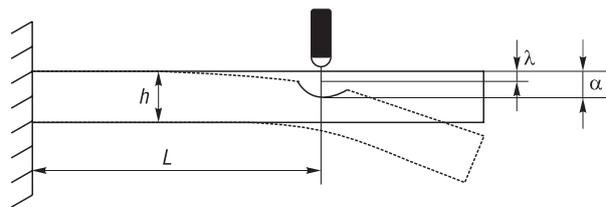


Рис. 1. Схема основных перемещений индентора и пластины

Fig. 1. Scheme of a typical displacements of the indenter and the plate

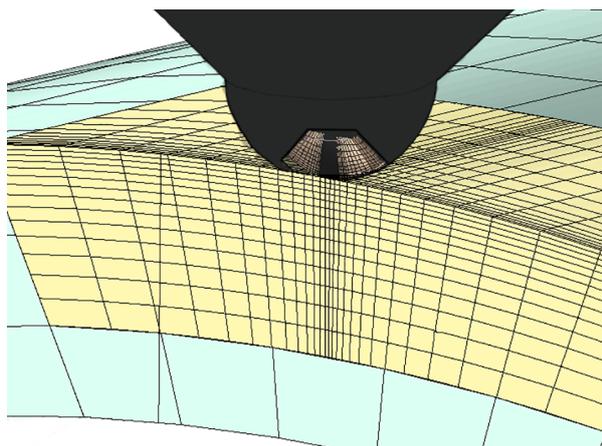


Рис. 2. Геометрическая модель контакта индентора с участком трубы

Fig. 2. Geometric model of indenter contact with the part of the pipe

Сетка конечных элементов для индентора строилась только в пределах заранее подготовленного конуса, непосредственно примыкающего к зоне контакта. При этом сетка конуса также имела сгущение к точке контакта. Остальная часть индентора моделировалась абсолютно жестким телом. Модель материала индентора (карбид вольфрама) принималась линейно-упругой. Поведение материала конструкции – стали – под действием ударной нагрузки описывалось с помощью вязкопластической модели. В качестве закона упрочнения использовалось изотропное упрочнение, основанное на мультилинейной диаграмме деформирования [4], а вязкопластические свойства материала описывались моделью Perzyna [5], которая предполагает, что скорость пластической деформации $\dot{\epsilon}_{pl}$ является функцией текущих значений напряжения в контакте σ , параметра упрочнения n , параметра вязкости материала γ и статического предела текучести σ_0 :

$$\dot{\epsilon}_{pl} = \gamma \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right)^{1/n}.$$

Контакт между индентором и поверхностью выбирался нелинейный с трением и симметричным поведением. На индентор накладывалась связь, сохраняющая только вертикальную степень свободы. Плотность материала индентора выбиралась практически равной нулю, поэтому его масса m задавалась с помощью точечной массы и являлась параметром модели. Предударная скорость индентора V_{II} и его радиус R также являлись параметрами модели. Задача решалась методами неявной динамики в нестационарной постановке. Минимальный временной шаг составил 0,1 мкс, максимальный – 2 мкс. Для динамических твердомеров различных производителей радиус индентора может изменяться от 0,5 до 2,5 мм, масса – от 2,5 до 6,0 г, предударная скорость – от 0,5 до 2,5 м/с. Поэтому при моделировании данные параметры принимались следующими: $R = 1,15$ мм, $m = 4,23$ г, $V_{II} = 0,87$ м/с.

Результаты исследований и их анализ. Оценка адекватности результатов конечно-элементного моделирования проводилась путем сравнения с экспериментальными данными, полученными на более совершенном, чем обычный динамический твердомер, приборе ИПМ-1К [6]. Прибор позволяет регистрировать кривую нагружения в процессе ударного взаимодействия в координатах «контактное усилие P – перемещение индентора α », а также определять коэффициент восстановления скорости K_v . Благодаря микроэлектронике прибор может быть реализован в портативном варианте. На рис. 3 показаны результаты эксперимента по индентированию жестко закрепленной меры твердости 105 НВ и моделированию данного процесса при следующих параметрах: $\sigma_0 = 200$ МПа, $\gamma = 70$, $n = 0,45$.

Как видно из рис. 3, результаты моделирования ударного контакта достаточно приближены к экспериментальным данным. Это наблюдается как для диаграммы нагружения, так и кривой

для изготовления указанных нежестких конструкций, согласно ГОСТ 8733-74 «Трубы стальные бесшовные холоднодеформированные и теплодеформированные» и опыту работ составляет 110–270 НВ, предел текучести σ_0 – 170–600 МПа.

Моделирование ударного контакта проводилось с помощью программного пакета ANSYS Student [3]. Для оценки деформаций на микроскопическом уровне сетка конечных элементов создавалась достаточно подробной и постепенно сгущалась к точке контакта. При этом размерность сетки позволяла производить расчеты с рациональными затратами вычислительных ресурсов и машинного времени. Модель строилась на гексагональных элементах первого порядка (рис. 2). Минимальный размер конечного элемента составлял 0,2 мкм.

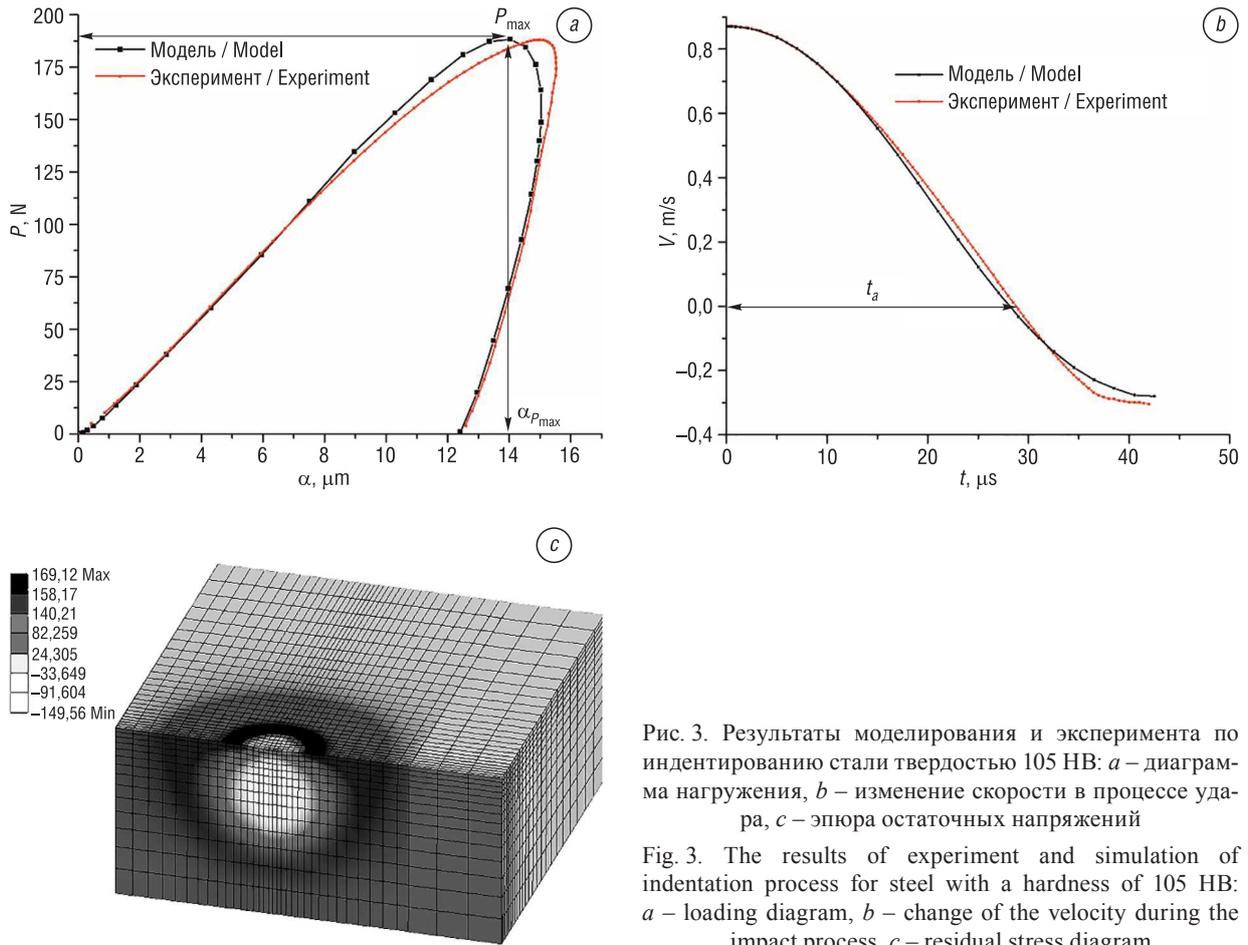


Рис. 3. Результаты моделирования и эксперимента по индентированию стали твердостью 105 HB: *a* – диаграмма нагружения, *b* – изменение скорости в процессе удара, *c* – эпюра остаточных напряжений

Fig. 3. The results of experiment and simulation of indentation process for steel with a hardness of 105 HB: *a* – loading diagram, *b* – change of the velocity during the impact process, *c* – residual stress diagram

изменения скорости в процессе удара. Величина остаточных напряжений в центре отпечатка составляет примерно 0,4 от предела прочности, что также соответствует известным литературным данным [7].

Адекватность получаемых результатов позволяет перейти к моделированию ударного контакта индентора с нежесткими конструкциями в виде труб и консольно закрепленных пластин, целью которого является оценка значимости изменения основных параметров кривой нагружения, используемых при расчете твердости по различным алгоритмам. Такими параметрами, кроме K_r , могут являться: отношение максимальных значений силы и перемещения $P_{\text{max}}/\alpha_{P_{\text{max}}}$ и время активного этапа удара t_a – этапа, на котором индентор внедряется в материал и внедрение достигает максимума [8].

На рис. 4 показано изменение K_r для моделируемых случаев взаимодействия индентора с пластиной и цилиндрической оболочкой (трубой). Коэффициент восстановления скорости не является характеристикой материала и зависит от многих параметров индентирования. В то же время, если воспользоваться известной работой [9], в которой осуществлен переход от твердости в единицах Leeb (а фактически от K_r) к твердости HRC, то можно примерно оценить погрешность измерения твердости по известным шкалам. При таком резком снижении значения K_r , как показывают результаты моделирования (рис. 4), разбежка в показаниях твердости может составить до 50–100 % (40–100 единиц HB). И только при толщине стенки или пластины свыше 12–14 мм погрешностью измерений можно пренебречь, что подтверждает отсутствие необходимости рассматривать при моделировании сортамент труб большого диаметра, которые имеют толщину стенки свыше 12 мм.

В то же время твердость, как уже указывалось, может определяться исходя из значений $P_{\text{max}}/\alpha_{P_{\text{max}}}$ и t_a , которые могут быть прямо использованы для ее расчета [10]. На рис. 5, 6 показаны характерные диаграммы, полученные при индентировании пластин и труб с различными

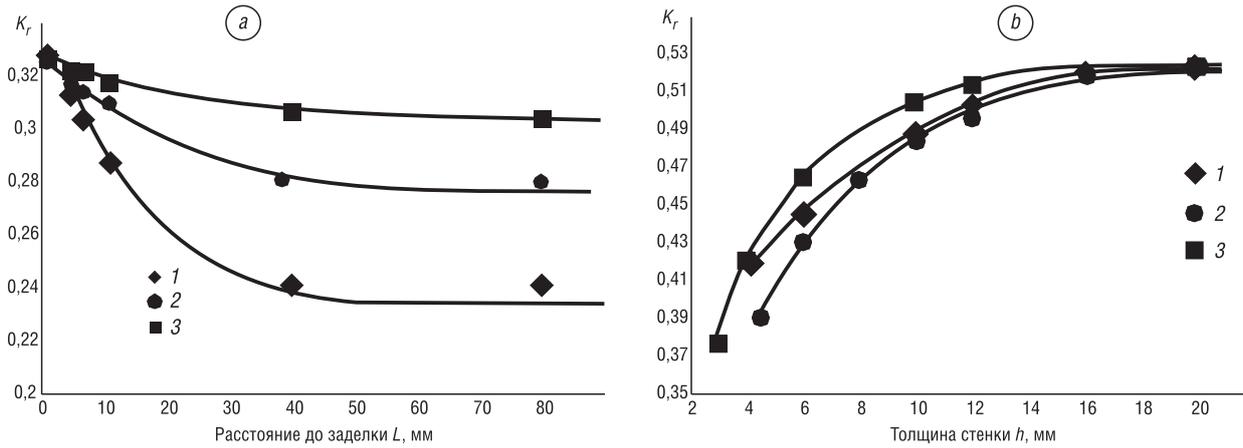


Рис. 4. Изменение коэффициента восстановления скорости в зависимости от: расстояния до места закрепления пластины (твердость 105 НВ) – *a* (толщина пластины: 1 – 5 мм, 2 – 7 мм, 3 – 12 мм); толщины стенки трубы (твердость 210 НВ) – *b* (диаметр трубы: 1 – 105 мм, 2 – 405 мм, 3 – 70 мм)

Fig. 4. Change of the restitution coefficient depending on: the distance to the place of the plate fixing (hardness is equal to 105 НВ) – *a* (the plate thickness is equal to: 1 – 5 mm, 2 – 7 mm, 3 – 12 mm); the thickness of the pipe wall (hardness is equal to 210 НВ) – *b* (the pipe diameter is equal to: 1 – 105 mm, 2 – 405 mm, 3 – 70 mm)

геометрическими параметрами. Следует отметить, что наименее подвержен влиянию прогибов конструкций λ при ударном взаимодействии активный этап нагружения. На пассивном этапе – этапе разгрузки – расхождение кривых нагружения более выражено, что особенно хорошо заметно на примере индентирования труб (рис. 6). При этом, чем выше твердость, тем большую часть в общей деформации занимает прогиб конструкции, что и приводит к увеличению погрешности (рис. 7).

Для проведения комплексного анализа было выполнено 36 вариантов расчетов консольно закрепленных пластин и 18 вариантов расчетов цилиндрических оболочек, имитирующих трубы. Часть этих результатов представлена в таблице.

Как видно из таблицы, отклонение величин $P_{\max}/\alpha_{P_{\max}}$ и t_a не превышает 3–12 % и 2–3 % соответственно от значений этих же величин для случая массивной, жестко закрепленной пластины. Если принимать во внимание результаты, полученные в [8, 10, 11], то можно утверждать, что такое отклонение приведет к погрешности в измерении твердости до 10–20 единиц НВ при использовании градуировки прибора по параметру $P_{\max}/\alpha_{P_{\max}}$ и до 15 единиц – при градуировке

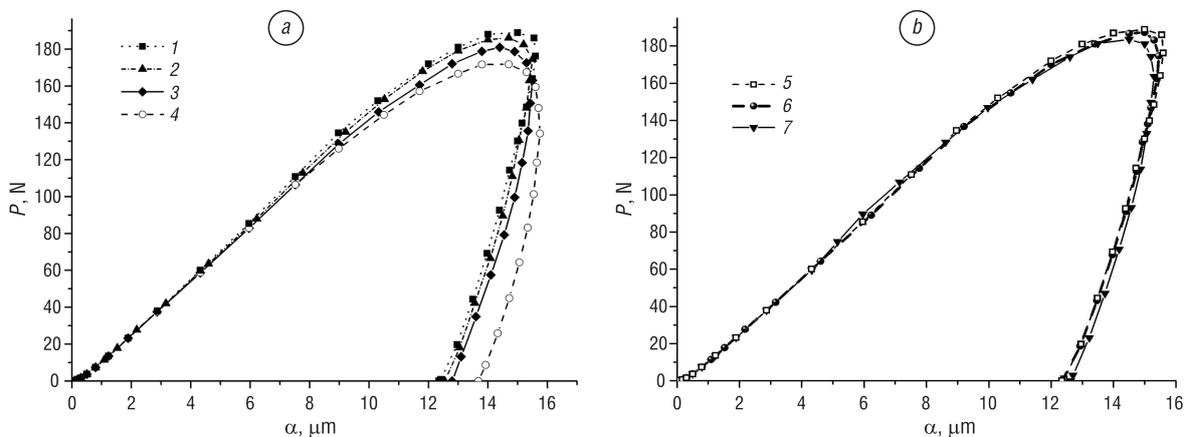


Рис. 5. Типичные диаграммы контактное усилие – перемещение при индентировании пластины твердостью 105 НВ ($\sigma_0 = 200$ МПа), толщиной 5 мм (*a*) и 12 мм (*b*): 1, 5 – внедрение в полупространство материала (жесткая пластина); расстояние от места заделки: 2, 6 – 5 мм, 3 – 10 мм, 4, 7 – 80 мм

Fig. 5. Typical contact force-displacement diagrams during the indentation of the plate with hardness 105 НВ ($\sigma_0 = 200$ МПа), the plate thickness is equal to 5 mm (*a*), 12 mm (*b*): 1, 5 – penetration into the half-space of the material (rigid plate), 2, 6 – distance to the place of fixing is equal to 5 mm, 3 – 10 mm, 4, 7 – 80 mm

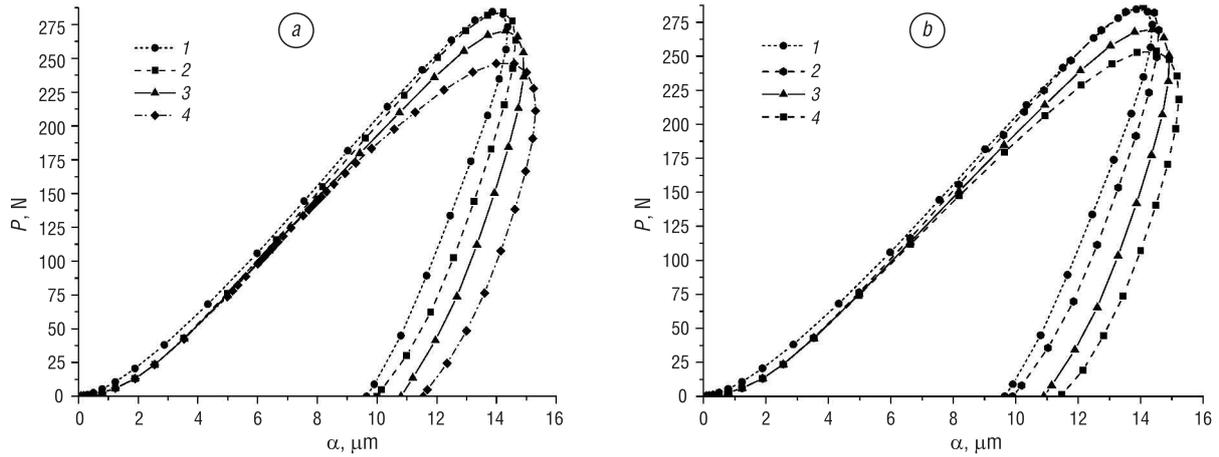


Рис. 6. Типичные диаграммы контактное усилие – перемещение при индентировании трубы твердостью 210 HB ($\sigma_0 = 565$ МПа), диаметром 150 мм (а) и 405 мм (б): 1 – внедрение в полупространство материала (жесткая пластина); толщина стенки трубы: 2 – 10 (12) мм, 3 – 6 мм, 4 – 4 мм

Fig. 6. Typical contact force-displacement curves during the indentation of the pipe with hardness 210 HB ($\sigma_0 = 565$ MPa), pipe diameter is equal to 150 mm (a), 405 mm (b): 1 – impression into the half-space of material (rigid plate); pipe wall thickness is equal to: 2 – 10 (12) mm, 3 – 6 mm, 4 – 4 mm

Изменение параметров ударного контакта для различных конструкций
Variation of the impact contact parameters for different constructions

Пластина		HB 105			HB 210		
L, мм	h, мм	$P_{max}/\alpha_{P_{max}}$, Н/мкм	t_a , мкс	K_r	$P_{max}/\alpha_{P_{max}}$, Н/мкм	t_a , мкс	K_r
0	5	12,5	28	0,32	19,91	23,5	0,52
5		12,2	28,3	0,315	19,49	24,4	0,517
10		11,95	28,9	0,30	19,23	24,5	0,510
80		11,73	29,4	0,241	18,91	24,7	0,397
0	12	12,55	27,9	0,322	19,83	23,4	0,523
5		12,42	28,2	0,32	19,56	23,7	0,520
10		12,37	28,5	0,31	19,36	24,2	0,519
80		11,95	29,3	0,304	18,95	24,5	0,499
Труба		HB 105			HB 210		
D, мм	h, мм	$P_{max}/\alpha_{P_{max}}$, Н/мкм	t_a , мкс	K_r	$P_{max}/\alpha_{P_{max}}$, Н/мкм	t_a , мкс	K_r
70	6	11,95	28,7	0,258	18,83	24,2	0,464
	4	11,46	30,1	0,231	18,43	25,3	0,42
	3	11,3	30,42	0,205	17,87	25,7	0,376
150	10	12,18	28,3	0,267	19,52	24	0,485
	6	12	29,1	0,239	18,85	24,4	0,445
	4	11,49	29,5	0,212	18,57	25,5	0,42
405	12	12,46	28	0,270	19,72	23,5	0,491
	8	12,05	28,4	0,248	19,06	24,2	0,463
	6	11,97	28,6	0,230	18,86	24,3	0,43
	4,5	11,84	29,3	0,210	18,73	24,6	0,39

по параметру t_a при снижении толщины стенки до 5 мм. В то же время, для конструкций с твердостью более 300 HB ее измерение, исходя из величины активного времени удара, становится проблематичным вследствие низкой чувствительности t_a к изменению твердости. Поэтому, при измерении твердости нежестких конструкций можно предложить алгоритм ее определения с разбивкой по диапазонам: до 250 HB применять градуировку прибора, используя значения t_a , свыше этого значения – параметр $P_{max}/\alpha_{P_{max}}$.

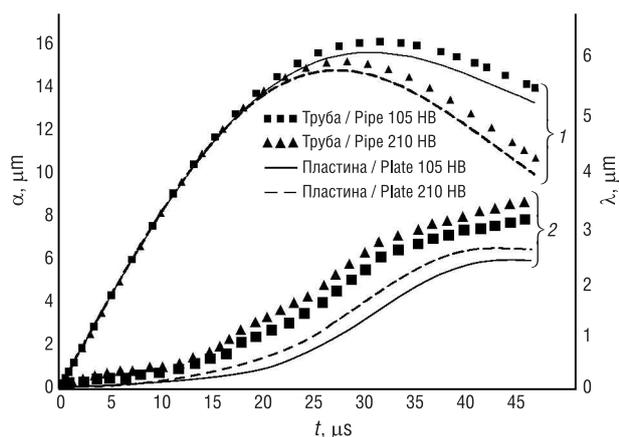


Рис. 7. Перемещение индентора и прогиб конструкции в зависимости от твердости и вида контролируемого изделия: 1 – изменение локального внедрения индентора, 2 – прогиб конструкции в процессе ударного взаимодействия

Fig. 7. Displacement of the indenter and the deflection of the construction, depending on the hardness and the type of the sample tested: 1 – change of the local penetration of the indenter, 2 – deflection of the construction during the impact interaction process

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований. Грант T16-013 «Разработка физических основ контроля твердости материалов конструкций, имеющих ограниченную жесткость, методом динамического локального деформирования».

Acknowledgments

This paper was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research. Grant T16-013 “Development of the physical basis of the control of the hardness of materials of constructions with the limited stiffness by the dynamic local straining”.

Список использованных источников

1. Львовский, П.Г. Справочное руководство механика металлургического завода / П.Г. Львовский. – 4-е изд., испр. и доп. – Свердловск: Metallurgizdat, 1962. – 980 с.
2. Марковец, М.П. Определение механических свойств металла по твердости / М.П. Марковец. – М.: Машиностроение, 1979. – 191 с.
3. Free Simulation Software Ansys [Electronic resource] // ANSYS.COM. – Mode of access: <http://www.ansys.com/Products/Academic/ANSYS-Student>. – Date of access: 01.02.2017.
4. Ивашкин, А.Г. Анализ деформационного поведения моделей материалов в ANSYS / А.Г. Ивашкин // Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании: Междунар. науч.-техн. конф. (г. Ульяновск, 28–30 апр. 2014 г.): сб. науч. тр. – Ульяновск, 2014. – С.79–92.
5. Heeres, O.M. A comparison between the Perzyna viscoplastic model and the Consistency viscoplastic model / O.M. Heeres, A.S. Suiker, R. Borst // European Journal of Mechanics – A/Solids. – 2002. – Vol. 21, iss. 1. – P. 1–12.
6. Kren, A.P. Determination of the critical stress intensity factor of glass under conditions of elastic contact by the dynamic indentation method / A.P. Kren // Strength of Materials. – 2009. – Vol. 41, № 6. – P. 628–636.
7. Джонсон, К.Л. Механика контактного взаимодействия / К.Л. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
8. Рудницкий, В.А. Контроль физико-механических характеристик материалов и изделий по параметрам динамического деформирования: дис. ... д-ра техн. наук : 05.11.13 / В.А. Рудницкий. – Минск, 1992. – 355 с.
9. Leeb, D. Definition of the hardness value L in the EQUOTIP dynamic measuring method / D. Leeb // VDI Berichte. – 1986. – No. 583. – P. 109–133.
10. Рудницкий, В.А. Соотношение динамической и статической твердости металлов / В.А. Рудницкий, А.П. Крень, Г.А. Ланцман // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2016. – № 4. – С. 16–22.
11. Инженерные методы исследования ударных процессов / Г.С. Батуев [и др.]. – М.: Машиностроение, 1977. – 240 с.

Заключение. Использование обычных динамических твердомеров, регистрирующих коэффициент восстановления скорости, возможно при толщине стенки трубы свыше 10–12 мм для обеспечения достаточной точности измерения. Измерение твердости консольных конструкций с их помощью возможно только в местах, к которым может быть приведена сосредоточенная масса или рядом с заделкой. В противном случае необходимо применять более совершенные приборы, например, ИПМ-1К, позволяющие регистрировать весь процесс удара и измерять такие параметры, как контактное усилие, глубина внедрения, время активного этапа удара. Это позволяет, используя градуировочные зависимости данных параметров и твердости, проводить ее измерение для нежестких конструкций в виде труб с толщиной стенки до 5 мм и на достаточно большом расстоянии (до 100 мм) от места жесткого закрепления – в случае проведения диагностики состояния консольных конструкций.

References

1. Lvovskij P. G. *Reference manual mechanic metallurgical plant*. Sverdlovsk, Metallurgizdat Publ., 1962. 980 p. (in Russian).
2. Markovec M. P. *Determination of mechanical properties of metal by hardness*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1979. 191 p. (in Russian).
3. Free Simulation Software Ansys. *ANSYS.COM*. Available at: <http://www.ansys.com/Products/Academic/ANSYS-Student> (Accessed 1 February 2017).
4. Ivashkin A. G. Analysis of deformation behavior of material models in ANSYS. *Matematicheskie metody i modeli: teoriya, prilozheniya i rol' v obrazovanii: Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf. (g. Ulyanovsk, 28–30 apr. 2014 g.): sb. nauch. tr.* [Mathematical methods and models: theory, application and role in education: International Scientific-Technical Conference (Ulyanovsk, 28–30 April 2014): collection of scientific papers]. Ulyanovsk, 2014, pp. 79–92 (in Russian).
5. Heeres O. M., Suiker A. S., Borst R. A comparison between the Perzyna viscoplastic model and the Consistency viscoplastic model. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2002, vol. 21, iss. 1, pp. 1–12. Doi: 10.1016/s0997-7538(01)01188-3
6. Kren A. P. Determination of the critical stress intensity factor of glass under conditions of elastic contact by the dynamic indentation method. *Strength of Materials*, 2009, vol. 41, no. 6, pp. 628–636. Doi: 10.1007/s11223-009-9172-x
7. Johnson K. L. *Contact Mechanics*. Moscow, Mir Publ., 1989. 510 p. (in Russian).
8. Rudnitsky V. A. *Control of physical and mechanical characteristics of materials and products according to the parameters of dynamic deformation*. Minsk, 1992. 355 p. (in Russian).
9. Leeb D. Definition of the hardness value L in the EQUOTIP dynamic measuring method. *VDI Berichte*, 1986, no. 583, pp. 109–133.
10. Rudnitsky V. A., Kren A. P., Lantsman G. A. Investigation of the ratio between the dynamic and static hardness of metals *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2016, no. 4, pp. 19–22 (in Russian).
11. Batuev G. S., Golubkov Y. V., Efremov A. K., Fedosov A. A. *Engineering methods for studying impact processes*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1977. 240 p. (in Russian).

Информация об авторах

Крень Александр Петрович – доктор технических наук, заведующий лабораторией контактно-динамических методов контроля, Институт прикладной физики Национальной академии наук Беларуси (ул. Академическая, 16, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: alekspk@mail.ru

Рудницкий Валерий Аркадьевич – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт прикладной физики Национальной академии наук Беларуси (ул. Академическая, 16, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: rudnitsky@iaph.bas-net.by

Зинкевич Николай Васильевич – аспирант, Институт прикладной физики Национальной академии наук Беларуси (ул. Академическая, 16, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: nickola.anelka@gmail.com

Information about the authors

Alexander P. Kren – D. Sc. (Engineering), Head of the Mechanical Testing Laboratory, Institute of Applied Physics of the National Academy of Science of Belarus (16, Akademicheskaya Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: alekspk@mail.ru

Valery A. Rudnitsky – D. Sc. (Engineering), Professor, Institute of Applied Physics of the National Academy of Science of Belarus (16, Akademicheskaya Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: rudnitsky@iaph.bas-net.by

Nikolay V. Zinkevich – Postgraduate Student, Institute of Applied Physics of the National Academy of Science of Belarus (16, Akademicheskaya Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: nickola.anelka@gmail.com

ЭНЕРГЕТИКА, ТЕПЛО- И МАССООБМЕН
POWER ENGINEERING, HEAT AND MASS TRANSFER

УДК 66.047.37

Поступила в редакцию 24.02.2017
Received 24.02.2017

А. И. Ольшанский, С. В. Жерносек, В. И. Ольшанский

Витебский государственный технологический университет, Витебск, Республика Беларусь

**КИНЕТИКА ТЕПЛООБМЕНА ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ
ВЛАГООБМЕНА В ПРОЦЕССЕ КОНВЕКТИВНОЙ СУШКИ ТОНКИХ ПЛОСКИХ
МАТЕРИАЛОВ**

Аннотация. Приведены результаты исследования сушки тонких плоских материалов методом регулярного теплового режима. Дана обработка экспериментальных данных обобщенными комплексными переменными. На основании обработки и анализа эксперимента получены приближенные эмпирические уравнения для расчета плотности тепловых потоков, длительности процесса сушки и температуры материала в периоде убывающей скорости сушки. Приведен расчет кинетики сушки без использования критериальных уравнений теплообмена по данным влагообмена. Для группы тонких плоских материалов получены уравнения для определения темпа нагревания влажного материала и темпа убыли влагосодержания. Показано, что регуляризация в процессе сушки происходит не только по температурам и влагосодержаниям, но и по тепловым потокам. Дан анализ сушки тонких плоских материалов по величине теплообменного критерия Био в периоде убывающей скорости сушки. Показано, что во втором периоде сушки критерий Био меньше 1 и принимает значения 0,2–0,5. Установлено, что темп нагрева влажного тела не зависит от режима сушки и толщины материала. Анализ кривых сушки показал, что темп убыли влагосодержания является сложной функцией режима сушки, начального влагосодержания, скорости сушки в первом периоде и ряда факторов, влияющих на процесс. Обработка опытных данных на основе обобщенных устойчивых комплексных переменных, представляющих собой наиболее общие закономерности кинетики сушки, позволяет получить достаточно простые и надежные приближенные уравнения для расчета теплообмена в процессе сушки. Погрешность при таком методе обработки эксперимента находится в пределах 3–5 %. Проведена проверка достоверности расчетных уравнений и сопоставление численных значений тепловых потоков, температур и длительности процесса с экспериментом.

Ключевые слова: среднинегральная температура, обобщенное время сушки, скорость сушки, влагосодержание, темп нагрева тела, темп убыли влаги, критерии Био, Фурье, число Ребиндера

Для цитирования. Ольшанский, А. И. Кинетика теплообмена по экспериментальным данным влагообмена в процессе конвективной сушки тонких плоских материалов / А. И. Ольшанский, С. В. Жерносек, В. И. Ольшанский // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2017. – №4. – С. 46–54.

A. I. Ol'shanskii, S. V. Zhernosek, V. I. Ol'shanskii

Vitebsk State Technological University, Vitebsk, Belarus

**THE KINETICS OF HEAT TRANSFER USING EXPERIMENTAL DATA OF MOISTURE EXCHANGE
IN THE PROCESS OF CONVECTIVE DRYING OF THIN FLAT MATERIALS**

Abstract. The results of studies of drying of thin flat materials by method regular thermal regime are presented. The results of experimental data processing using generalized complex variables are shown. The approximate empirical equation for calculating the heat flow density, the duration of the drying process and the temperature of material at the period of decreasing rate were obtained by processing and analysis of experimental data. The article also indicated kinetics drying calculation with the experimental data of moisture exchange and without the use of criteria heat exchange equations. The equations for determining the rate of heating of the wet material and the rate of decrease in moisture content were obtained by the authors for a group of thin flat materials. The paper demonstrates that the regularization in the drying process takes place not only for temperature and moisture content, but also for thermal flow. An analysis of drying of thin flat materials by the magnitude

of the Biot heat exchange criterion in the period of the decreasing drying rate was performed. It was found that in the second drying period, the Biot number is less than 1 and takes the values 0.2–0.5. It is established that the rate of heating of wet material does not depend on the drying regime and the thickness of the material. Analysis of drying curves showed that the rate of moisture content loss is a complex function of the drying regime, initial moisture content, drying speed in the first period, and a number of factors affecting the process. The processing of experimental data on the basis of generalized stable complex variables, which represent the most general regularities of the kinetics of drying, makes it possible to obtain fairly simple and reliable approximate equations for the calculation of heat and moisture exchange in the drying process. The inaccuracy with this method of processing the experiment is within 3–5 %. Validation of the estimated equations and comparison of the numerical values of the heat flows the temperature and duration of the drying process with the experiment were implemented.

Keywords: average integral temperature, generalized drying time, drying rate, moisture content, rate of heating of the material, rate of moisture decrease, criteria Bio and Fourier, the number Rebinder

For citation. Ol'shanskii A. I., Zhernosek S. V., Ol'shanskii V. I. The kinetics of heat transfer using experimental data of moisture exchange in the process of convective drying of thin flat materials. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2017, no. 4, pp. 46–54 (in Russian).

Введение. Сушка влажных материалов не только теплотехнический, но и технологический процесс, в котором изменяются технологические и механические свойства высушиваемого материала. Длительность сушки является важным фактором при выборе метода и режима сушки. Правильно организованный режим сушки должен обеспечивать высокие технологические свойства материала, и в этой организации главным фактором является длительность сушки.

Постановка задачи. Процесс сушки представляет собой сложный комплекс тесно связанных явлений, протекающих как в материале, так и на его поверхности. Многообразие факторов и их сложная взаимосвязь затрудняет получение аналитических зависимостей для расчета кинетики сушки конкретного материала.

Поэтому при описании кинетики сушки на основе обработки экспериментальных данных используются эмпирические зависимости с минимальным количеством постоянных, определяемых опытным путем.

Из решения системы уравнений влагопереноса при постоянных коэффициентах переноса Льюисом, а затем А. В. Лыковым [1, 2] для пластины получено уравнение кривой скорости сушки

$$-\frac{d\bar{u}}{d\tau} \approx \frac{a_m}{R_V^2} \frac{1}{\left(\frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{Bi_m}\right)} (\bar{u} - u_p), \quad (1)$$

где a_m – коэффициент диффузии влаги, $m^2/ч$; R_V – характерный размер тела, м; \bar{u} , u_p – текущее и равновесное влагосодержание материала; Bi_m – массообменный критерий Био. Если обозначить $a_m/R_V(4/\pi^2 + 1/Bi_m) = K$, то получим уравнение кривой скорости сушки

$$-\frac{du}{d\tau} = K(\bar{u} - u_p). \quad (2)$$

При расчете длительности сушки во втором периоде в простейшем случае при выборе линейной аппроксимации кривой скорости коэффициент сушки K определяется уравнением [2–5]

$$K = \frac{N}{\bar{u}_{кр} - u_p}, \quad (3)$$

где N – скорость сушки в первом периоде, $мин^{-1}$; $\bar{u}_{кр}$ – критическое влагосодержание материала.

Коэффициент сушки K определяется экспериментально, построением зависимости $\lg(\bar{u} - u_p) = f(\tau)$ [2, 4].

Кинетика тепловлагообмена. Все известные способы представления кривой скорости сушки обусловлены ее графическим дифференцированием, что связано с погрешностями эксперимента. Методы, основанные на обработке кривой скорости сушки, не могут быть универсальными, и следует использовать другие методы обработки опытных данных, не связанные с графическим дифференцированием кривой сушки. Погрешность при обработке экспериментальных данных методом обобщенных переменных находится в пределах точности проведения эксперимента и составляет 3–5 %.

Уравнение теплового баланса для периода убывающей скорости сушки [2, 4, 5] можно записать в виде

$$Q_{II} = \bar{\alpha}(t_c - t_{II})F = rm_0 \frac{d\bar{u}}{d\tau} + (c_0 m_0 + c_{ж} m_{ж}) \frac{d\bar{t}}{d\tau}, \quad (4)$$

где Q_{II} – мощность теплового потока, Вт; $\bar{\alpha}$ – коэффициент теплообмена, Вт/(м²·°C); t_c, t_{II} – соответственно температура среды и поверхности материала, °C; F – поверхность влажного тела, м²; r – теплота парообразования, Дж/кг; $m_0, m_{ж}$ – соответственно масса сухого тела и жидкости, кг; $c_0, c_{ж}$ – удельные теплоемкости сухого тела и жидкости, Дж/(кг·°C); $d\bar{t}/d\tau$ – скорость нагрева влажного тела, °C/с.

Поскольку влагосодержание тела $\bar{u} = m_{ж}/m_0$, то $c_W m_0 = m_0(c_0 + c_{ж}\bar{u})$, где $c_W = c_0 + c_{ж}\bar{u}$ – теплоемкость влажного тела.

Основное уравнение кинетики сушки [2, 4, 5]

$$q_{II} = q_I N^* (1 + Rb), \quad (5)$$

где $Rb = c_W b/r$ – критерий Ребиндера; $b = |d\bar{t}/d\bar{u}|$ – температурный коэффициент сушки, °C; N^* – относительная скорость сушки.

Плотность теплового потока в первом периоде сушки равна [2]

$$q_I = r\rho_0 R_V N, \quad (6)$$

где ρ_0 – плотность сухого тела, кг/м³; N – скорость сушки в первом периоде, с⁻¹.

На основании уравнений (5) и (6) запишем уравнение (4) в виде

$$Fr\rho_0 R_V N (1 + Rb) N^* = rm_0 \frac{d\bar{u}}{d\tau} + c_W m_0 \frac{d\bar{t}}{d\tau}. \quad (7)$$

С учетом $R_V = V_0/F$; $\rho_0 = m_0/V_0$; $d\bar{t}/d\bar{u} = Rbr/c_W$; соотношения $\rho_0 R_V/F = m_0/F$ и определения числа Rb запишем $d\bar{t}/d\tau = r/c_W Rb d\bar{u}/d\tau$, и, переходя к удельным тепловым потокам на единицу поверхности испарения тела F , после простых преобразований уравнение (7) примет вид [5]

$$\left| \frac{d\bar{u}}{d\tau} \right| = NN^*. \quad (8)$$

Из уравнения (8) определяется скорость сушки в любой момент второго периода по величине N в первом периоде для любого режима и величине N^* для заданного влагосодержания [5].

Обработкой многих экспериментальных данных по сушке различных материалов при различных методах энергоподвода получена общая зависимость для относительной скорости сушки [6, 7]

$$N^* = \exp(-a_0 N \tau_{II}), \quad (9)$$

где $N\tau_{II}$ – обобщенное время сушки во втором периоде.

Постоянная a_0 для всей группы исследуемых материалов определяется по зависимости $a_0 = 0,8/\bar{u}_{кр}$ [6, 7]. Скорость сушки во втором периоде из уравнения (9)

$$\left| \frac{d\bar{u}}{d\tau} \right| = N \exp(-a_0 N \tau_{II}). \quad (10)$$

Интегрируя уравнение (10) с учетом времени сушки в первом периоде, получим

$$\tau = \frac{1}{N} \left[(\bar{u}_0 - \bar{u}_{кр}) - \frac{1}{a_0} \ln(1 - a_0(\bar{u}_{кр} - \bar{u})) \right], \quad (11)$$

где \bar{u}_0, \bar{u} – соответственно начальное и текущее влагосодержание материала. Использование метода обобщения эксперимента на основе $N\tau$ и N^* дает хорошие результаты, если критическое влагосодержание $\bar{u}_{кр}$ не зависит от режима сушки. Данные различных исследований показывают, что величина $\bar{u}_{кр}$ для многих материалов незначительно изменяется при варьировании режима

сушки и этим изменением можно пренебречь [1, 2, 5]. Следовательно, для расчета длительности сушки по формуле (11) необходимо знать величины N и $\bar{u}_{кр}$.

При выбранном способе линейной аппроксимации кривой скорости $d\bar{u}/d\tau = f(\tau)$ и при известном коэффициенте сушки K длительность сушки во втором периоде определяется интегрированием уравнения (2) при $K = \text{const}$ в пределах от $\tau_I = 0$ до τ_{II} (второй период сушки и от $\bar{u}_{кр}$ до \bar{u}).

$$\int_0^{\tau_{II}} d\tau = -\frac{1}{K} \int_{\bar{u}_{кр}}^{\bar{u}} \frac{d\bar{u}}{\bar{u} - \bar{u}_{кр}}, \bar{u} < \bar{u}_{кр}; \tau_{II} = -\frac{1}{K} \ln \frac{\bar{u} - u_p}{\bar{u}_{кр} - u_p}, \bar{u} < \bar{u}_{кр}. \quad (12)$$

Подставляя в (12) значение коэффициента сушки K из (3) с учетом времени сушки в первом периоде, получим длительность до любого заданного текущего влагосодержания

$$\tau = \frac{1}{N} \left[(\bar{u}_0 - \bar{u}_{кр}) - (\bar{u}_{кр} - u_p) \ln \left(\frac{\bar{u} - u_p}{\bar{u}_{кр} - u_p} \right) \right]. \quad (13)$$

При температурах теплоносителя $\bar{t}_c > 90^\circ\text{C}$ равновесное влагосодержание материала $u_p \approx 0$ [5]. На рис. 1, а представлены результаты обработки эксперимента для зависимости $z = a_0 N \tau_{II} = f(\bar{u}/\bar{u}_{кр})$ для процессов сушки пористой керамики, листового асбеста, шерстяного войлока и технического картона. Видно, что с допустимым разбросом все опытные точки ложатся на одну кривую. Обработкой опытных данных получено приближенное уравнение

$$z = a_0 N \tau_{II} \approx 0,24 \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_{кр}} \right)^{-1,25}. \quad (14)$$

Подставляя (14) в (9), получим выражение для относительной скорости сушки

$$N^* \approx \exp \left[-0,24 \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_{кр}} \right)^{-1,25} \right]. \quad (15)$$

Плотность тепловых потоков для периода падающей скорости сушки определяется из основного уравнения кинетики сушки (5), не прибегая к расчетам коэффициента теплообмена $\bar{\alpha}$ по критериальным выражениям. Уравнение кинетики сушки (5) с учетом уравнений (2), (3) и (6) запишется в виде

$$q_{II} = r \rho_0 R_V N \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_{кр}} \right) (1 + \text{Rb}); \quad u_p < \bar{u} < \bar{u}_{кр}. \quad (16)$$

На рис. 1, б представлены зависимости $q_{II} = f(\bar{u}/\bar{u}_{кр})$, вычисленные по формулам (5) и (16). Критерий Ребиндера Rb в периоде постоянной скорости сушки равен 0. Во втором периоде с уменьшением влагосодержания материала Rb возрастает до значений $\approx 0,20-0,25$ при влагосодержаниях, близких к равновесным, $\bar{u} \approx 0,01-0,03$. Увеличение Rb в конце сушки указывает на необходимость прекращения процесса для избежания пересушивания материала и перерасхода энергии на сушку.

Зависимость числа $\text{Rb} = f(\bar{u})$ для многих материалов описывается эмпирической формулой [1, 2, 4–7]

$$\text{Rb} = A \exp(-n(\bar{u} - u_p)). \quad (17)$$

Значения постоянных A и n для некоторых влажных материалов даны в [8].

Регулярный режим. Для случая нагревания тонких плоских влажных тел в среде $\bar{t}_c = \text{const}$ при равномерном распределении температуры по объему тела и отсутствии термического переноса вещества в материале, когда теплообмен между поверхностями влажной пластины происходит по закону Ньютона, можно записать [9–11]

$$c_0 \rho_0 R_V \frac{d\bar{t}}{d\tau} = \bar{\alpha} (t_c - \bar{t}). \quad (18)$$

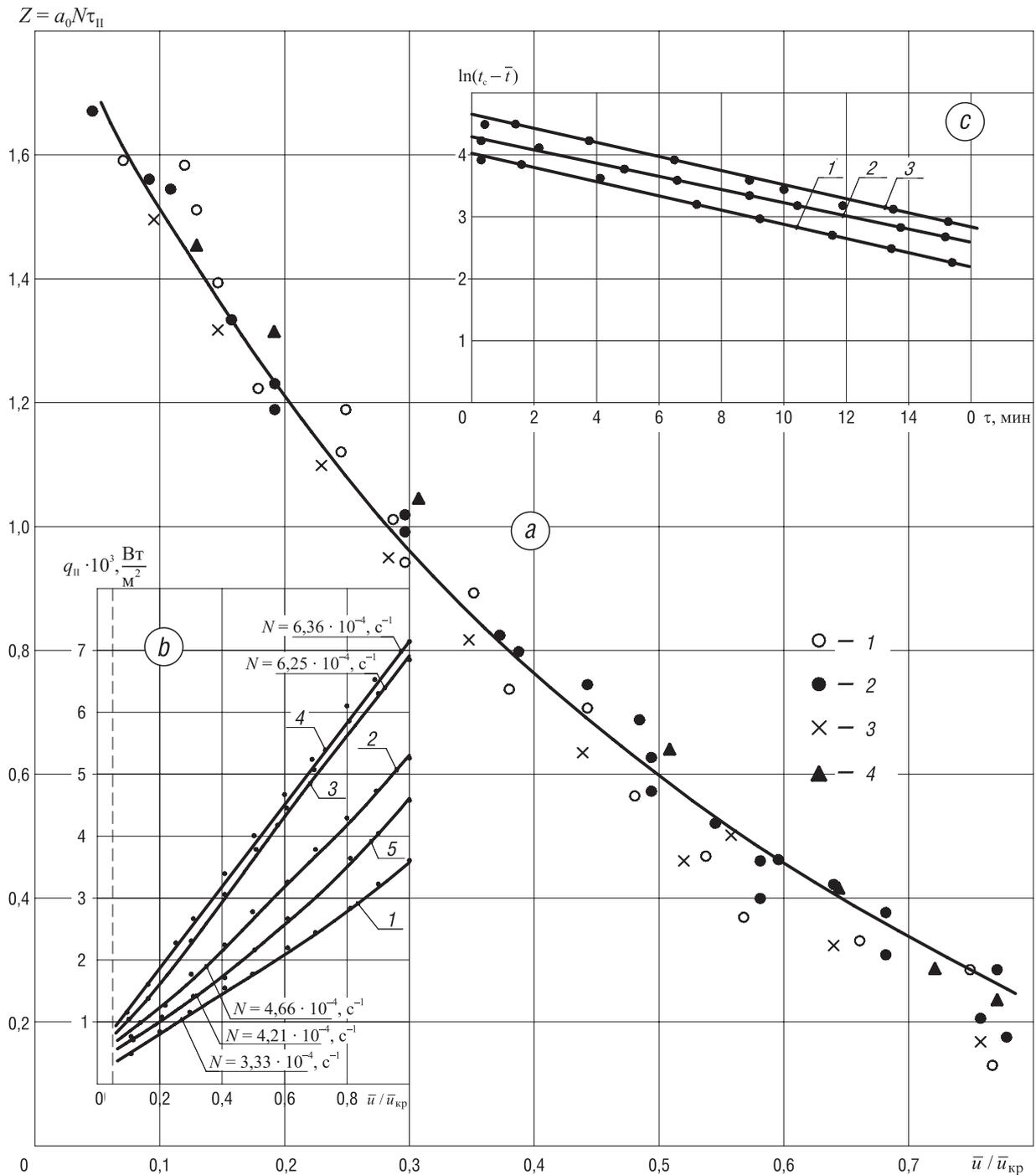


Рис. 1. Графики зависимости основных параметров сушки тонких материалов от относительного влагосодержания и длительности сушки: *a* – зависимость комплекса $z = a_0 N \tau_{II} = f(\bar{u} / \bar{u}_{кр})$ в процессе сушки пористой керамики (1), листового асбеста (2), шерстяного войлока (3) и технического картона (4) при режимах: $t_c = 90^\circ\text{C}$; 120°C ; скорость воздуха $v = 3$ и 5 м/с; *b* – зависимость плотности теплового потока q_{II} от относительного влагосодержания в процессе сушки листового асбеста при режимах: 1 – 120°C , 3 м/с; 2 – 120°C , 5 м/с; 3 – 120°C , 10 м/с; 4 – 150°C , 5 м/с; 5 – 90°C , 5 м/с; *c* – зависимость $\ln(t_c - \bar{t}) = f(\tau)$ для процесса сушки пористой керамики. Режимы сушки: 1 – 90°C , 2 – 120°C , 3 – 150°C ; $v = 3$; 5 м/с

Fig. 1. Graphs of the dependence of the main parameters of drying of thin materials on the relative moisture content and drying time: *a* – dependence of the complex $z = a_0 N \tau_{II} = f(\bar{u} / \bar{u}_{кр})$ for the drying process of porous ceramics (1), of sheet asbestos (2), of wool felt (3) and of technical paperboard (4) at drying regimes: $t_c = 90^\circ\text{C}$; 120°C ; air velocity $v = 3$ and 5 m/s; *b* – dependence of the heat flux density q_{II} from the relative moisture content during the drying of sheet asbestos at regimes: 1 – 120°C , 3 m/s; 2 – 120°C , 5 m/s; 3 – 120°C , 10 m/s; 4 – 150°C , 5 m/s; 5 – 90°C , 5 m/s; *c* – dependence $\ln(t_c - \bar{t}) = f(\tau)$ for the drying process of porous ceramics. Drying regimes: 1 – 90°C , 2 – 120°C , 3 – 150°C ; $v = 3$; 5 m/s

Решение уравнения (18) имеет вид [10]

$$\bar{\Theta} = \frac{t_c - \bar{t}}{t_c - t_{\text{м.т.}}} = \exp\left(-\frac{\bar{\alpha}}{c_0 \rho_0 R_V} \tau_{\text{II}}\right), \quad (19)$$

где $\bar{\Theta}$ – относительная избыточная температура влажного материала; $t_{\text{м.т.}}$ – температура мокрого термометра.

При сушке тонких плоских материалов теплообменный критерий $Bi < 1$ (малоинтенсивные процессы). Соотношение в уравнении (19) $\bar{\alpha} / c_0 \rho_0 R_V = m_t$ представляет собой темп нагрева твердого тела [9, 11]. Темп нагрева m_t определяется формой тела, условиями теплообмена поверхности тела с окружающей средой и для всех режимов сушки остается постоянной величиной [9, 11, 12]. Следовательно, для относительной температуры $\bar{\Theta}$ при $Bi < 1$ можно записать [9, 11]

$$\bar{\Theta} = \frac{t_c - \bar{t}}{t_c - t_{\text{м.т.}}} = \exp(-m_t \tau_{\text{II}}). \quad (20)$$

Решение системы уравнений тепломассопереноса при граничных условиях третьего рода (сушка), когда безразмерный поток вещества на поверхности влажного тела – функция времени, дает зависимость безразмерной температуры $\bar{\Theta}$ и относительного влагосодержания \bar{U} как функцию критериев $Bi Fo$ и $Bi_m Fo_m$ [11]

$$\bar{\Theta} = \frac{t_c - \bar{t}}{t_c - t_{\text{м.т.}}} = f(Bi Fo); \quad \bar{U} = \frac{\bar{u} - u_p}{\bar{u}_0 - u_p} = f(Bi_m Fo_m), \quad (21)$$

где Fo и Fo_m – теплообменный и массообменный критерии Фурье.

Теплообменные и массообменные критерии Bi и Bi_m в реальных условиях сушки имеют близкие численные значения [11].

Комбинации критериев $Bi Fo$ и $Bi_m Fo_m$ представляют собой важные обобщенные переменные [12]

$$Bi Fo = \frac{\bar{\alpha}}{c_0 \rho_0 R_V} \tau_{\text{II}} = m_t \tau_{\text{II}}; \quad Bi_m Fo_m = \frac{\bar{\alpha}_m}{c_m \rho_0 R_V} \tau = m_u \tau, \quad (22)$$

где $\bar{\alpha}_m$ – коэффициент массообмена; c_m – удельная массоемкость влажного тела; m_u – темп убыли влагосодержания.

Следовательно, для относительного влагосодержания \bar{U} , учитывая (22), можно записать зависимость

$$\bar{U} = \frac{\bar{u} - u_p}{\bar{u}_0 - u_p} = \exp(-m_u \tau). \quad (23)$$

Зависимость $\bar{U} = \bar{u} / \bar{u}_0 = f(m_u \tau)$ представлена на рис. 2, а для ряда влажных материалов при различных режимах сушки. Видно, что все экспериментальные точки с допустимым разбросом укладываются на одну кривую.

Темп нагрева влажного тела m_t и темп убыли влагосодержания m_u находятся экспериментально построением графических зависимостей $\ln(t_c - \bar{t}) = f(\tau)$ (см. рис. 1, с) и $\ln(W_0 - \bar{W}) = f(\tau)$. На рис. 2, б даны зависимости $\ln(W_0 - \bar{W}) = f(\tau)$ для процесса сушки листового асбеста (I) и пористой керамики (II) при различных режимах.

Для тонких материалов наблюдается период постоянной температуры, совпадающий с периодом постоянной скорости сушки до первого критического влагосодержания $\bar{W}_{\text{кр}}$. С началом второго периода температура материала возрастает от $t_{\text{м.т.}} \approx t_{\text{II}}$ до температуры t_c при $\tau \rightarrow \infty$.

Темп убыли влагосодержания m_u является сложной функцией режима сушки, начального влагосодержания \bar{u}_0 , способа подвода тепла и ряда других факторов, влияющих на процесс сушки [12, 13]. Из рис. 2, б видно, что все прямые начинаются от начального влагосодержания \bar{u}_0 , а их направление определяется режимом сушки. Таким образом, регуляризация процесса по влагосодержанию наступает по окончании стадии прогрева материала. Обработкой результатов

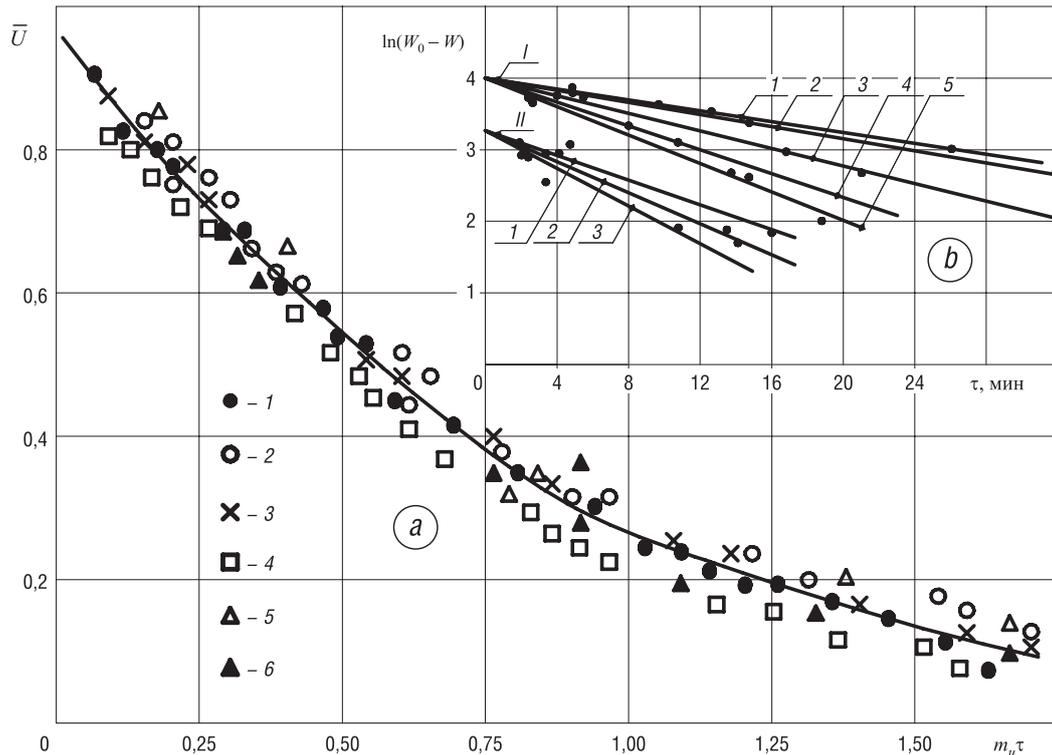


Рис. 2. Зависимости влагосодержания материала от длительности сушки: *a* – зависимость относительного влагосодержания $\bar{U} = \bar{u} / \bar{u}_0$ от обобщенной комплексной переменной $m_u \tau$ для процессов сушки. Режимы сушки: *I* – пористая керамика ($t_c = 90^\circ\text{C}$; 120°C , $\nu = 3$; 5 м/с); *2* – листовый асбест ($t_c = 90^\circ\text{C}$; 120°C ; 150°C , $\nu = 3$; 5 м/с); *3* – шерстяной войлок ($t_c = 90^\circ\text{C}$; 120°C ; 150°C , $\nu = 3$; 5 м/с); *4* – подошвенная кожа ($t_c = 40^\circ\text{C}$; 50°C ; 60°C , $\varphi = 25\text{--}45\%$, $\nu = 1$; 3 м/с); *5* – пластины красной глины $\delta = 10\text{--}12\text{ мм}$ ($t_c = 90^\circ\text{C}$; 120°C , $\nu = 3$; 5 м/с); *6* – технический картон ($t_c = 90^\circ\text{C}$; 120°C , $\nu = 3$; 5 м/с); *b* – зависимость $\ln(W_0 - \bar{W}) = f(\tau)$ для процесса сушки листового асбеста (*I*) и пористой керамики (*II*). Режимы сушки: (*I*): *1* – 90°C , $\nu = 5\text{ м/с}$; *2* – 120°C , $\nu = 3\text{ м/с}$; *3* – 120°C , $\nu = 5\text{ м/с}$; *4* – 120°C , $\nu = 10\text{ м/с}$; *5* – 150°C , $\nu = 5\text{ м/с}$; (*II*): *1* – 90°C , $\nu = 5\text{ м/с}$; *2* – 120°C , $\nu = 5\text{ м/с}$; *3* – 150°C , $\nu = 5\text{ м/с}$

Fig. 2. Dependence of the moisture content of the material on the drying time: *a* – dependence of the relative moisture content $\bar{U} = \bar{u} / \bar{u}_0$ for generalized complex variable $m_u \tau$ for drying processes. Drying regimes: *I* – porous ceramics ($t_c = 90^\circ\text{C}$; 120°C , $\nu = 3$; 5 м/с); *2* – sheet asbestos ($t_c = 90^\circ\text{C}$; 120°C ; 150°C , $\nu = 3$; 5 м/с); *3* – wool felt ($t_c = 90^\circ\text{C}$; 120°C ; 150°C , $\nu = 3$; 5 м/с); *4* – plantar skin ($t_c = 40^\circ\text{C}$; 50°C ; 60°C , $\varphi = 25\text{--}45\%$, $\nu = 1$; 3 м/с); *5* – plates of red clay $\delta = 10\text{--}12\text{ мм}$ ($t_c = 90^\circ\text{C}$; 120°C , $\nu = 3$; 5 м/с); *6* – technical paperboard ($t_c = 90^\circ\text{C}$; 120°C , $\nu = 3$; 5 м/с); *b* – dependence $\ln(W_0 - \bar{W}) = f(\tau)$ for the process of drying sheet asbestos (*I*) and porous ceramics (*II*). Drying regimes: (*I*): *1* – 90°C , $\nu = 5\text{ м/с}$; *2* – 120°C , $\nu = 3\text{ м/с}$; *3* – 120°C , $\nu = 5\text{ м/с}$; *4* – 120°C , $\nu = 10\text{ м/с}$; *5* – 150°C , $\nu = 5\text{ м/с}$; (*II*): *1* – 90°C , $\nu = 5\text{ м/с}$; *2* – 120°C , $\nu = 5\text{ м/с}$; *3* – 150°C , $\nu = 5\text{ м/с}$

экспериментальных исследований по сушке различных тонких материалов (пористая керамика $\delta = 5\text{ мм}$; листовый асбест $\delta = 4\text{--}6\text{ мм}$; шерстяной войлок $\delta = 6\text{--}8\text{ мм}$; технический картон $\delta = 4,5\text{ мм}$) установлены приближенные зависимости:

$$m_t = 0,115 \exp(-0,02W_{кр}); \tag{24}$$

$$m_u = 0,087N \exp(-0,02W_0). \tag{25}$$

Решением уравнений (20) и (23) определяются среднеинтегральная температура материала и длительность процесса сушки [12, 13]

$$\bar{t} = t_c - (t_c - t_{м.т.}) \exp(-m_t \tau_{II}); \tag{26}$$

$$\tau = -\frac{1}{m_u} \ln \frac{\bar{u} - u_p}{\bar{u}_0 - u_p}. \tag{27}$$

Проверка достоверности полученных формул и сопоставление расчетных и экспериментальных значений основных параметров приводятся в таблице.

Сопоставление экспериментальных значений среднеинтегральных температур и длительности сушки с расчетными по формулам (11), (13), (27) и (26) для некоторых влажных тонких материалов

Comparison of the experimental values of the mean integrated temperatures and the drying time with the calculated ones, which are obtained from formulas (11), (13), (27) and (26), for some moist thin materials

Пористая керамика, $\delta = 5$ мм							
Режим сушки: $t_c = 90$ °С; $v = 10$ м/с; $\bar{u}_0 = 0,2$; $\bar{u}_{кр} = 0,1$; $N = 0,018$ мин ⁻¹ ; $m_u = 0,105$ мин ⁻¹ ; $m_t = 0,0942$ мин ⁻¹ ; $t_{м.т.} \approx t_{п} = 37,5$ °С							
\bar{u} , %	$\tau_{экс}$, МИН	$\tau_{расч}$, МИН (11)	$\tau_{расч}$, МИН (13)	$\tau_{расч}$, МИН (27)	$\bar{t}_{экс}$, °С	$\bar{t}_{расч}$, °С (26)	$\tau_{пэксп}$, МИН
0,08	7,0	6,85	7,1	6,78	47	46,0	2,0
0,06	8,6	8,25	8,4	8,90	54	52,5	3,6
0,04	11,0	10,65	10,6	11,80	62	60,5	6,2
0,02	13,5	14,30	15,2	–	74	73,0	8,6
Шерстяной войлок, $\delta = 8$ мм							
Режим сушки: $t_c = 120$ °С; $v = 3$ м/с; $\bar{u}_0 = 1,14$; $\bar{u}_{кр} = 0,75$; $N = 0,00625$ мин ⁻¹ ; $m_u = 0,065$ мин ⁻¹ ; $m_t = 0,00256$ мин ⁻¹ ; $t_{м.т.} \approx t_{п} = 42$ °С							
0,6	9,5	9,35	9,15	10,4	47,0	48,0	3,0
0,5	12,0	11,6	11,4	12,9	51,0	51,5	5,5
0,4	15,0	14,4	14,2	15,7	56,2	57,0	8,5
0,3	18,2	17,8	17,6	19,0	60,6	61,2	11,7
0,2	22,5	21,4	22,3	–	64,7	65,4	16,2
Листовой асбест, $\delta = 6$ мм							
Режим сушки: $t_c = 120$ °С; $v = 3$ м/с; $\bar{u}_0 = 0,46$; $\bar{u}_{кр} = 0,20$; $N = 0,022$ мин ⁻¹ ; $m_u = 0,076$ мин ⁻¹ ; $m_t = 0,075$ мин ⁻¹ ; $t_{м.т.} \approx t_{п} = 40$ °С							
0,16	13,5	13,75	13,80	13,85	48,5	51,0	2,0
0,12	16,9	16,35	16,20	17,30	62,5	64,0	5,4
0,10	20,1	19,50	19,10	19,85	–	–	8,6
0,06	24,9	24,40	23,85	25,50	88,0	90,3	13,4
0,04	27,2	26,95	26,68	29,80	94,0	95,3	15,7
0,02	32,8	31,30	32,22	–	104,5	103,5	21,3

Заклучение. Представлены результаты обработки опытных данных на основе обобщенных комплексных переменных и регулярного теплового режима. Изложен способ расчета кинетики теплообмена на основе обработки эксперимента по кинетике влагообмена без использования критериальных уравнений теплообмена и определения коэффициентов теплообмена, что значительно сокращает объем расчетной работы. Приведены расчетные уравнения для определения основных параметров кинетики тепло- и влагообмена. Дана проверка полученных расчетных уравнений и сопоставление эксперимента с расчетными значениями основных параметров кинетики сушки.

Список использованных источников

1. Акулич, П.В. Расчеты сушильных и теплообменных установок / П.В. Акулич. – Минск: Беларус. наука, 2010. – 444 с.
2. Лыков, А.В. Теория сушки / А.В. Лыков. – М.: Энергия, 1968. – 472 с.
3. Рудобашта, С.В. Теплотехника / С.В. Рудобашта. – М.: Колос, 2010. – 600 с.
4. Сажин Б.С. Основы техники сушки / Б.С. Сажин. – М.: Химия, 1984. – 320 с.
5. Красников, В.В. Кондуктивная сушка / В.В. Красников. – М.: Энергия, 1973. – 288 с.
6. Куц, П.С. Некоторые закономерности тепловлагообмена и приближенные методы расчета кинетики процесса сушки влажных материалов / П.С. Куц, А.И. Ольшанский // Инженер.-физ. журн. – 1977. – Т. 32, №6. – С. 1007–1014.
7. Ольшанский, А.И. Некоторые закономерности кинетики сушки пищевых продуктов / А.И. Ольшанский, П.С. Куц // Изв. вузов. Пищевая технология. – 1977. – №. 5. – С. 97–101.
8. Куц, П.С. К вопросу приближенной методики расчета кинетики конвективной сушки плоских материалов / П.С. Куц, А.И. Ольшанский // Инженер.-физ. журн. – 1975. – Т. 28, №4. – С. 594–598.
9. Лыков, А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков. – М.: Высш. шк., 1967. – 600 с.
10. Лыков, А.В. Теоретические основы строительной теплофизики / А.В. Лыков. – Минск: Изд-во Акад. наук БССР, 1961. – 520 с.
11. Лыков, А.В. Теория тепло- и массопереноса / А.В. Лыков, Ю.А. Михайлов. – М.: Госэнергоиздат, 1963. – 536 с.
12. Ольшанский, А.И. Регулярный тепловой режим нагревания влажных плоских капиллярно-пористых материалов в процессе сушки / А.И. Ольшанский // Инженер.-физ. журн. – 2014. – Т. 87, №6. – С. 1308–1318.

References

1. Akulich P. V. *Calculations drying and heat exchange systems*. Minsk, Belorusskaya nauka Publ., 2010. 444 p. (in Russian).
2. Lykov A. V. *Drying theory*. Moscow, Energiya Publ., 1968. 472 p. (in Russian).
3. Rudobashta S. V. *Heat engineering*. Moscow, Kolos Publ., 2010. 600 p. (in Russian).
4. Sazhin B. S. *Fundamentals of drying technique*. Moscow, Khimiya Publ., 1984. 320 p. (in Russian).
5. Krasnikov V. V. *Conductive drying*. Moscow, Energiya Publ., 1973. 288 p. (in Russian).
6. Kuts P. S., Ol'shanskii A. I. Some features of heat and moisture transfer and approximate methods of calculating the drying kinetics of moist materials. *Journal of Engineering Physics*, 1977, vol. 32, no. 6, pp. 650–656. Doi: 10.1007/bf00862568
7. Ol'shanskii A. I., Kuts P. S. Some features of kinetics of drying food products. *Izvestia vuzov. Pishhevaya tekhnologiya = News of Institutes of Higher Education. Food technology*, 1977, no. 5, pp. 97–101 (in Russian).
8. Kuts P. S., Ol'shanskii A. I. Approximate method of calculating the kinetics of convective drying of flat materials. *Journal of Engineering Physics*, 1975, vol. 28, no. 4, pp. 419–422. Doi: 10.1007/bf00878212
9. Lykov A. V. *Heat conductivity theory*. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1967. 600 p. (in Russian).
10. Lykov A. V. *Theoretical fundamentals of construction thermophysics*. Minsk, Publishing House of Academy of Sciences of BSSR, 1961. 520 p. (in Russian).
11. Lykov A. V., Mikhailov Y. A. *Theory of heat- and mass transfer*. Moscow, Gosenergoizdat Publ., 1963. 536 p. (in Russian).
12. Ol'shanskii A. I. Regular heat regime of heating of moist capillary-porous materials in the process of their drying. *Journal of Engineering Physics*, 2014, vol. 87, no. 6, pp. 1362–1373. Doi: 10.1007/s10891-014-1139-5

Информация об авторах

Ольшанский Анатолий Иосифович – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры технологии и оборудования машиностроительного производства, Витебский государственный технологический университет (Московский пр., 72, 210035, Витебск, Республика Беларусь). E-mail: tiomp@vstu.by

Жерносек Сергей Васильевич – ассистент кафедры технологии и оборудования машиностроительного производства, Витебский государственный технологический университет (Московский пр., 72, 210035, Витебск, Республика Беларусь). E-mail: zs_85@mail.ru

Ольшанский Валерий Иосифович – кандидат технических наук, профессор, заведующий кафедрой технологии и оборудования машиностроительного производства, Витебский государственный технологический университет (Московский пр., 72, 210035, Витебск, Республика Беларусь). E-mail: tiomp@vstu.by

Information about the authors

Anatolii I. Ol'shanskii – Ph. D. (Engineering), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Technology and Equipment of Machine-Building Production, Vitebsk State Technological University (72, Moskovsky Ave., 210035, Vitebsk, Republic of Belarus). E-mail: tiomp@vstu.by

Sergei V. Zhernosek – Assistant of the Department of Technology and Equipment of Machine-Building Production, Vitebsk State Technological University (72, Moskovsky Ave., 210035, Vitebsk, Republic of Belarus). E-mail: zs_85@mail.ru

Valery I. Ol'shanskii – Ph. D. (Engineering), Professor, Professor of the Department, Head of the Department of Technology and Equipment of Machine-Building Production, Vitebsk State Technological University (72, Moskovsky Ave., 210035, Vitebsk, Republic of Belarus). E-mail: tiomp@vstu.by

М. А. Кузьмич¹, А. С. Журавлёв¹, Б. Хуухэнхуу²¹*Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*²*Институт физики и технологии Академии наук Монголии, Улан-Батор, Монголия***ВЛИЯНИЕ СИЛ ГРАВИТАЦИИ НА ПАРАМЕТРЫ ПАРОДИНАМИЧЕСКОГО ТЕРМОСИФОНА**

Аннотация. Двухфазный пародинамический термосифон (ПДТ) является эффективным теплопередающим устройством, в котором реализуется замкнутый испарительно-конденсационный цикл переноса тепла, причем движущей силой, обеспечивающей возврат жидкой фазы рабочего вещества в конденсатор, являются гравитационное поле и давление пара. Оригинальная конструкция конденсатора и испарителя ПДТ позволяет передавать тепловой поток в горизонтальном направлении на большие (10–20 м) расстояния. ПДТ можно использовать в теплообменниках тепловых насосов, предназначенных для утилизации альтернативных источников энергии и вторичных энергоресурсов. Представлены результаты экспериментального исследования теплопередающей способности ПДТ с протяженным испарителем. Определены основные параметры ПДТ при различных величинах тепловой нагрузки, изменениях перепада высот между испарителем и конденсатором. Установлены рабочий диапазон тепловых нагрузок и максимально допустимый угол наклона термосифона, при которых не нарушается его работоспособность. Определены термические сопротивления устройства для рабочего диапазона тепловых нагрузок. Описана схема экспериментальной установки и изложена методика проведенного исследования. Полученные данные позволяют сделать вывод об устойчивой работоспособности теплопередающего устройства в диапазоне тепловых нагрузок 300–1500 Вт при отклонении термосифона от вертикальной плоскости на угол до 85 град.

Ключевые слова: пародинамический термосифон, теплообменник, возобновляемые и вторичные источники энергии, испаритель, конденсатор, тепловая нагрузка

Для цитирования. Кузьмич, М. А. Влияние сил гравитации на параметры пародинамического термосифона / М. А. Кузьмич, А. С. Журавлёв, Б. Хуухэнхуу // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2017. – №4. – С. 55–62.

М. А. Kuzmich¹, A. S. Zhuravlyov¹, B. Khuukhenkhuu²¹*A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*²*Institute of Physics & Technology, Mongolian Academy of Sciences, Ulan Bator, Mongolia***IMPACT OF GRAVITY FORCE ON HEAT TRANSFER CHARACTERISTICS OF VAPORDYNAMIC THERMOSYPHON**

Abstract. The two-phase vapordynamic thermosyphon (VDT) is an efficient heat transfer device. Closed vapordynamic evaporative-condensation heat transfer cycle is realized inside it. Vapor pressure acts as a driving force for returning the liquid phase of working fluid to the condenser. The original design of the condenser and the evaporator of the VDT allows to transfer heat flow in horizontal direction to large (10–20 meters) distance. VDT can be used in heat exchangers of heat pumps, heat and cold accumulators of alternative energy sources and secondary energy sources for utilization. This article presents results of the experimental study and shows VDT heat transfer capability depending on the conditions of its work. For this purpose following VDT parameters were determined for different values of heat load and various drops between the thermosyphon evaporator and its condenser: the operating range of heat loads, maximum allowable thermosyphon angle of inclination, dependence of thermal resistance on the transmitted heat flow. The scheme of VDT is described and the methodology of the study is presented. Experimental data allows to conclude that high heat-transfer device working efficiency is achievable with heat loads between 300 and 1500 W and with vertical inclination angles up to 85 degrees.

Keywords: vapordynamic thermosyphon, heat exchanger, secondary- and renewable energy sources, evaporator, condenser, heat load

For citation. Kuzmich M. A., Zhuravlyov A. S., Khuukhenkhuu B. Impact of gravity force on heat transfer characteristics of vapordynamic thermosyphon. *Vesti Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2017, no. 4, pp. 55–62 (in Russian).

Введение. Актуальность проблемы совершенствования теплообменной аппаратуры обусловлена необходимостью решения сложных технических и экономических задач. По прогнозу аналитиков из Global Industry Analysts Inc., рынок теплообменников вырастет к 2020 г. до 24,3 млрд долларов США. Речь идет о теплообменниках, используемых в информационных центрах обработки данных по охлаждению и терморегулированию электронного оборудования. Причиной этого роста станет технологический скачок, связанный с необходимостью повышения эффективности данного оборудования. Создание устройств, передающих тепло с минимальными потерями, способствует развитию такого направления в энергетике, как утилизация низкопотенциального тепла. В течение последних 40 лет рациональное и экологически чистое использование энергии в Республике Беларусь приобретает все большее значение, при этом особое внимание уделяется возобновляемым и вторичным энергоресурсам. В лаборатории пористых сред Института тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси изобретены и запатентованы в ряде стран мира, таких как США, Франция, Швеция, Бельгия, тепловые трубы и пародинамические термосифоны (ПДТ) – новые теплопередающие устройства, в которых реализуется замкнутый испарительно-конденсационный цикл переноса тепла, где движущей силой, обеспечивающей возврат жидкой фазы рабочего вещества в конденсатор, являются гравитационное поле и давление пара [1–5].

Тепловые трубы оригинальной конструкции и пародинамические термосифоны могут успешно использоваться в составе теплообменников тепловых насосов (адсорбционных и абсорбционных), в солнечных коллекторах, грунтовых теплообменниках, что обеспечивает широкие возможности их применения для утилизации тепла возобновляемых и вторичных энергоресурсов. ПДТ имеют принципиальное отличие от других известных в мире термосифонов и тепловых труб. Главная особенность ПДТ по сравнению с другими термосифонами заключается в наличии протяженного кольцевого зазора между паропроводящей трубой и конденсатором (конструкция типа «труба в трубе»), в котором происходит конденсация пара.

Основными областями применения ПДТ являются:

теплообменники в системах, утилизирующих тепло возобновляемых источников энергии (солнечное излучение, грунт, природные водоемы);

теплообменники-рекуператоры, использующие вторичные энергоресурсы – отработанная вода, газовые выбросы, имеющие место в технологических процессах, а также в системах вентиляции и кондиционирования воздуха;

системы поддержания теплового контроля в различных отраслях техники (пищевая и холодильная; литейное и штамповочное производство).

Применение ПДТ в технологических процессах (сушка, кондиционирование помещений, термообработка пищевых продуктов в обжарочных и сушильных камерах, подогрев тротуаров и парковок для автомобилей, поддержание нужной температуры жидкого асфальта и бетона при их транспортировке, получение биотоплива и т. д.) позволяет эффективно использовать низкотемпературные источники энергии.

Тепловые трубы и термосифоны с водой в качестве рабочей жидкости обеспечивают высокую энергетическую эффективность и одновременно надежность для обогрева или охлаждения ответственных и труднодоступных элементов электротехнических устройств [6].

ПДТ можно применять в качестве основных компонентов сухой градирни, предназначенной для понижения температуры рабочей жидкости, охлаждаемой воздухом окружающей среды, например в производстве экстракционной фосфорной кислоты для сохранения температуры экстрактора в пределах от 80 до 110 °С (в зависимости от типа проводимой реакции) и выделении около 20 МВт теплоты. Теплообменники на базе термосифонов дают возможность использовать выделяемое тепло в системе теплоснабжения предприятия. Утилизируемые таким образом вторичные энергоресурсы позволяют исключить из схемы экстрактора такой элемент, как струйный охладитель реакционной массы с электроприводом, благодаря чему происходит экономия электроэнергии и обеспечивается дополнительная экологическая безопасность процесса [7].

В [8] приводится система нагрева, охлаждения и вентиляции шахтных помещений на базе термосифонов, которая позволяет понизить расход топлива на 30–40 % при сохранении суще-

ствующих габаритов котельной, при этом уменьшаются затраты энергии на подогрев приточного воздуха. Представляет интерес использование термосифона в качестве подающего и обратного стояков зданий в системах отопления и горячего водоснабжения. В таких системах тепло от внешнего источника подводится к испарителю, расположенному на нижнем этаже, а отвод тепла осуществляется с помощью расположенных на каждом этаже теплообменников, в межтрубном пространстве конденсируется часть пара рабочего вещества термосифона [9].

Однако для широкого и рентабельного внедрения и массового производства термосифонов необходима дальнейшая разработка конструкции устройства, что позволит улучшить их рабочие характеристики и обеспечить эффективную передачу тепла. Устройство и механизм работы ПДТ рассмотрены в [10].

Цель работы – определить основные параметры ПДТ при различной величине его тепловой нагрузки, а также при изменении перепада высот между испарителем термосифона и конденсатором, установить рабочий диапазон тепловых нагрузок и максимально допустимый угол отклонения термосифона от вертикальной плоскости.

Схема экспериментальной установки. Для исследования процессов, протекающих в ПДТ, в Институте тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси был создан экспериментальный стенд с таким термосифоном.

Схема стенда с указанием основных его узлов приведена на рис. 1. На столе (II) установлен ПДТ (I) с возможностью изменения перепада высот между испарителем и конденсатором (отклонение термосифона от вертикального положения). Нагрев испарителя осуществляется электрическим нагревателем (III), потребляемая мощность которого регулируется лабораторным автотрансформатором (IV) и контролируется ваттметром (V). Температура в различных точках ПДТ измеряется и регистрируется с помощью термопар и автоматизированного комплекса Agilent Technology 34970A (VI). Через патрубок к термосифону подключается манометр для проверки герметичности системы, а также производится заправка рабочей жидкостью.

Рабочий участок ПДТ (рис. 2) изготовлен разборным. Соединение между конденсатором и транспортной зоной выполнено с помощью фланцев 8 и 9. Конденсатор представляет собой

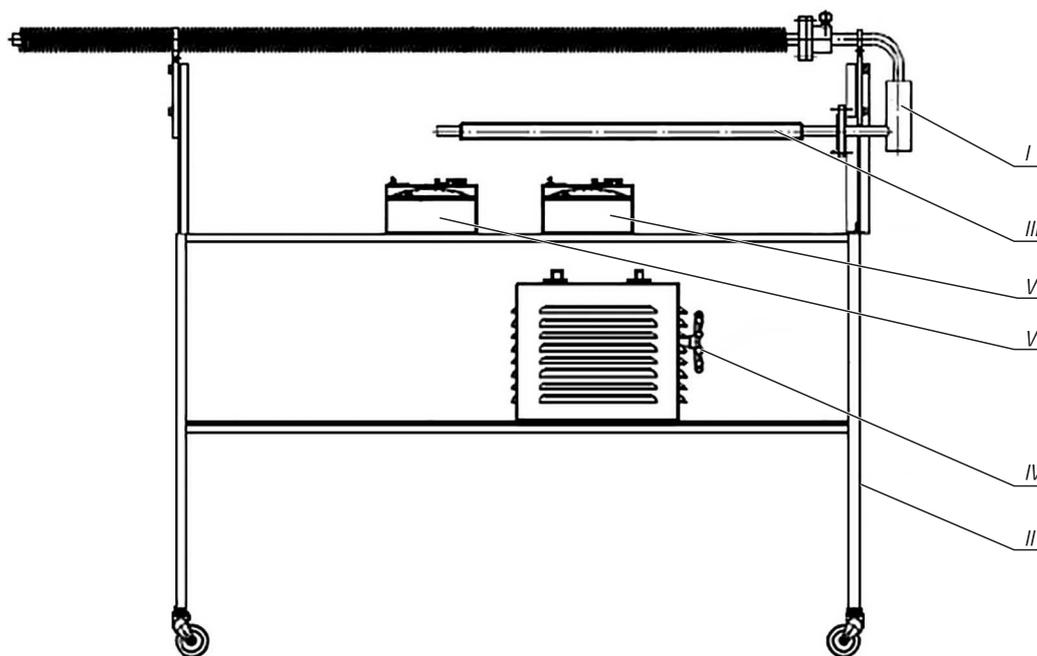


Рис. 1. Стенд для экспериментального исследования: I – пародинамический термосифон, II – рабочий стол, III – электрический нагреватель, IV – лабораторный автотрансформатор, V – ваттметр, VI – автоматизированный измерительный комплекс

Fig. 1. Experimental setup: I – vapordynamic thermosyphon, II – working table, III – electric heater, IV – laboratory autotransformer, V – wattmeter, VI – automated measuring system

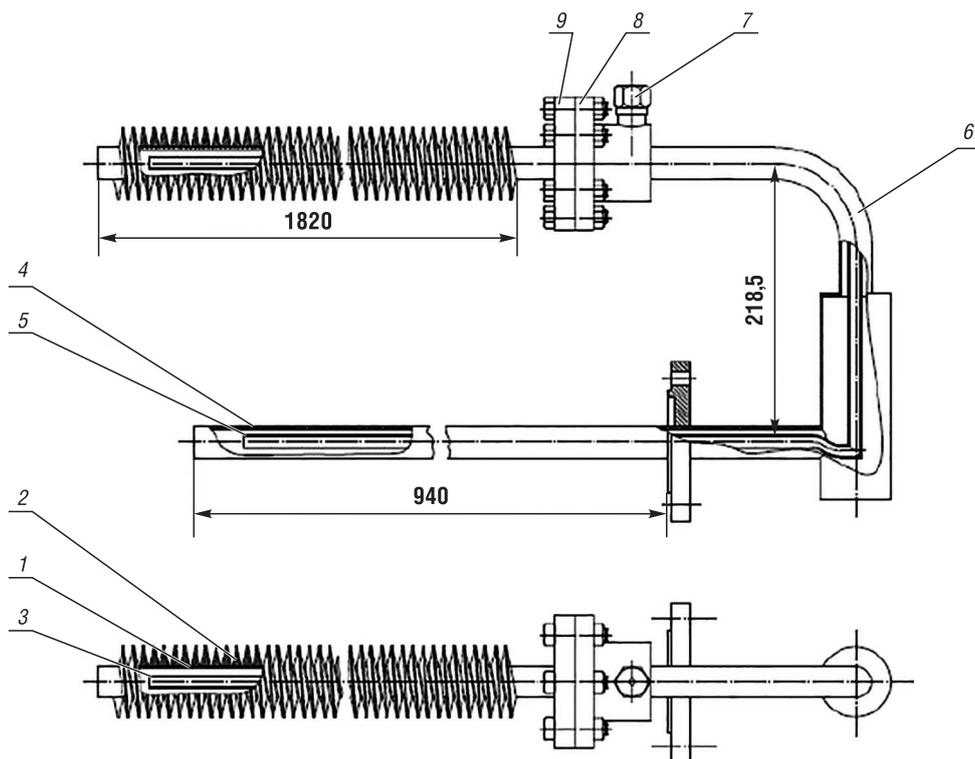


Рис. 2. Схема пародинамического термосифона: 1 – конденсатор, 2 – металлическое оребрение, 3 – внутренняя трубка конденсатора, 4 – испаритель, 5 – внутренняя трубка испарителя, 6 – транспортная зона, 7 – патрубок, 8 и 9 – соединительные фланцы

Fig. 2. Vapordynamic thermosiphon scheme: 1 – condenser, 2 – metal finning, 3 – internal condenser tube, 4 – evaporator, 5 – internal evaporator tube, 6 – transport area, 7 – connecting pipe, 8 and 9 – connecting flanges

трубу 1 из нержавеющей стали марки 1X18Н9Т с внешним диаметром 25 мм и толщиной стенки 2 мм. На трубе установлено алюминиевое оребрение 2 для улучшения условий теплоотдачи между конденсатором термосифона и окружающей средой (воздух). Внутри конденсатора соосно установлена труба меньшего диаметра 3 для подачи пара в конденсатор. Это необходимо для разделения потоков пара и конденсата, что обеспечивает улучшение теплопередающих характеристик ПДТ. Такая конструкция позволяет осуществлять передачу тепла в горизонтальном положении на большие расстояния. Испаритель 4, как и конденсатор, изготовлен из трубы, внешний диаметр которой 25 мм, а толщина стенки 2 мм. Внутренняя труба 5 в испарителе предназначена для возврата жидкости. Для обслуживания термосифона (заправки рабочей жидкостью, откачки воздуха из внутренней полости, подключения манометра) служит патрубок 7. Измерение температуры на поверхности конденсатора осуществлялось с помощью медь-константановых термопар (тип Т, диаметр проводников 0,2 мм) и хромель-алюмелевых термопар (тип К) на испарителе (рис. 3).

Сбор и обработка информации производились автоматизированным комплексом Agilent Technology 34970А.

Перед началом работы из внутренней полости ПДТ удалялся воздух и проводилась его заправка рабочей жидкостью (дистиллированная вода). Процесс вакуумирования внутренней полости термосифона осуществлялся путем откачки воздуха вакуумным насосом. Эта операция позволяет избежать образования в конденсаторе воздушных пробок.

Для проведения экспериментов, с учетом прилагаемых тепловых мощностей и геометрии термосифона (и его общего внутреннего объема), был выбран и применен уровень заправки, равный 650 мл дистиллированной воды.

Методика проведения опытов заключается в ступенчатом увеличении величины теплового потока с определенной временной выдержкой между двумя приращениями тепловой нагрузки. Интервал во времени необходим для стабилизации изменяющихся параметров ПДТ.



Рис. 3. Фотография пародинамического термосифона. Расположение термопар: красные – медь-константановые, черные – хромель-алюмелевые

Fig. 3. Vapordynamic thermosiphon photo. Locations of thermocouples: red – copper/constantan, black – chromel/alumel

Результаты и их обсуждение. При снижении тепловой нагрузки до 300 Вт (рис. 4) дальний относительно испарителя конец трубы конденсатора начинает постепенно охлаждаться. Пар конденсируется на стенках малой трубы внутри конденсатора с образованием жидкостной пробки, что приводит к остановке циркуляции жидкости по зазору между внешней и внутренней трубами конденсатора и понижению температуры части конденсатора, поскольку давления пара во внутренней трубе не хватает для проталкивания жидкости через конденсатор и обеспечения полноценной работы термосифона. Следовательно, необходимо обеспечить минимальный тепловой поток, достаточный, чтобы пар проталкивал жидкость до конца термосифона. Экспериментально определенная величина критической тепловой нагрузки ПДТ составляет 300 Вт.

Максимальная используемая тепловая нагрузка, ограниченная удельной мощностью нагревательной ленты, была равна 1500 Вт и обеспечивала устойчивую работу термосифона.

При проведении экспериментов по изучению влияния угла наклона ПДТ на его работоспособность термосифон отклоняется от вертикальной плоскости (рис. 5) путем изменения положения в пространстве испарителя ПДТ при сохранении неизменного положения конденсатора.

Результаты исследования влияния угла наклона ПДТ на температуру испарителя и конденсатора при тепловых нагрузках 500 и 1000 Вт приведены на рис. 6 и 7. Изменение угла наклона производилось ступенчато, с постепенным выходом на стационарное состояние.

Полученные экспериментальные данные свидетельствуют о том, что стабильная, без значительных пульсаций температуры, работа в течение продолжительного времени наблюдается при боковом отклонении термосифона до 85 град в условиях медленного пошагового увеличения угла наклона с последующим выходом на стационарный режим. При угле отклонения термосифона 85 град температура на дальнем (относительно испарителя) конце конденсатора начинает быстро падать, то есть

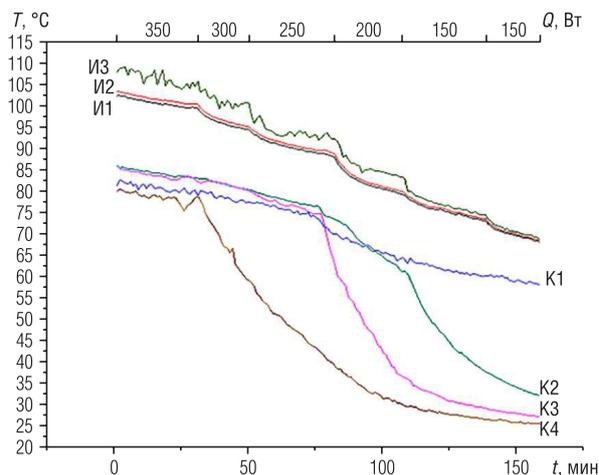


Рис. 4. Изменение температуры в различных точках испарителя и конденсатора ПДТ при ступенчатом понижении тепловой нагрузки (после выхода на стационарный режим): И1–И3 – показания термопар на испарителе, К1–К4 – на конденсаторе

Fig. 4. Temperature changing at different points of the evaporator and condenser of VDT while heating load decreasing stepwise (after reaching the steady stage conditions): И1–И3 – indications of thermocouples on the evaporator, К1–К4 – on the condenser



Рис. 5. Отклонение испарителя от вертикальной плоскости на угол φ (за изначальное принимается вертикальное положение термосифона)
 Fig. 5. Inclination of the evaporator from the vertical plane by an angle φ (the initial position is vertical position of the thermosyphon)

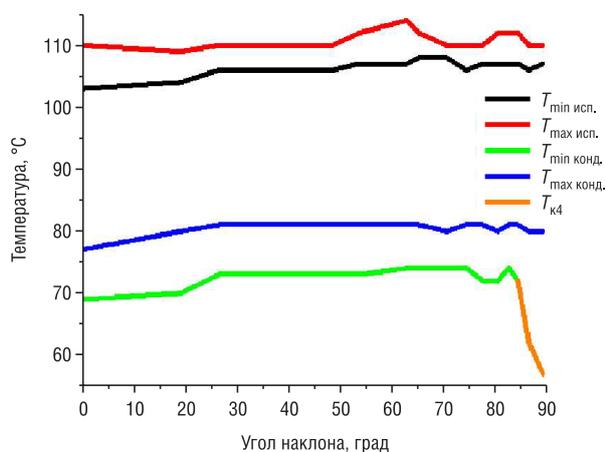


Рис. 6. Температуры испарителя и конденсатора ПДТ как функция угла отклонения от вертикального положения для тепловой нагрузки 500 Вт. $T_{\min \text{ исп.}}$, $T_{\max \text{ исп.}}$ – температурные минимум и максимум для соответствующих углов наклона на испарителе, $T_{\min \text{ конд.}}$, $T_{\max \text{ конд.}}$ – на конденсаторе. $T_{\text{к4}}$ – температура на дальнем относительно транспортной зоны конце конденсатора, что указывает на прекращение циркуляции рабочей жидкости по термосифону при больших углах наклона

Fig. 6. Evaporator and condenser temperatures of VDT as a function of the angle of inclination to the horizon line with thermal load of 500 watts applied. $T_{\min \text{ исп.}}$, $T_{\max \text{ исп.}}$ – temperature minimum and maximum for the respective angles of inclination on the evaporator, $T_{\min \text{ конд.}}$, $T_{\max \text{ конд.}}$ – on the condenser. $T_{\text{к4}}$ – temperature at the far end of the condenser relative to the transport zone. Its shows circulation termination of the working fluid along the thermosyphon at large angles of inclination

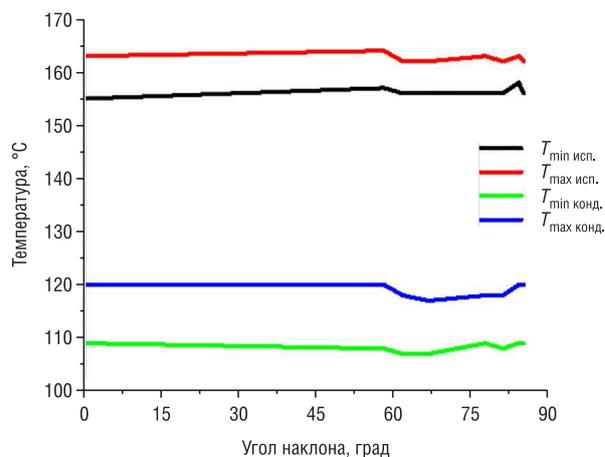


Рис. 7. Температуры испарителя и конденсатора ПДТ как функция угла отклонения от вертикального положения для тепловой нагрузки 1000 Вт. $T_{\min \text{ исп.}}$, $T_{\max \text{ исп.}}$ – температурные минимум и максимум для соответствующих углов наклона на испарителе, $T_{\min \text{ конд.}}$, $T_{\max \text{ конд.}}$ – на конденсаторе

Fig. 7. Evaporator and condenser temperatures of VDT as a function of the angle of inclination to the horizon line with thermal load of 1000 watts applied. $T_{\min \text{ исп.}}$, $T_{\max \text{ исп.}}$ – temperature minimum and maximum for the respective angles of inclination on the evaporator, $T_{\min \text{ конд.}}$, $T_{\max \text{ конд.}}$ – on the condenser

становится невозможной прежняя траектория движения жидкости. Критический угол наклона ПДТ для запуска установки из холодного состояния и выхода на ее рабочий режим равен 70 град.

При тепловых нагрузках 500–1500 Вт было рассчитано термическое сопротивление по формуле

$$R_t = \frac{T_n - T_k}{Q},$$

где T_n – температура испарителя, T_k – температура конденсатора, Q – тепловая нагрузка.

Для случая $Q = 500$ Вт термическое сопротивление $R_t = 0,064$ К/Вт.

Для случая $Q = 1000$ Вт, термическое сопротивление $R_t = 0,046$ К/Вт.

Для тепловых нагрузок в диапазоне 1000–1500 Вт термическое сопротивление изменяется в пределах 3–4 % относительно R_t для 1000 Вт.

Заключение. Разработан пародинамический термосифон с протяженным испарителем, способный передавать тепловой поток в горизонтальном направлении на большие расстояния. Минимальная тепловая нагрузка для запуска и работы пародинамического термосифона равна 300 Вт. Устойчивая работоспособность теплопередающего устройства находится в диапазоне тепловых нагрузок 300–1500 Вт. Термосифон может работать при отклонении от вертикальной плоскости до 85 град без заметных ухудшений его характеристик. Запуск термосифона с последующим переходом в рабочее состояние возможен под углом наклона до 70 град к вертикали. Изменение тепловой нагрузки ПДТ (от 500 до 1000 Вт), работающего под углами наклона, близкими к критическому, не оказывает существенного влияния на работоспособность термосифона.

Список использованных источников

1. Васильев, Л. Л. Пародинамические термосифоны – эффективные теплопередающие устройства для передачи теплоты на большие расстояния / Л. Л. Васильев, Л. Л. Васильев, мл., А. С. Журавлёв // Тез. докл. Беларус.-Латв. форума «Наука, инновации, инвестиции», Минск, 25–27 сент. 2013 г. – Минск, 2013. – С. 48–50.
2. Васильев, Л. Л. Перспективы применения тепловых насосов в Республике Беларусь / Л. Л. Васильев // Инженер.-физ. журн. – 2005. – Т. 78, № 1. – С. 23–34.
3. Vasiliev L. L., Morgun V. A., Rabetsky M. I. Heat Transfer Device. US Patent No. 4554966, 26.11.1985.
4. Vasiliev, L. L. Heat Pipes and Thermosyphons for Thermal Management of Solid Sorption Machines and Fuel Cells / L. L. Vasiliev, L. L. Vasiliev, Jr. // Heat Pipes and Solid Sorption Transformers. Fundamentals and Practical Applications / ed. by L. L. Vasiliev, S. Kakaç. – London ; New York: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2013. – P. 213–258.
5. Zhuravlyov, A. S. Horizontal vapordynamic thermosyphons, fundamentals, and practical applications / A. S. Zhuravlyov, L. L. Vasiliev, L. L. Vasiliev, Jr. // Heat Pipe Science and Technology. – 2013. – Vol. 4, № 1–2. – P. 39–52.
6. Богданов, А. Б. Обзор шести передовых энергосберегающих технологий в электросетевом комплексе России [Электронный ресурс] / А. Б. Богданов // Энергосовет. – 2010. – № 8 (13). – Режим доступа: http://www.energosoвет.ru/bul_stat.php?idd=125ю – Дата доступа: 12.10.2016.
7. Совершенствование энерготехнологической системы производства экстракционной фосфорной кислоты / И. В. Кладов [и др.] // Вестн. Иванов. гос. энерг. ун-та. – 2012. – № 3. – С. 13–18.
8. Ферт, А. Р. Термосифонная система утилизации теплоты удаляемого воздуха / А. Р. Ферт, Н. И. Чеховская, А. В. Гребенюк // Водоснабжение и санитарная техника. – 1987. – № 7. – С. 17.
9. Фролов, В. П. Тепловые трубы в системах теплоснабжения / В. П. Фролов, А. Я. Шелгинский // Энергосбережение. – 2004. – № 6. – С. 58–64.
10. Рабецкий, М. И. Пародинамические термосифоны / М. И. Рабецкий. – Минск, 1988. – 35 с. – (Препринт Ин-та тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова Нац. акад. наук Беларуси, № 11).

References

1. Vasiliev L. L., Vasiliev L. L., Jr., Zhuravlev A. S. Vapordynamic thermosyphons – efficient heat transfer devices for long-distance heat transfer. *Tezisy dokladov Belorussko-Latviiskogo foruma «Наука, innovatsii, investitsii», Minsk, 25–27 sentyabrya 2013 g.* [Abstracts of Belarusian-Latvian forum “Science, Innovations, Investments”, Minsk, September 25–27, 2013]. Minsk, 2013, pp. 48–50 (in Russian).
2. Vasiliev L. L. Prospects for employing heat pumps in the Republic of Belarus. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2005, vol. 78, no. 1, pp. 21–32. Doi: 10.1007/s10891-005-0026-5
3. Vasiliev L. L., Morgun V. A., Rabetsky M. I. *Heat Transfer Device*. US Patent No. 4554966, 1985.
4. Vasiliev L. L., Vasiliev L. L., Jr. Heat pipes and thermosyphons for thermal management of solid sorption machines and fuel cells. Heat pipes and solid sorption transformers. Vasiliev L. L., Kakaç S. (eds.). *Heat Pipes and Solid Sorption Transformations. Fundamentals and Practical Applications*. London, New York, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2013, pp. 213–258. Doi: 10.1201/b14864-7

5. Zhuravlyov A. S., Vasiliev L. L., Vasiliev L. L., Jr. Horizontal vapordynamic thermosyphons, fundamentals, and practical applications. *Heat Pipe Science and Technology*, 2013, vol. 4, no. 1–2, pp. 39–52. Doi: 10.1615/heatpipe-sciotech.2013007414

6. Bogdanov A. B. Review of six advanced energy-saving technologies in the electric grid complex of Russia. *Energosovet*, 2010, no. 8 (13). Available at: http://www.energosovet.ru/bul_stat.php?idd=125ю (Accessed 12 October 2016) (in Russian).

7. Kladov I. V., Shelginsky A. Ya., Sedlov A. S., Galaktionov V. V. Power Technological System Improvement of Extractive Phosphoric Acid Production. *Vestnik Ivanovskogo gosudarstvennogo energeticheskogo universiteta = Vestnik of Ivanovo State Power Engineering University*, 2012, no. 3, pp. 13–18 (in Russian).

8. Fert A. R., Chekhovskaya N. I., Grebenyuk A. V. Thermosyphon system for heat recovery of the exhaust air. *Vodosnabzhenie i sanitarnaya tekhnika = Water Supply and Sanitary Technique*, 1987, no. 7, p. 17 (in Russian).

9. Frolov V. P., Shelginsky A. Ya. Heat pipes in heat supply systems. *Energoberezhenie* [Energy Saving], 2004, no. 6, pp. 58–64 (in Russian).

10. Rabeckii M. I. *Vapordynamic thermosyphons*. Minsk, 1988. 35 p. (in Russian).

Информация об авторах

Кузьмич Максим Александрович – аспирант, младший научный сотрудник, Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси (ул. П. Бровки, 15, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: KuzmichMA@hmti.ac.by

Журавлёв Александр Сергеевич – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси (ул. П. Бровки, 15, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: zhuravl@hmti.ac.by

Хуухэнхуу Бямбаагийн – кандидат технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Лаборатории атомной спектроскопии, Институт физики и технологии Монгольской академии наук (пр. Мира, 54Б, 13330, Улан-Батор, Монголия). E-mail: hunstech@yahoo.co.uk

Information about authors

Maksim A. Kuzmich – Postgraduate Student, Junior Researcher, A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus (15, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: KuzmichMA@hmti.ac.by

Alexander S. Zhuravlyov – Ph. D. (Engineering), Leading Researcher, A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus (15, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: zhuravl@hmti.ac.by

Byambaa Khuukhenkhuu – Ph. D. (Engineering), Professor, Leading Researcher of the Atomic Spectroscopy Laboratory, Institute of Physics & Technology of the Mongolian Academy of Sciences (54B, Peace Ave., 13330, Ulan Bator, Mongolia). E-mail: hunstech@yahoo.co.uk

А. С. Мельников, Б. И. Попов*Объединенный институт энергетических и ядерных исследований – Сосны Национальной академии наук
Беларуси, Минск, Беларусь***АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРАФИКА ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ
ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ**

Аннотация. Разработан метод восстановления графика продолжительности электрической нагрузки как главной прогнозной информации о спросе электрической энергии, используемой в долгосрочных оптимизационных исследованиях энергосистем. Основная особенность предложенного метода заключается в непосредственном использовании в алгоритме основных коэффициентов, характеризующих данную форму выражения спроса энергии, а также ряд фиксированных точек на искомом графике, которые характерны для конкретной изучаемой энергосистемы. Решение о выборе фиксированных точек делается при помощи ретроспективной исторической статистики о работе энергосистемы. Полученные с использованием данного метода аналитические полиномиальные выражения позволяют оперативно получать форму графика продолжительности нагрузки и как упростить процедуру ввода исходных данных о формах графиков в программах оптимизации, так и облегчить процесс их прогнозирования на длительные временные периоды. Точность метода была проверена путем сравнения с формами графиков прошлых лет, полученных из детальной почасовой электрической нагрузки энергосистемы Республики Беларусь. Было установлено, что величина погрешности на основной части графика не превосходит $\pm 1\%$ и несколько увеличивается на ее краях ($\pm 4-6\%$), что является достаточной точностью для проведения долгосрочного энергетического планирования.

Ключевые слова: график продолжительности нагрузки, полиномиальная зависимость, реперные точки, объемы электропотребления, коэффициент неравномерности, коэффициент заполнения

Для цитирования. Мельников, А. С. Аналитическое представление графика продолжительности электрической нагрузки для оптимизационных исследований / А. С. Мельников, Б. И. Попов // Вест. Нац. акад. Навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2017. – №4. – С. 63–67.

A. S. Melnikov, B. I. Popov*Joint Institute for Power and Nuclear Research – Sosny of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus***ANALYTICAL REPRESENTATION OF ELECTRICAL LOAD DURATION CURVE FOR OPTIMIZATION
RESEARCH**

Abstract. A method has been developed to restore the shape of the electrical load duration curve as the main predictive information on the demand for electric energy used in long-term and medium-term optimization studies of power systems. The main feature of the proposed method is the direct use in the algorithm of the basic coefficients characterizing the given form of the expression for energy demand, as well as a number of fixed points on the desired curve that are characteristic of the particular power system under study. The decision on the choice of fixed points is done with the help of retrospective historical statistics on the operation of the power system. The analytical polynomial expressions obtained using this method allow to quickly obtain the shape of the load duration curve and to simplify the procedure for entering the initial forms of curves in optimization programs, as well as to facilitate the process of predicting them for long time periods. The accuracy of the method was verified by comparison with the curves of past years obtained from the detailed hourly electrical load of the power system of the Republic of Belarus. It was found that the error value on the main part of the curve does not exceed $\pm 1\%$ and slightly increases at its edges ($\pm 4-6\%$), which is assumed to be sufficient accuracy for long-term energy planning.

Keywords: load duration curve, polynomial dependence, fixed points, volumes of power consumption, coefficient of unevenness, load factor

For citation. Melnikov A. S., Popov B. I. Analytical representation of electrical load duration curve for optimization research. *Vestsi Natsyonal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2017, no. 4, pp. 63–67 (in Russian).

Введение. График продолжительности электрической нагрузки является широко используемой зависимостью, которая применяется в задачах оценки спроса электрической энергии.

По методу построения она образуется путем суммирования продолжительностей каждой нагрузки в порядке убывания на выбранном временном интервале [1, 2]. График может строиться на любом характерном отрезке времени (месяц, год) как в абсолютном, так и в относительном виде. Данная зависимость используется главным образом для определения будущего оптимального состава и режимов работы разнородных энергоблоков единой энергосистемы, то есть для каждого источника позволяет оценить его оптимальный коэффициент использования установленной мощности. Данный коэффициент выражает отношение фактически выработанной энергии к потенциально максимальной энергии отдельного источника за определенный временной период и является важным технико-экономическим показателем эффективности его работы [3]. Кроме того, инвертированное представление графика продолжительности нагрузки позволяет находить не только ожидаемую выработанную энергию от каждого энергоисточника, но и оценивать вероятность потери нагрузки энергосистемы, то есть вероятность недопоставки электроэнергии, что используется, например, в концепции распространенной программы оптимизации энергосистем WASP-IV [4]. Указанные зависимости используются также в симуляционной программе оценки спроса MAED в качестве одной из форм выражения энергетического спроса с их последующим применением в программах оптимизации [5]. Информация о графике продолжительности электрической нагрузки использовалась и при оптимизации структуры энергосистемы Беларуси [6], однако без учета изменения его формы по годам исследуемого временного периода.

Сказанное подтверждает необходимость качественного прогнозирования графиков продолжительности электрической нагрузки для каждого года исследуемого горизонта планирования при проведении долгосрочных оптимизационных исследований. Задачу прогнозирования можно разбить на два этапа. На первом этапе необходимо восстановить форму графика для выбранного базового года исследования по имеющимся фактическим данным для его основных характеристик. Вторым этапом будет прогнозирование основных характеристик и построение графиков на выбранном временном горизонте. В настоящей работе решается первая из этих задач.

Алгоритм и результаты. Основными характеристиками, во многом определяющими форму графика продолжительности электрической нагрузки, являются коэффициент неравномерности и коэффициент заполнения. Исходя из принятых определений под коэффициентом неравномерности понимается отношение минимальной нагрузки к максимальной, а под коэффициентом заполнения – отношение средней нагрузки к максимальной.

Как показывает расчетный опыт, для восстановления формы графика продолжительности нагрузки в относительном виде достаточным является использование полинома 5-го порядка следующего вида:

$$y(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3 + b_4t^4 + b_5t^5, \quad (1)$$

где время t и нагрузка y выражаются в относительных единицах, нормированных на 1.

Для восстановления графика нагрузки, то есть для расчета коэффициентов b_0 – b_5 , достаточно составить и решить следующую систему линейных уравнений 5-го порядка для моментов времени t_1 – t_6 :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= b_0 + b_1t_1 + b_2t_1^2 + b_3t_1^3 + b_4t_1^4 + b_5t_1^5 \\ y_2(t) &= b_0 + b_1t_2 + b_2t_2^2 + b_3t_2^3 + b_4t_2^4 + b_5t_2^5 \\ y_3(t) &= b_0 + b_1t_3 + b_2t_3^2 + b_3t_3^3 + b_4t_3^4 + b_5t_3^5 \\ y_4(t) &= b_0 + b_1t_4 + b_2t_4^2 + b_3t_4^3 + b_4t_4^4 + b_5t_4^5 \\ y_5(t) &= b_0 + b_1t_5 + b_2t_5^2 + b_3t_5^3 + b_4t_5^4 + b_5t_5^5 \\ y_6(t) &= b_0 + b_1t_6 + b_2t_6^2 + b_3t_6^3 + b_4t_6^4 + b_5t_6^5. \end{aligned} \quad (2)$$

При составлении систем (2) целесообразно принять во внимание следующие обстоятельства: для одного из уравнений, например 1-го, рассмотреть момент времени $t = 0$ для этого момента $y_1(t) = 1$, что сразу определяет $b_0 = 1$;

для уравнения, например 5-го, рассмотреть момент времени $t = 1$;
 вместо 6-го уравнения можно использовать выражение для средней по интервалу нагрузки, которая в случае единичного интервала является интегралом полинома в интервале от 0 до 1. По смыслу эта величина представляет собой коэффициент заполнения графика нагрузки.

С учетом приведенных обстоятельств матрица коэффициентов новой системы уравнений для неизвестных b_1 – b_5 будет следующей:

$$T = \begin{pmatrix} t_2 & t_2^2 & t_2^3 & t_2^4 & t_2^5 \\ t_3 & t_3^2 & t_3^3 & t_3^4 & t_3^5 \\ t_4 & t_4^2 & t_4^3 & t_4^4 & t_4^5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,5 & 1/3 & 0,25 & 0,2 & 1/6 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где элементы последней строки получаются как $\int_0^1 t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

Столбец свободных членов будет выглядеть следующим образом:

$$Y = \begin{pmatrix} y_2(t) - 1 \\ y_3(t) - 1 \\ y_4(t) - 1 \\ y_{\min}(t) - 1 \\ y_{\text{ср}}(t) - 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

В матрице-столбце (4) $y_{\min}(t)$ – минимальная нагрузка, которая также является важнейшей характеристикой графика продолжительности нагрузки; $y_{\text{ср}}(t)$ – упомянутая выше средняя нагрузка.

Коэффициенты b_1 – b_5 легко находятся по правилу Крамера решения системы линейных алгебраических уравнений

$$b_i = \frac{D_i}{D}, \tag{5}$$

где D – определитель матрицы T , а D_i – определитель, получаемый из D заменой i -го столбца на столбец свободных членов.

Таким образом, для вычисления коэффициентов b_1 – b_5 необходимо задать значения нагрузки в четырех точках временного интервала, одна из которых соответствует минимальному значению нагрузки при $t = 1$, и коэффициент заполнения графика нагрузки, который представляет собой отношение средней по интервалу времени нагрузки к максимальной.

Полученные значения коэффициентов b_1 – b_5 гарантируют совпадение полученной аппроксимации с фактической нагрузкой лишь в реперных точках, выбранных для восстановления графика. Поэтому необходима апробация для выяснения возможности использования предложенного алгоритма для остальных точек графика.

На рис. 1 показаны фактический график продолжительности электрической нагрузки 2014 г. и восстановленная его форма по предлагаемому методу. Значение t в полиномиальной модели, также показанной на диаграмме, должно быть выражено в относительных единицах. Для построения модели были выбраны следующие временные реперные точки в относительных единицах: $t = 0,1; 0,2; 0,9; 1,0$ с соответствующими величинами нагрузки также в относительных единицах 0,860; 0,803; 0,551; 0,455. Коэффициент заполнения равнялся 0,701.

Точность аппроксимации графика, восстановленного моделью, видна из кривой ошибок, показанной на рис. 2.

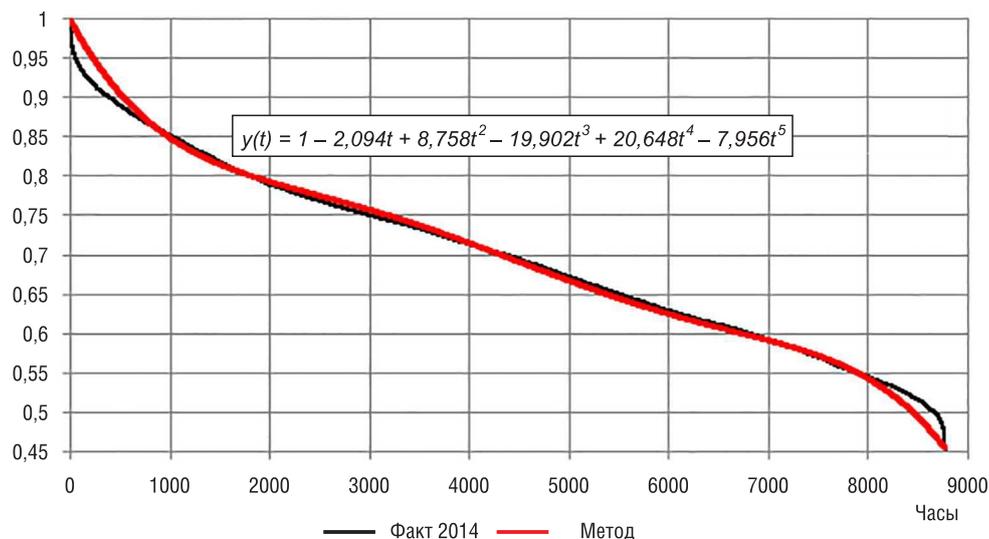


Рис. 1. Восстановленный график продолжительности нагрузки

Fig. 1. Restored load duration curve

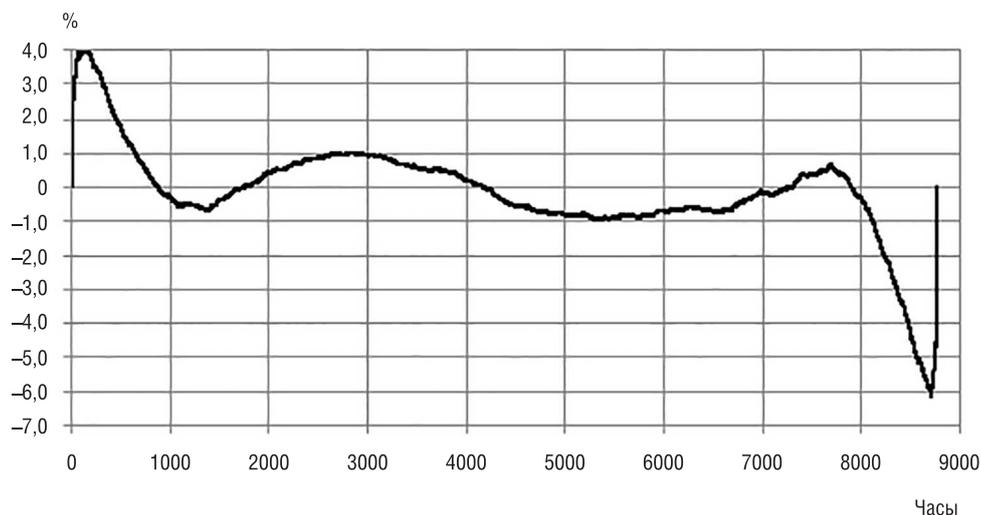


Рис. 2. Относительная ошибка восстановления графика продолжительности нагрузки по модели

Fig. 2. Relative error of the load duration curve restoring by the model

Как видно из рис. 2, на основной части временного периода ошибка представления графика не превосходит $\pm 1\%$ и лишь на краях периода несколько увеличивается, достигая в максимуме $\pm 4\text{--}6\%$. Такая точность восстановления графика продолжительности нагрузки, учитывая гарантированное точное восстановление основных характеристик зависимости, является вполне достаточной для целей энергетического планирования. При необходимости точность может быть увеличена разбиением временной шкалы на участки и применением настоящего метода на каждом из них. Следует только отметить необходимость корректного выбора реперных точек, используемых для построения модели. Точки должны выбираться так, чтобы как минимум выполнялось условие строгого убывания значений функции в зависимости от времени. Опыт восстановления графиков продолжительности нагрузки белорусской энергосистемы для ряда лет показал, что приемлемыми значениями двух реперных точек являются значения около 10% от начала и конца временного периода.

Заключение. Предложен метод восстановления графика продолжительности электрической нагрузки энергосистемы с помощью полиномиальной зависимости. Он позволяет сохранить основные характеристики – коэффициенты заполнения и неравномерности графиков продолжи-

тельности электрической нагрузки. В применении к белорусской энергосистеме на 90 % годового временного периода ошибка представления графика не превосходит $\pm 1\%$ и лишь на краях периода несколько увеличивается, достигая в максимуме $\pm 4\text{--}6\%$. Метод подходит для прогнозирования графиков продолжительности электрических нагрузок с использованием трендов изменений их основных характеристик.

Список использованных источников

1. Рыжкин, В. Я. Тепловые электрические станции / В. Я. Рыжкин. – М.: Энергия, 1976. – 327 с.
2. Маргулова, Т. Х. Атомные электрические станции / Т. Х. Маргулова. – М.: ИздАТ, 1994. – 289 с.
3. Гинзбург-Шик, Л. Д. Тепловые электрические станции и их технологическое оборудование / Л. Д. Гинзбург-Шик. – М.: Энергия, 1967. – 403 с.
4. Wien Automatic System Planning Package (WASP). A computer code for power generating system expansion planning. Version WASP-IV. User Manual [Electronic resource]. – Vienna: International Atomic Energy Agency, 2001. – Mode of access: <http://www-pub.iaea.org/MTCD/publications/PDF/CMS-16.pdf> – Data of access: 05.07.2017.
5. Model for Analysis of the Energy Demand (MAED). User's Manual for Version MAED-1, IAEA-TECDOC-386 [Electronic resource]. – Vienna: International Atomic Energy Agency, 1986. – Mode of access: http://www.iaea.org/inis/collection/NCLCollectionStore/_Public/18/037/18037998.pdf – Data of access: 05.07.2017.
6. Якушев, А. П. Оптимизация ввода ядерной энергетики в топливно-энергетический комплекс Беларуси / А. П. Якушев, Б. И. Попов // Энергетика и ТЭК. – 2009. – №9 (78). – С. 14–22.

References

1. Ryzhkin V. Ya. *Thermal power plants*. Moscow, Energiya Publ., 1976. 327 p. (in Russian).
2. Margulova T. H. *Nuclear power plants*. Moscow, IzdAT Publ., 1994. 289 p. (in Russian).
3. Ginzburg-Shik L. D. *Thermal power plants and their technological equipment*, Moscow, Energiya Publ., 1967. 403 p. (in Russian).
4. *Wien Automatic System Planning Package (WASP). A computer code for power generating system expansion planning. Version WASP-IV. User Manual*. Vienna, International Atomic Energy Agency, 2001. Available: <http://www-pub.iaea.org/MTCD/publications/PDF/CMS-16.pdf> (Accessed 5 July 2017).
5. *Model for Analysis of the Energy Demand (MAED). User's Manual for Version MAED-1, IAEA-TECDOC-386*. Vienna, International Atomic Energy Agency, 1986. Available: http://www.iaea.org/inis/collection/NCLCollectionStore/_Public/18/037/18037998.pdf (Accessed 5 July 2017).
6. Yakushev A. P., Popov B. I. Optimization of the introduction of nuclear power in the fuel and energy complex of Belarus. *Energetika i TEK* [Energy and Fuel and Energy Complex], 2009, no. 9, pp. 14–22 (in Russian).

Информация об авторах

Мельников Алексей Сергеевич – аспирант, младший научный сотрудник, Объединенный институт энергетических и ядерных исследований – Сосны Национальной академии наук Беларуси (а/я 119, 220109, Минск, Республика Беларусь). E-mail: melnikov1991@bk.ru

Попов Борис Игоревич – кандидат технических наук, заведующий лабораторией, Объединенный институт энергетических и ядерных исследований – Сосны Национальной академии наук Беларуси (а/я 119, 220109, Минск, Республика Беларусь). E-mail: bipopovby@gmail.com

Information about the authors

Alexey S. Melnikov – Postgraduate Student, Junior Researcher, Joint Institute for Power and Nuclear Research – Sosny of the National Academy of Science of Belarus (p. o. box 119, 220109, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: melnikov1991@bk.ru

Boris I. Popov – Ph. D.(Engineering), Head of the Laboratory, Joint Institute for Power and Nuclear Research – Sosny of the National Academy of Science of Belarus (p. o. box 119, 220109, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: bipopovby@gmail.com

РАДИОЭЛЕКТРОНИКА И ПРИБОРОСТРОЕНИЕ
RADIOELECTRONICS AND INSTRUMENT-MAKING

УДК 621.396.26

Поступила в редакцию 14.09.2017
Received 14.09.2017

С. М. Костромицкий, Э. И. Шамович

Центр радиотехники Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

**ИССЛЕДОВАНИЕ СПОСОБОВ ПОСТАНОВКИ ПОМЕХ ПРИЕМНИКАМ СИСТЕМ
ГЛОБАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ, УСТОЙЧИВЫХ К ПОДАВЛЕНИЮ СРЕДСТВАМИ
КОГЕРЕНТНОЙ АВТОКОМПЕНСАЦИИ**

Аннотация. Активные помехи приемникам систем глобальной навигации – СГН (GPS, Галилео, ГЛОНАСС, Бейдоу) приобретают все большее значение в задачах обеспечения безопасности, управления и контроля. С использованием СГН несложно организуются разнообразные задачи: транспортные, организации охраны мобильных объектов или лиц, контроля трафика и др. Организация постановки эффективных помех, блокирующих нормальную навигацию, является важной научной и прикладной задачей. Постановка помех СГН, хотя и подпадает под формальные международные ограничения, тем не менее является обязательной военно-технической составляющей обеспечения обороноспособности любого развитого государства.

Опыты последних лет свидетельствуют о быстром развитии техники постановки активных помех СГН и борьбы с ними. Эффективное применение активных помех пользователям СГН заставило производителей вооружений всерьез заняться усилением помехоустойчивости СГН современными методами. Несмотря на определенные ограничительные условия по этому свойству систем (большие дальности до спутников, ограничения на мощность излучаемых ими информационных сигналов, слабая направленность их передающих антенн) в странах-владельцах СГН опубликовано много информации о достижении резкого усиления их помехоустойчивости, что вызывает определенные сомнения в объективности данных.

В статье представлены результаты научного анализа и моделирования эффективности постановки помех потребителям информации СГН с приемниками, оснащенными корреляционными автокомпенсаторами активных помех (АК). Приведены доказательства снижения эффективности подавления помех, основанные на использовании принципиально параметрических свойств АК.

Ключевые слова: системы глобальной навигации, помехи, компенсаторы активных помех, эффективность когерентного подавления помех

Для цитирования. Костромицкий, С. М. Исследование способов постановки помех приемникам систем глобальной навигации, устойчивых к подавлению средствами когерентной автокомпенсации / С. М. Костромицкий, Э. И. Шамович // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. – 2017. – №4. – С. 68–79.

S. M. Kostromitsky, E. I. Shamovich

Radio Engineering Center of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

**RESEARCHING THE GNSS RECEIVER JAMMERS THAT ARE RESISTANT TO SUPPRESSION THROUGH
EMPLOYMENT OF COHERENT AUTOMATIC JAMMING CANCELERS**

Abstract. Active jamming of a global navigation system GNSS receiver (GPS, Galileo, GLONASS, BeiDou) is of growing significance for the missions of security, control and monitoring. GNSS facilitates organization of various tasks: transportation, protecting mobile facilities or persons, traffic control, and a lot of others. Organizing generation of effective jamming denying normal navigation represents an important applied problem. Jamming GNSS, even though formally subject to international restrictions, is nevertheless a mandatory military technical component of ensuring the defensive capability of any developed state.

The experience of recent years testifies to fast development of the equipment generating jamming against GNSS, and the technologies of counteracting jamming. Effective employment of jamming against GNSS users made the arms manufacturers seriously tackle the problem of improving jamming immunity of GNSS through modern techniques. Given the certain narrow limits for this characteristic of a system (long distances to satellites, limitations imposed on the power of information signals emitted by them, feeble directivity of their transmitting antennas), the countries possessing GNSS have published a plethora of information related to having achieved a dramatic improvement of their antijamming capacity giving rise to certain doubt in objectivity of the data.

The article presents the results of scientific analysis and modeling of effectiveness of jamming against users of GNSS information with the receivers outfitted with correlative automatic jamming cancellers (AJC). Proof is provided of corrupting effectiveness of jamming cancellation, based on use of essentially parametric properties of the AJCs.

Keywords: global navigation systems, jamming, jamming cancellers, effectiveness of coherent jamming cancellation

For citation. Kostromitsky S. M., Shamovich E. I. Researching the GNSS receiver jammers that are resistant to suppression through employment of coherent automatic jamming cancelers. *Vesti Natsyyanal'nai akademii nauk Belarusi. Seriya fizika-technichnykh nauk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2017, no. 4, pp. 68–79 (in Russian).

Введение. Системы глобальной навигации (СГН) играют весьма важную роль во множестве современных прикладных задач: например, управление движением разнообразных объектов – автомобилей, судов, летательных аппаратов, людей и т. д. Стремительно расширяется сфера применения указанных систем. Вопреки анонсированным и закрепленным международными договорами целям и задачам стремительно расширяется их применение в военном деле. Предельно просто и дешево с помощью СГН решаются задачи навигации самолетов, ракет, беспилотных летательных аппаратов (БПЛА), танков, боевых подразделений, солдат и т. д.

СГН стали мощным подспорьем в организации и ведении боевых действий. Именно поэтому в последние годы активно развиваются средства дистанционного блокирования аппаратуры пользователей СГН с использованием активных помех.

Известно, что одним из простейших способов блокирования указанных систем, который нашел широкое практическое применение, является их подавление активными помехами. Поэтому после 2003 г. профильные специалисты предприняли значительные усилия по преодолению проблемы влияния активных помех на эффективность пользовательской аппаратуры. Среди разработанных мер можно отметить изменение закона модуляции изучаемых сигналов спутников, введение дополнительных частотных каналов для их передачи, применение когерентных автокомпенсаторов (АК) на пользовательских приемниках и т. д. [4–7].

При этом очевидными оставались: принципиальная подверженность работы приемников сигналов СГН активным помехам даже небольшой интенсивности; ограниченность свободы действий разработчиков по повышению помехозащищенности тем, что созвездия, по крайней мере GPS и ГЛОНАСС, к тому времени практически сформировались, поэтому отсутствовала возможность изменения состава и параметров бортовой аппаратуры спутников, в списке возможностей были лишь применение резервной аппаратуры и корректировка программного обеспечения с использованием дистанционного управления.

Наиболее эффективной допустимой мерой по защите пользовательской аппаратуры оказались АК. Разработчики этой аппаратуры после нескольких эффективных применений помех немедленно отреагировали выпуском комплексных антенн GPS, состоящих из антенны основного приемного канала и от 4 до 7 дополнительных антенн для АК.

Появились публикации, доказывающие, что АК – решение, обеспечивающее в широком диапазоне условий достаточную помехозащиту, которую трудно или практически невозможно преодолеть (например, [1]).

Анализ переходных процессов многоканального корреляционного АК. В настоящей статье рассматриваются некоторые способы снижения эффективности помехозащиты приемников сигналов СГН с АК до состояния, при котором помеха сохраняет свою эффективность и обеспечивает лишение потребителя СГН качественной информации.

На рис. 1 представлена схема корреляционного АК помех. Сигнал на выходе АК описывается

выражением $S_{\Sigma} = S_0(t) + \sum_{i=1}^N S_i(t)w_i$.

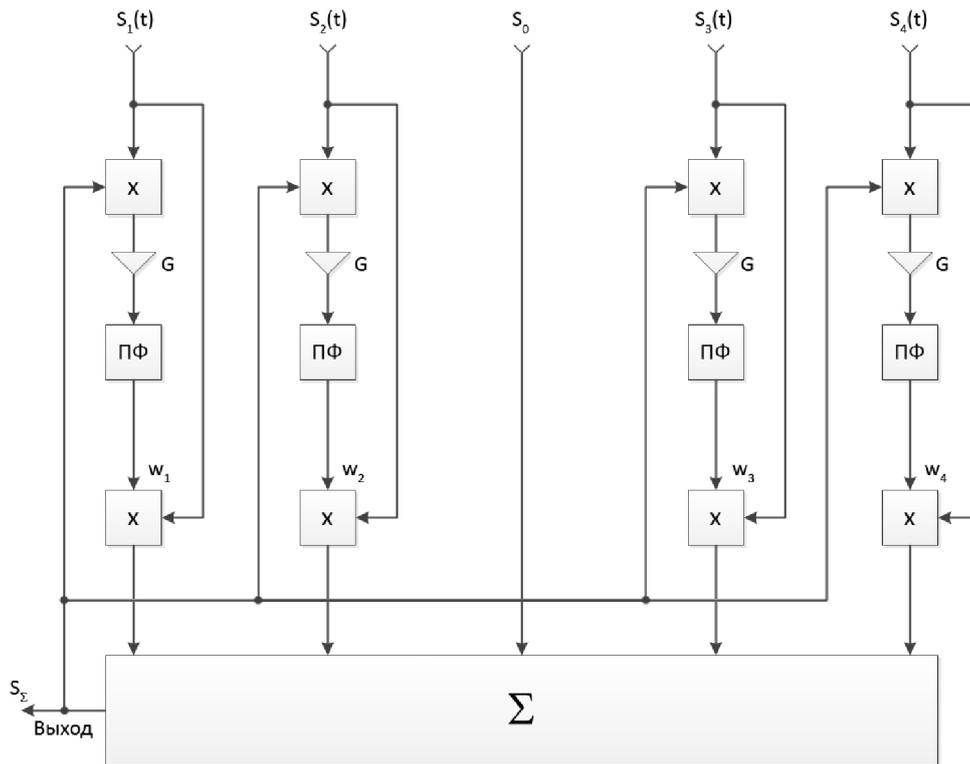


Рис. 1. Структурная схема корреляционного автокомпенсатора помех: ПФ – полосовой фильтр; G – усилитель с коэффициентом усиления G (учитывает в том числе все коэффициенты преобразования смесителей и ПФ); X – перемножитель

Fig. 1. Correlative automatic jamming canceller block diagram: ПФ – band-pass filter; G – amplifier with gain factor G (takes into account all conversion factors of mixers and band-pass filters); X – multiplier

Форма амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) полосового фильтра не имеет критического значения: при аналоговой реализации АК на радиочастоте она имеет вид АЧХ резонансного контура с квадратом АЧХ

$$|K_{\text{пф}}(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega - \omega_{\text{ф}})^2 T_{\text{ф}}^2}, \quad (1)$$

где $\omega_{\text{ф}}$ и $T_{\text{ф}}$ – соответственно частота настройки и постоянная времени резонансного контура, при реализации на видеочастоте она имеет вид АЧХ апериодического звена (1) с $\omega_{\text{ф}} = 0$.

При цифровой реализации полосовых фильтров (ПФ) в таких задачах особенности обычно не возникают. В предположении идентичности коэффициентов усиления каналов G_k , можно записать дифференциальное уравнение, отражающее динамику комплексных весовых коэффициентов \dot{w}_k , в виде

$$T_{\text{ф}} \frac{d\dot{w}_k(t)}{dt} + \dot{w}_k(t) = -G\dot{S}_k^*(t) \cdot \left[\sum_{i=1}^N \dot{w}_i(t)\dot{S}_i(t) + \dot{S}_0(t) \right], \quad k = \overline{1, N}$$

или в матричной форме

$$T_{\text{ф}} \frac{d\dot{\mathbf{W}}(t)}{dt} + \dot{\mathbf{W}}(t) = -G\dot{\mathbf{S}}^*(t)\dot{\mathbf{W}}^T(t)\dot{\mathbf{S}}(t) - G\dot{\mathbf{S}}^*(t)\dot{S}_0(t), \quad (2)$$

где $\dot{\mathbf{W}}(t) = \{\dot{w}_1(t), \dot{w}_2(t), \dots, \dot{w}_N(t)\}^T$ – вектор-столбец весовых коэффициентов; $\dot{\mathbf{S}}(t) = \{\dot{S}_1(t), \dot{S}_2(t), \dots, \dot{S}_N(t)\}^T$ – вектор-столбец сигналов дополнительных приемных каналов; $\dot{S}_0(t)$ – сигнал основного канала АК.

Первое слагаемое в правой части (2) перепишем в виде $-G\dot{\mathbf{S}}^*(t)\dot{\mathbf{W}}^T(t)\dot{\mathbf{S}}(t) = -G\dot{\mathbf{S}}^*(t)\dot{\mathbf{S}}^T(t)\dot{\mathbf{W}}(t)$ и примем во внимание, что математическое ожидание произведений $\dot{\mathbf{S}}^*(t)\dot{\mathbf{S}}^T(t)$ и $\dot{\mathbf{S}}^*(t)\dot{S}_0(t)$ – это кор-

реляционная матрица сигналов дополнительных каналов АК и вектор взаимных корреляционных сигналов основного и дополнительных каналов $\dot{\mathbf{R}}_0 = \{\dot{S}_1^*(t)\dot{S}_0(t), \dot{S}_2^*(t)\dot{S}_0(t), \dots, \dot{S}_N^*(t)\dot{S}_0(t)\}$. Здесь на основании предположения о стационарности входных сигналов $\dot{S}_i(t)$ статистическое усреднение заменено временным.

Тогда (2) принимает вид

$$T_\Phi \frac{d\dot{\mathbf{W}}}{dt} + \dot{\mathbf{W}} = -G\dot{\mathbf{R}}_0 - G\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{W}}$$

или

$$T_\Phi \frac{d\dot{\mathbf{W}}}{dt} + \dot{\mathbf{W}}(\mathbf{E} + G\dot{\mathbf{R}}) = -G\dot{\mathbf{R}}_0, \tag{3}$$

где \mathbf{E} – единичная матрица. Из уравнения (3) следует, что при $t \rightarrow \infty$ и завершении переходных процессов установившееся значение $\dot{\mathbf{W}}_{уст} = -(\mathbf{E} + G\dot{\mathbf{R}})^{-1}G\dot{\mathbf{R}}_0 = -\left(\frac{\mathbf{E}}{G} + \dot{\mathbf{R}}\right)^{-1} \dot{\mathbf{R}}_0$.

При этом очевидно, что наличие единичной матрицы в последней форме отражает лишь статический характер ПФ. При использовании астатических ПФ $\dot{\mathbf{W}}_{уст} = -\dot{\mathbf{R}}^{-1}\dot{\mathbf{R}}_0$.

Для практических задач первоочередное значение имеет сходимость процесса самонастройки АК, его быстродействие и эффективность подавления помех. Оценка этих свойств возможна на основании решения системы дифференциальных уравнений (3).

Решение (3) осложняется взаимосвязью ее уравнений через недиагональную корреляционную матрицу $\dot{\mathbf{R}}$. Формирование общих представлений о поведении интересующих нас параметров возможно в результате диагонализации $\dot{\mathbf{R}}$.

Перевод матрицы $\dot{\mathbf{R}}$ к диагональному виду осуществляется с переходом в ее собственное подпространство, орты которого формируются из ее собственных векторов [2].

Дифференциальное уравнение относительно весового вектора $\dot{\mathbf{W}}$ в собственном пространстве матрицы $\dot{\mathbf{R}}$ приобретает вид

$$T_\Phi \frac{d\dot{\mathbf{W}}'}{dt} + \dot{\mathbf{W}}'[\mathbf{E} + G\dot{\mathbf{R}}'] = -G\dot{\mathbf{R}}'_0. \tag{4}$$

Здесь $\dot{\mathbf{R}}'$ и $\dot{\mathbf{R}}'_0$ получены в результате статистической обработки не вектора $\dot{\mathbf{S}}$, а преобразованного вектора $\dot{\mathbf{S}}' = \dot{\mathbf{Q}}\dot{\mathbf{S}}$ ($\dot{\mathbf{Q}}$ – матрица собственных векторов матрицы $\dot{\mathbf{R}}$). Поэтому в (4) $\dot{\mathbf{R}}'$ является диагональной, а уравнения системы – независимыми.

Не вдаваясь в несущественные в этом изложении детали, запишем готовое решение (4) в скалярном виде [3]

$$\dot{w}'_k(t) = \left[\dot{w}'_k(0) - \dot{w}'_k(\infty) \right] e^{-\alpha_k t} + \dot{w}'_k(\infty), \tag{5}$$

где $\dot{w}'_k(\infty) = \frac{G\lambda_k}{1 + G\lambda_k} \dot{w}'_{k \text{ опт}}$ – установившееся значение k -го весового коэффициента АК в собственном подпространстве матрицы $\dot{\mathbf{R}}$; $\dot{w}'_{k \text{ опт}} = -\frac{\dot{R}'_{0k}}{\lambda_k}$; $\alpha_k = \frac{1 + G\lambda_k}{T_\Phi}$.

Из (5) видно, что завершение переходного процесса АК в целом происходит только после завершения переходного процесса в канале с минимальным собственным значением λ .

Очевидно, что каждый из N реальных переходных процессов (3) будет определяться весовой суммой из компонент (5), $k = \overline{1, N}$. Поэтому каждый из весовых коэффициентов \dot{w}'_k установится не ранее, чем самый «медленный» из \dot{w}'_k .

Известно, что след матрицы $\dot{\mathbf{R}}$: $Sp \dot{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^N \lambda_i = \sum_{i=1}^N (2\sigma_{\Pi i}^2 + 2\sigma_{\text{ш}i}^2)$ – определяется суммарной средней мощностью сигналов и внутренних шумов приемников дополнительных каналов АК. Здесь $2\sigma_{\Pi i}^2$ и $2\sigma_{\text{ш}i}^2$ соответственно средние мощности помехи, принимаемой i -м дополнительным каналом, и его внутреннего шума.

Используемый в теории матриц термин «обусловленность матрицы» (*conditioning*) может быть определен в рассматриваемых приложениях как отношение ее максимального значения к минимальному собственному: $Cond \mathbf{R} = \lambda_{\max} / \lambda_{\min}$.

В наших приложениях если число одновременно действующих источников излучения $M < N$, то минимальное собственное значение $\lambda_{\min} = 2\sigma_{\text{ш}}^2$ – средняя мощность внутреннего шума дополнительных каналов приема в предположении их равенства [3]. Значит, в пренебрежении мощностью внутренних шумов дополнительных каналов величина $\sum_{i=1}^N \lambda_i$ равна суммарной средней мощности сигналов дополнительных каналов АК, подлежащих подавлению.

Следует отметить, что каждое из собственных значений может варьировать в зависимости от: соотношения мощностей собственно подавляемых источников излучения; их относительно-го углового положения; взаимной корреляции их комплексных амплитуд и др.

Перечисленные факторы, изменяясь, могут влиять на обусловленность $Cond \mathbf{R}$, улучшая или ухудшая ее, уменьшая или увеличивая λ_{\min} , а значит, уменьшая или увеличивая α_k из (5).

Заманчивой представляется идея аналитического исследования распределения собственных значений λ_k в зависимости от перечисленных факторов, но это исследование при $N > 2$, как показывает практика, является громоздким, а при $N > 4$ в большинстве случаев нереализуемым. Кроме того, быстродействие АК фактически зависит не только от значений $Cond \mathbf{R}$, но и от начальных условий $\dot{w}_k(0)$. В (5) описан монотонно затухающий переходный процесс – фактически сильно упрощенная абстракция.

В реальности соотношение (3) описывает градиентный алгоритм поиска экстремума функционала качества (минимума дисперсии ошибки самонастройки, максимума отношения правдоподобия, максимума отношения сигнал/помеха и др. [3]), выбор которого не влияет на выводы настоящей статьи. При комплексном описании входных сигналов функционалы качества описываются сложными функциями, в общем случае $2N+1$ -мерного пространства, время достижения экстремума (то есть установившегося состояния) в которых сильно зависит не только от $Cond \mathbf{R}$, но и от начальных условий $\dot{w}_k(0)$.

Из изложенного следует вывод о том, что полезные результаты могут быть получены только с использованием имитационного моделирования поведения адаптивных процессов АК, представленного на рис. 1.

Объект исследования. С целью максимального приближения к практике (подавление помех GPS приемником с четырехканальным АК активных помех) исследованию подвергается АК со структурной схемой, представленной на рис. 1. Фото антенной системы и формы диаграмм направленности антенн основного и дополнительных каналов представлены на рис. 2 и 3 соответственно.

С целью исключения излишней детализации описания алгоритмов имитационного моделирования отметим, что моделирование осуществлялось в ходе решения системы (3), все сигналы,

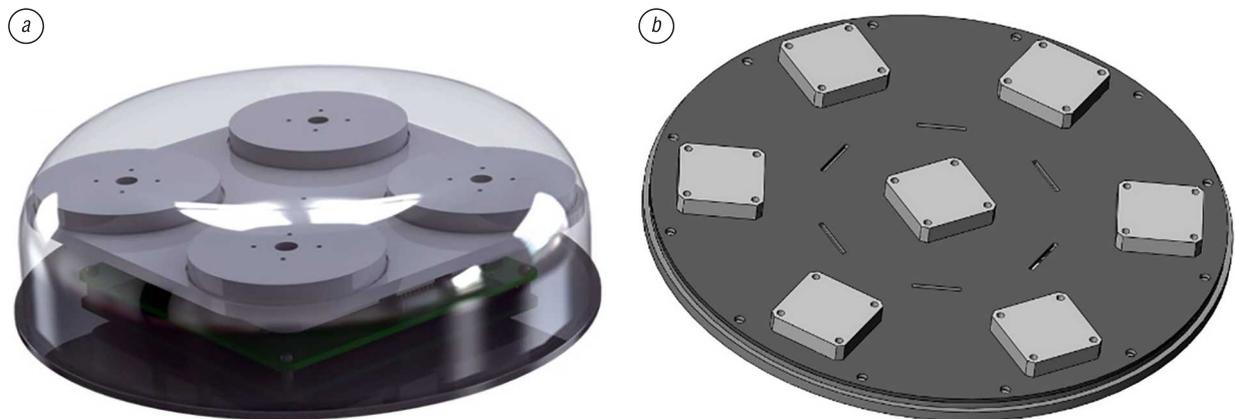


Рис. 2. Антенные системы GPS приемников с автокомпенсатором помех
Fig. 2. GPS receiver antenna systems with automatic jamming canceller

весовые коэффициенты и их описания – комплексные случайные процессы. Начальные условия задавались разнообразными для оценки их влияния на сходимость и время адаптации системы. В результате имитационного моделирования большого объема получены практически полезные результаты, описываемые далее в статье.

Результаты имитационного моделирования. Автокомпенсатор с двумя дополнительными каналами. Один источник помехи. Для простоты вначале проведем моделирование работы АК с двумя дополнительными каналами при наличии единственного источника помех. В условиях отсутствия мерцания АК успешно подавляет помеху, наряду с этим отношение помеха/внутренний шум приемных каналов составляет 30 дБ.

При этом исходные процессы комплексной самонастройки весовых коэффициентов \dot{w}_1 и \dot{w}_2 заканчиваются примерно одновременно по фазе и амплитуде за 10–20 мкс (рис. 4), усредненная по времени диаграмма направленности приемной антенны GPS с учетом АК изображена на рис. 5.

Эффективность подавления помехи составляет порядка $\nu_{\Pi} = 30$ дБ, что вполне соответствует ожиданиям и множеству известных практических выводов. При этом под эффективностью подавления помехи ν_{Π} мы понимаем отношение мощности помехи на выходе АК при его выключенном и включенном состояниях. Очевидно, что в условиях постановки единственной помехи допустимым способом снижения эффективности ν_{Π} является амплитудная модуляция помехи. При этом частота модуляции критична для максимизации ее эффективности и должна выбираться исходя из полосы пропускания замкнутого АК.

В наших экспериментах мы выбрали частоту амплитудной модуляции примерно 100 кГц и добились снижения ν_{Π} всего на 4–5 дБ. Казалось бы, резонансные замирания сигнала помехи должны обеспечивать большие потери в значениях ν_{Π} , но причина незначительности выигрыша становится понятной из следующих соображений. При поступлении мощной помехи полоса замкнутого АК быстро расширяется и быстродействие составляет десятки микросекунд. При ослаблении (выключении) помехи значение α_k в (5) падает примерно в тысячу раз и система становится вялой. Для «забывания» положения источника помехи требуется время, гораздо большее, чем на начальную настройку.

Добиться «забывания» мы можем с помощью более длительного отключения помехи. Но этот путь имеет ограниченные возможности: при слишком длительном отключении помехи она перестает выполнять свои функции – мешать местоопределению. Именно поэтому практический выигрыш в потере эффективности подавления столь невелик. Из изложенного вытекает целесообразность перехода к синхронной модуляции параметров помех, излучаемых из рассовмещенных в пространстве точек.

Таким образом, рассмотрена ситуация, в которой реализуется временная модуляция единственного «сигнального» собственного значения λ_k из выражения (5).

Автокомпенсатор с четырьмя дополнительными каналами. При задании трех непрерывных шумовых помех, действующих с различных угловых направлений при равных средних мощностях и отношении помеха/внутренний шум, используется антенна, изображенная на рис. 2, а.

При исследовании четырехканального АК было выполнено множество экспериментов, в ходе которых оценивались реализуемые коэффициенты подавления (К) при действии помех.

В первом варианте задавалась помеха с одного углового направления (с использованием временной модуляции). Эксперименты показали, что увеличение числа компенсационных каналов

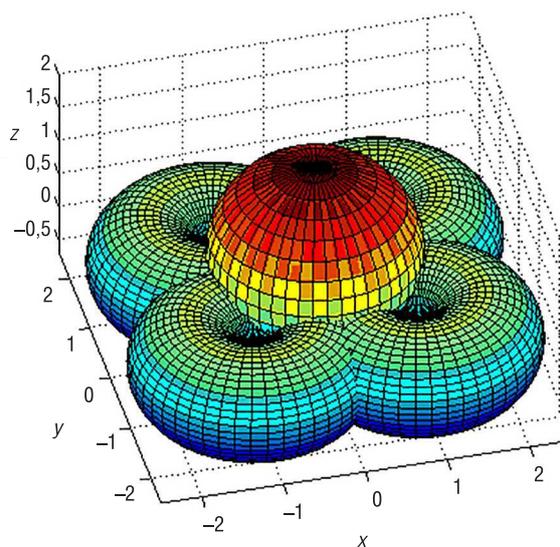


Рис. 3. Формы диаграмм направленности антенн основного и дополнительных каналов

Fig. 3. Shapes of antenna patterns of the main and additional channels

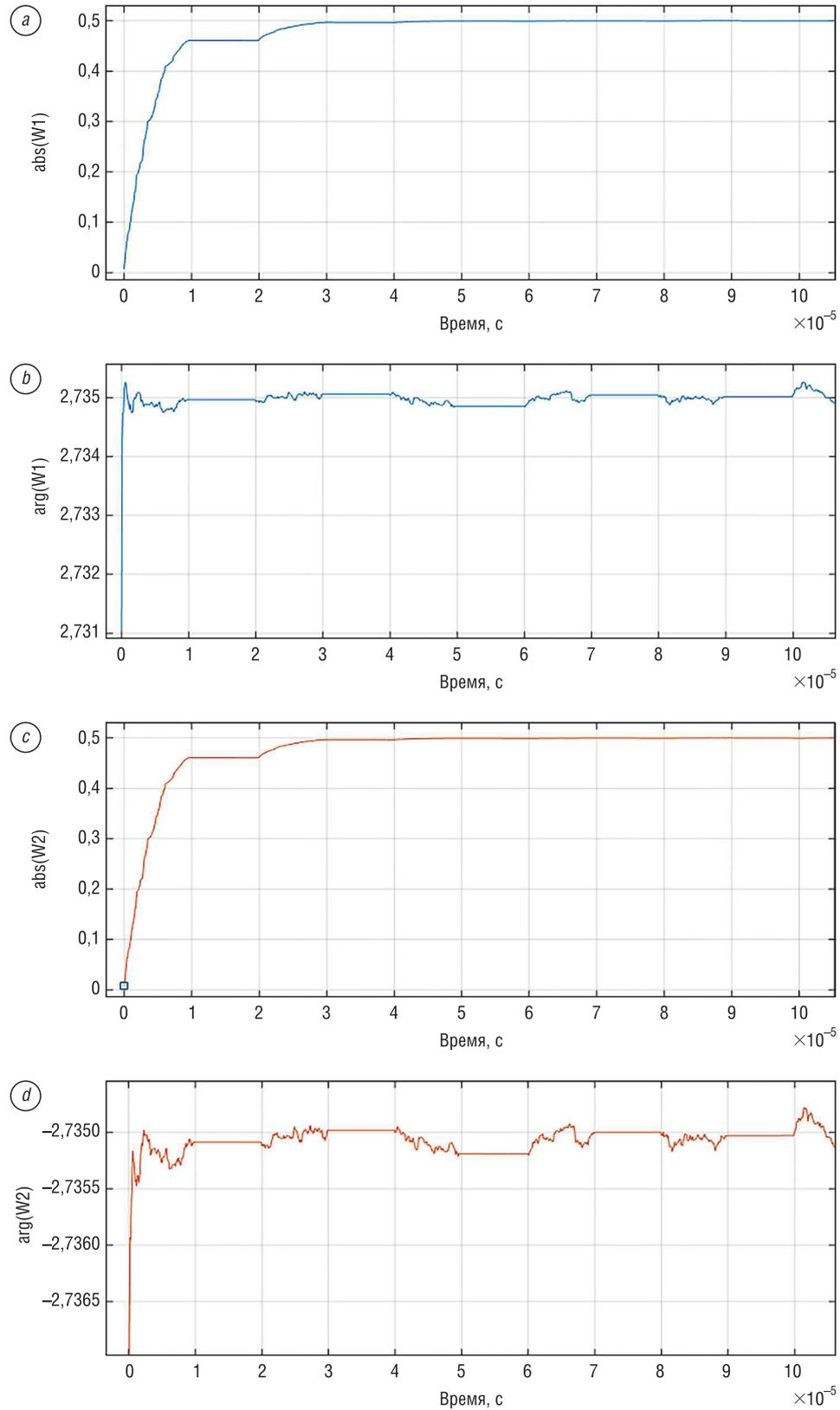


Рис. 4. Переходный процесс самонастройки весовых коэффициентов \dot{w}_1 и \dot{w}_2 : a – модуль \dot{w}_1 , b – аргумент \dot{w}_1 , c – модуль \dot{w}_2 , d – аргумент \dot{w}_2

Fig. 4. Transitional process of self-tuning of weighting coefficients \dot{w}_1 and \dot{w}_2 : a – modulus \dot{w}_1 , b – argument \dot{w}_1 , c – modulus \dot{w}_2 , d – argument \dot{w}_2

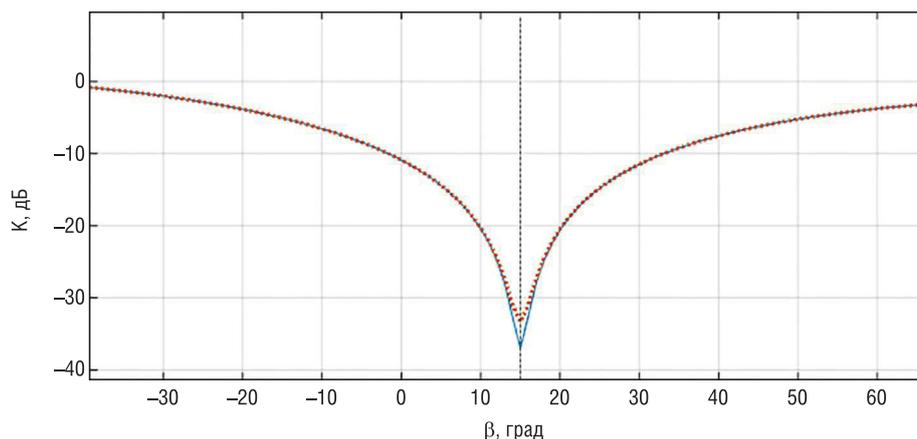


Рис. 5. Усредненная по времени диаграмма направленности приемной антенны GPS с учетом АК
 Fig. 5. Time-averaged receiving GPS antenna pattern taking into account JC

снижает эффективность применения мерцающей помехи: выигрыш в снижении коэффициента подавления помехи за счет оптимально подобранной частоты мерцаний снижается с 4–5 до 1–2 дБ.

Во втором варианте задавалось мерцание помех с частотой мерцания в 100 кГц, попеременно действующих с трех угловых направлений, что позволило снизить коэффициент подавления на 5–6 дБ по сравнению с подавлением немерцающей помехи, действующей с одного углового направления.

Рассмотрим показательный пример, доказывающий высокие потенциальные возможности, которыми обладает метод управления обусловленностью корреляционной матрицы $\dot{\mathbf{R}}$ совместно с применением мерцающих помех.

Для демонстрации роли $Cond \dot{\mathbf{R}}$ моделируются две ситуации.

В первой ситуации две попеременно включаемых с частотой 100 кГц группы источников помех равной мощности с разных азимутов и одинаковым углом места для всех в $\varepsilon = 0^\circ$:

- первая группа: $\beta_1 = -90^\circ, \beta_2 = 0^\circ, \beta_3 = 90^\circ$;
- вторая группа: $\beta_1 = -45^\circ, \beta_2 = 45^\circ, \beta_3 = 135^\circ$.

Отношение помеха/шум по всем источникам одинаково и составляет 36 дБ. На рис. 6 показаны переходные процессы самонастройки АК для примера первого весового коэффициента \dot{w}_1 по амплитуде и фазе (остальные, $\dot{w}_2-\dot{w}_4$ ведут себя сходным образом).

Из рис. 6 видно, что переходные процессы заканчиваются примерно за 100 мкс, причем процессы настройки фазы завершаются гораздо быстрее за счет малых начальных амплитуд \dot{w}_1 .

На рис. 7 показаны реализуемые усредненные за 50 мс азимутальные диаграммы направленности для указанных двух групп источников – при отсутствии мерцания (действует только одна группа – сплошная линия) и при попеременном включении-выключении с частотой 100 кГц (пунктирная линия).

Из рис. 7 видно, что применение описанного способа мерцания приводит к существенному снижению коэффициента подавления АК на 15–20 дБ по сравнению с потенциалом.

Во второй ситуации две попеременно включаемых с частотой 100 кГц группы из трех источников помех в условиях первой ситуации, но с азимутами:

- первая группа: $\beta_1 = -30^\circ, \beta_2 = 0^\circ, \beta_3 = 30^\circ$;
- вторая группа: $\beta_1 = -15^\circ, \beta_2 = 15^\circ, \beta_3 = 45^\circ$.

В условиях этого примера обусловленность матрицы $Cond \dot{\mathbf{R}}$ заметно ухудшена, что привело к значительному увеличению длительности процесса самонастройки, которая составила около 15 мс (рис. 8). Поэтому для второй ситуации частота мерцаний была снижена до 1 кГц (рис. 9). При этом выигрыш в снижении коэффициентов подавления помехи не столь велики (рис. 10), как в предыдущем примере, впрочем, с ухудшением $Cond \dot{\mathbf{R}}$ снизились и сами потенциальные коэффициенты.

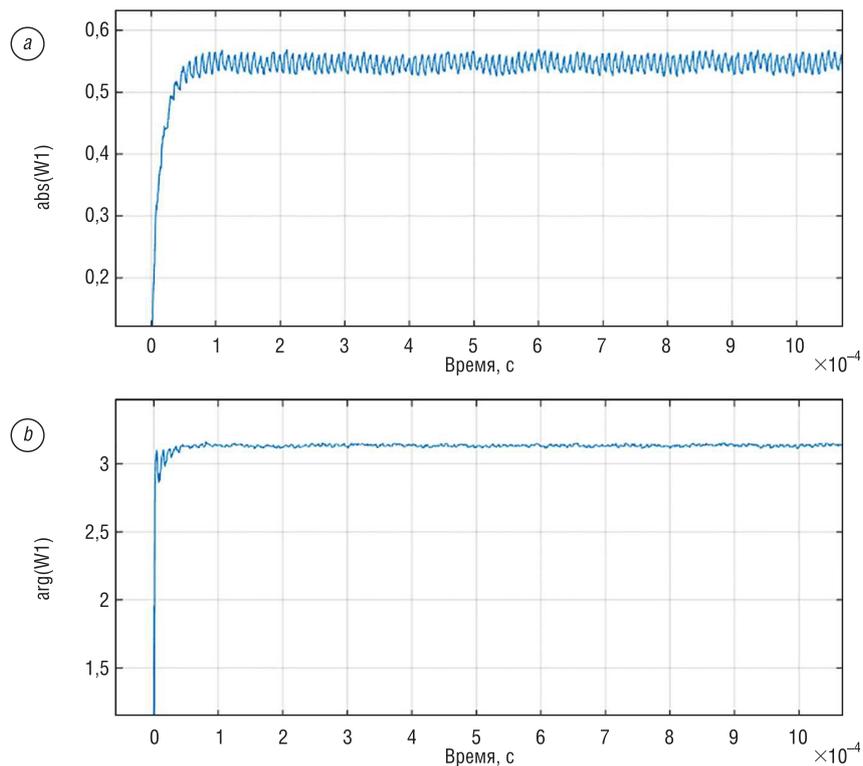


Рис. 6. Переходный процесс самонастройки весового коэффициента \dot{w}_1 : a – модуль \dot{w}_1 , b – аргумент \dot{w}_1
 Fig. 6. Transitional process of self-tuning of weighting coefficient \dot{w}_1 : a – modulus \dot{w}_1 , b – argument \dot{w}_1

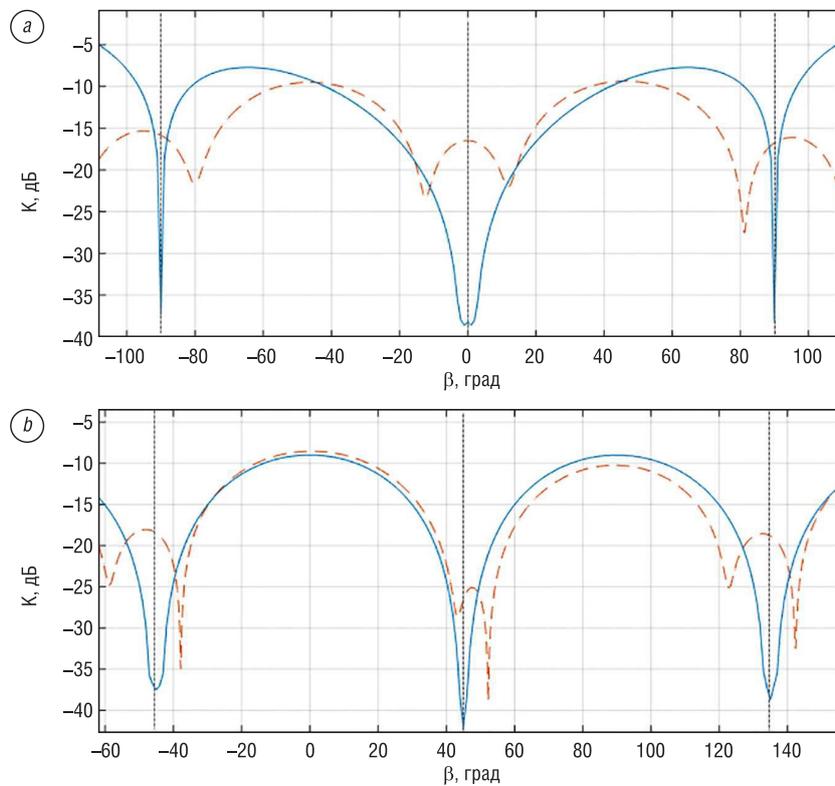


Рис. 7. Усредненная по времени диаграмма направленности приемной антенны GPS с учетом АК: a – $\beta_1 = -90^\circ$, $\beta_2 = 0^\circ$, $\beta_3 = 90^\circ$; b – $\beta_1 = -45^\circ$, $\beta_2 = 45^\circ$, $\beta_3 = 135^\circ$
 Fig. 7. Time-averaged receiving GPS antenna pattern taking into account JC: a – $\beta_1 = -90^\circ$, $\beta_2 = 0^\circ$, $\beta_3 = 90^\circ$; b – $\beta_1 = -45^\circ$, $\beta_2 = 45^\circ$, $\beta_3 = 135^\circ$

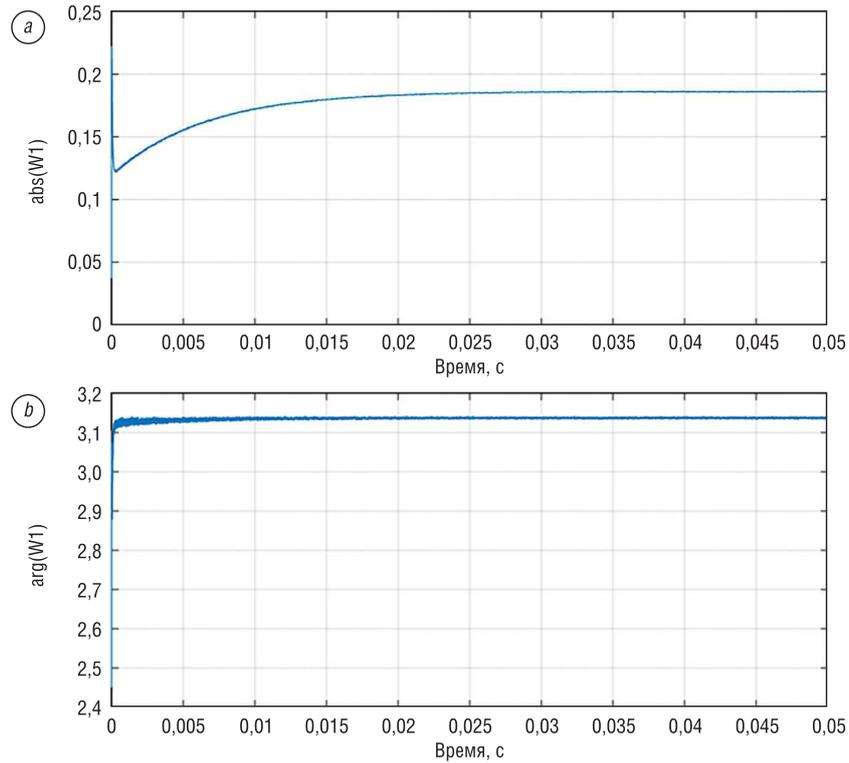


Рис. 8. Переходный процесс самонастройки весового коэффициента \dot{w}_1 (частота мерцаний 100 кГц): a – модуль \dot{w}_1 , b – аргумент \dot{w}_1

Fig. 8. Transitional process of self-tuning of weighting coefficient \dot{w}_1 (blink rate 100 kHz): a – modulus \dot{w}_1 , b – argument \dot{w}_1

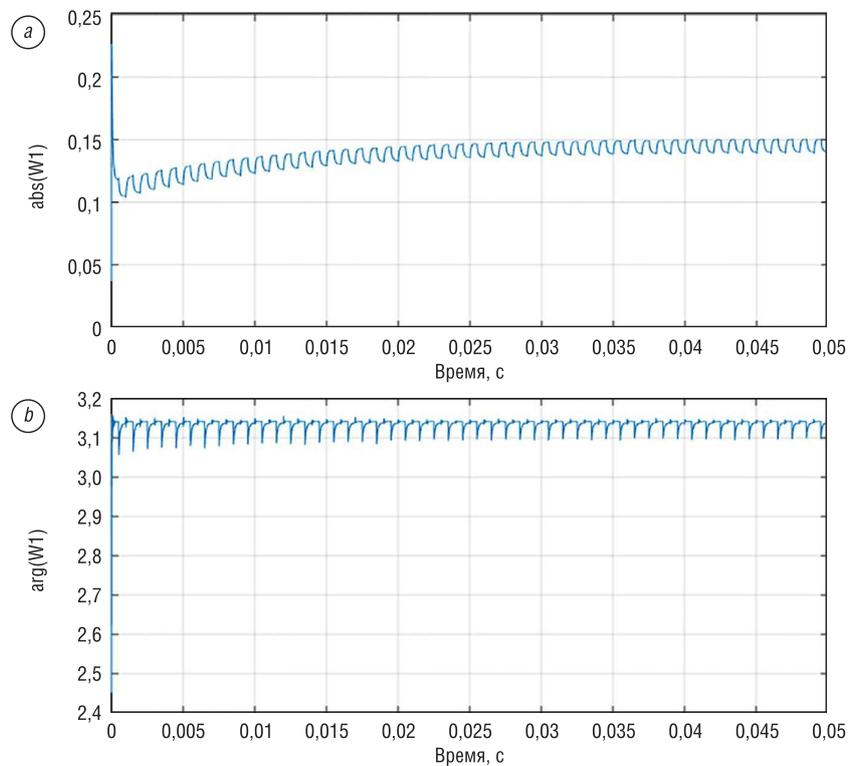


Рис. 9. Переходный процесс самонастройки весового коэффициента \dot{w}_1 (частота мерцаний 1 кГц): a – модуль \dot{w}_1 , b – аргумент \dot{w}_1

Fig. 9. Transitional process of self-tuning of weighting coefficient \dot{w}_1 (blink rate 1 kHz): a – modulus \dot{w}_1 , b – argument \dot{w}_1

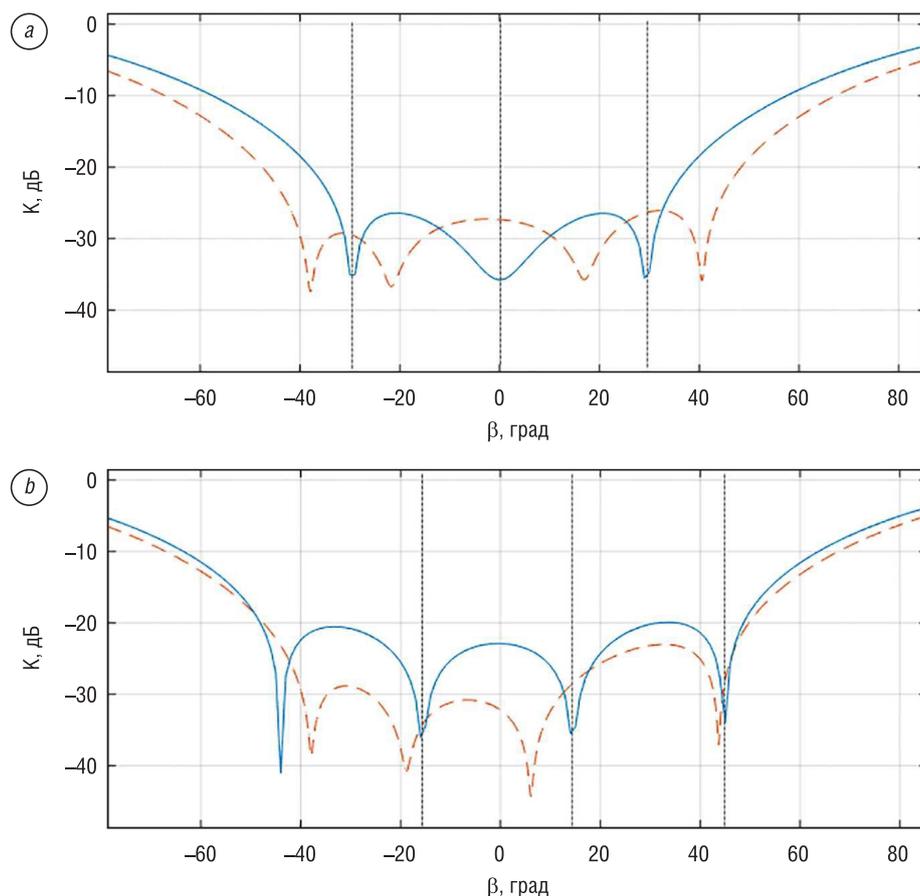


Рис. 10. Усредненная по времени диаграмма направленности приемной антенны GPS с учетом АК: $a - \beta_1 = -30^\circ$, $\beta_2 = 0^\circ$, $\beta_3 = 30^\circ$; $b - \beta_1 = -15^\circ$, $\beta_2 = 15^\circ$, $\beta_3 = 45^\circ$

Fig. 10. Time-averaged receiving GPS antenna pattern taking into account JC: $a - \beta_1 = -30^\circ$, $\beta_2 = 0^\circ$, $\beta_3 = 30^\circ$; $b - \beta_1 = -15^\circ$, $\beta_2 = 15^\circ$, $\beta_3 = 45^\circ$

Заключение. Применение АК в устройствах защиты от активных помех пользовательских приемников СГН является на сегодня наиболее эффективным способом. При этом появляющаяся в публикациях информация о коэффициентах подавления помех АК в 45–50 дБ и более на практике является преувеличением.

Стабилизация параметрических свойств АК с использованием различных автоматических регулировок усиления не может затрагивать или снижать влияние обусловленности корреляционных матриц сигналов дополнительных каналов.

Следует отметить, что упомянутая обусловленность сильно зависит от угловых расстояний между источниками помех, их пространственной и временной корреляций.

Проведенные исследования показали, что применение синхронной пространственно-временной модуляции сигналов от группы распределенных в пространстве наземных передатчиков помех обеспечивает снижение коэффициентов подавления помех до 15–20 дБ и более от их потенциальных значений, что вполне достаточно для прекращения местоопределения пользователей СНГ на тактических дальностях.

Список использованных источников

1. Быстряков, С.Г. Особенности испытаний антенных компенсаторов помех помехоустойчивой навигационной аппаратуры потребителей ГЛОНАСС/GPS / С.Г. Быстряков, В.Н. Харисов // Новости навигации. – 2010. – № 3. – С. 14–19
2. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
3. Монзинго, Р.А. Адаптивные антенные решетки: введение в теорию / Р.А. Монзинго, Т.У. Миллер; пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1986. – 448 с., ил.

4. Anti-Jamming Techniques for GPS Receivers: AFRL-IF-RS-TR-2001-186. Final Technical Report. September 2001 [Electronic resource] / G. Amin Moeness [et al.]. – Mode of access: https://www.researchgate.net/profile/Moeness_Amin/publication/235141892_Anti-Jamming_Techniques_for_GPS_Receivers/links/0c960533314d91dfec000000/Anti-Jamming-Techniques-for-GPS-Receivers.pdf – Date of access: 01.09.2017.
5. McDonald, K. The Modernization of GPS: Plans, New Capabilities and the Future Relationship to Galileo / K. McDonald // *J. of Global Positioning System*. – 2002. – Vol. 1, N 1. – P. 1–17.
6. Petovello M. New GNSS frequencies advantages of M-Code, and the benefits of a solitary Galileo satellite [Electronic resource] / M. Petovello // *Inside GNSS*. – 2006. – Vol. 1, no. 4 (May/June). – Mode of access: <http://www.insidegnss.com/auto/MayJune06GNSSolutions.pdf> – Date of access 01.09.2017.
7. Moeness G. Amin. Signal Processing Techniques for Anti-Jamming Global Positioning System (GPS) Receivers. AFRL-IF-RS-TR-2005-290. Final Technical Report. August 2005 [Electronic resource] / Amin G. Moeness. – Mode of access: https://www.researchgate.net/publication/235025855_Signal_Processing_Techniques_for_Anti-Jamming_Global_Positioning_System_GPS_Receivers – Date of access: 01.09.2017.

References

1. Bystryakov S. G., Harisov V. N. Specifics of testing antenna jamming cancellers of jam-protected GLONASS/GPS user navigation equipment. *Novosti navigatsii* [Navigation News], 2010, no 3, pp. 14–19 (in Russian).
2. Gantmacher F. R. *The theory of matrices*. Moscow, Nauka Publ., 1966. 576 p. (in Russian).
3. Monzingo R. A., Miller T. W. *Introduction to Adaptive Arrays*. New York, John Wiley, 1980. 543 p. (in Russian).
4. Moeness G. Amin, Alan R. Lindsey et al. *Anti-Jamming Techniques for GPS Receivers*. AFRL-IF-RS-TR-2001-186. Final Technical Report. September 2001. Available at: https://www.researchgate.net/profile/Moeness_Amin/publication/235141892_Anti-Jamming_Techniques_for_GPS_Receivers/links/0c960533314d91dfec000000/Anti-Jamming-Techniques-for-GPS-Receivers.pdf (Accessed 1 September 2017).
5. McDonald K. The Modernization of GPS: Plans, New Capabilities and the Future Relationship to Galileo. *Journal of Global Positioning System*, 2002, vol. 1, no. 1, pp. 1–17. Doi: 10.5081/jgps.1.1.1
6. Petovello M. New GNSS frequencies advantages of M-Code, and the benefits of a solitary Galileo satellite. *Inside GNSS*, May/June 2006, vol. 1, no. 4. Available at: <http://www.insidegnss.com/auto/MayJune06GNSSolutions.pdf> (Accessed 1 September 2017).
7. Moeness G. Amin. *Signal Processing Techniques for Anti-Jamming Global Positioning System (GPS) Receivers*. AFRL-IF-RS-TR-2005-290. Final Technical Report. August 2005. Available at: https://www.researchgate.net/publication/235025855_Signal_Processing_Techniques_for_Anti-Jamming_Global_Positioning_System_GPS_Receivers (Accessed 1 September 2017).

Информация об авторах

Костромицкий Сергей Михайлович – член-корреспондент Национальной академии наук Беларуси, доктор технических наук, профессор, директор, Центр радиотехники Национальной академии наук Беларуси (ул. П. Бровка, 15/5, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: sleus@abv.bg

Шамович Эдуард Иосифович – начальник отдела, Центр радиотехники Национальной академии наук Беларуси (ул. П. Бровка, 15/5, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: shedi77@mail.ru

Information about the authors

Sergei M. Kostromitsky – Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, D. Sc. (Engineering), Professor, Director, Radio Engineering Center of the National Academy of Sciences of Belarus (15/5, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: sleus@abv.bg

Eduard I. Shamovich – Head of the Department, Radio Engineering Center of the National Academy of Sciences of Belarus (15/5, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: shedi77@mail.ru

В. П. Тузлуков

Белорусская государственная академия авиации, Минск, Беларусь

ЛИНЕЙНОЕ СУММИРОВАНИЕ СИГНАЛОВ РАВНОЙ МОЩНОСТИ, ПЕРЕДАВАЕМЫХ ПОСРЕДСТВОМ ОБОБЩЕННОГО КАНАЛА СВЯЗИ С ЗАМИРАНИЯМИ

Аннотация. Учитывая важность статистических моделей, используемых при описании канала связи с замираниями, подчиняющимися таким законам распределения, как Накагами- n (распределение Райса) и Накагами- q (распределение Хойта), при рассмотрении наземных, мобильных и спутниковых телекоммуникационных систем, мы представляем альтернативный подход, основанный на моментных функциях, для анализа характеристик приемных устройств с линейным суммированием сигналов равной мощности, передаваемых посредством каналов связи с замираниями, которые являются независимыми, но необязательно идентично распределенными в соответствии с законами Райса и Хойта. Получены точные математические выражения для моментных функций отношения сигнал/помеха на выходе сумматора приемного устройства. Исследуются важные критерии характеристик приемного устройства, такие как среднее отношение сигнал/помеха на выходе приемного устройства, степень замираний, спектральная эффективность в режиме сигналов малой мощности. Кроме того, используя рациональную аппроксимацию Паде, то есть наилучшую рациональную аппроксимацию степенного ряда, применительно к производящей функции моментов отношения сигнал/помеха на выходе приемного устройства, оцениваются средняя вероятность ошибок на символ и вероятность нарушения связи. Мы также исследуем соответствие моделирования замираний в канале связи, описываемых распределением Хойта, с помощью выбранной должным образом модели распределения Накагами- m при условии, что рассматривается помехозащищенность, или коэффициент ошибок приемного устройства при линейном суммировании сигналов равной мощности.

Ключевые слова: сигналы равной мощности, распределение Райса, распределение Хойта, распределение Накагами, фазовая модуляция, отношение сигнал/помеха

Для цитирования. Тузлуков, В. П. Линейное суммирование сигналов равной мощности, передаваемых посредством обобщенного канала связи с замираниями / В. П. Тузлуков // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2017. – №4. – С. 80–92.

V. P. Tuzlukov

Belarussian State Aviation Academy, Minsk, Belarus

EQUAL GAIN COMBINING OVER GENERALIZED FADING CHANNELS

Abstract. We suggest the alternative approach based on definition of the moment generating function for the average signal-to-noise ratio (SNR) at the receiver output with the purpose to analyze performance of systems with equal gain combining over Nakagami- n (Rice) and Nakagami- q (Hoyt) fading channels under consideration of land, mobile and satellite telecommunication systems. We derive the exact closed-form mathematical expressions for average symbol error probability and outage probability using the Pade rational approximation to moment generating function of the SNR at the output of the combiner. We investigate the following important receiver performance such as the average SNR at the receiver output, fading, spectral effectiveness at weak input signals. Additionally, we study the rational Pade approximation of the moment generating function applying to the average SNR at the receiver output and evaluate bit error rate and the outage probability. Additionally, we investigate a possibility of modeling a Hoyt fading channel based on presentation Nakagami- m statistical model for evaluation of error performance under the use of equal gain combining technique.

Keywords: equal power signals, Rice distribution, Hoyt distribution, Nakagami distribution, phase modulation, signal-to-noise ratio

For citation. Tuzlukov V. P. Equal gain combining over generalized fading channels. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2017, no. 4, pp. 80–92 (in Russian).

Введение. Разнесенный прием сигналов – это хорошо известное направление в области обработки сигналов с целью строгого определения средней мощности сигнала и уменьшения уровня флуктуаций сигнала в каналах связи с замираниями, при котором множество полученных копий

сигнала может быть суммировано разумным образом для того, чтобы обеспечить более высокое значение отношения сигнал/помеха на выходе приемного устройства. Основными технологиями для разнесения сигналов являются линейное суммирование дифференциально взвешенных сигналов каждого канала, сложение разнесенных сигналов с автовыбором и их комбинация, так называемое обобщенное сложение разнесенных сигналов с автовыбором.

Линейное суммирование сигналов равной мощности представляет наибольший практический интерес для исследования среди указанных технологий, потому что этот метод обеспечивает очень близкую вероятность ошибок на бит или символ к аналогичной характеристике оптимального метода суммирования дифференциально взвешенных сигналов каждого канала, демонстрируя при этом очень простую практическую реализацию.

В современной литературе оцениванию вероятности ошибок на бит или символ на выходе приемных устройств, выполняющих линейное суммирование сигналов равной мощности и работающих в условиях замираний в канале связи, описываемых распределениями Накагами- n (распределение Райса) и Накагами- q (распределение Хойта), не уделено так много внимания по сравнению с рэлеевскими замираниями в канале связи (распределение Накагами- m), главным образом, вследствие сложной формы представления плотности распределения вероятностей для законов распределения Райса и Хойта, несмотря на тот факт, что закон распределения Накагами- n (распределение Райса) и закон распределения Накагами- q (распределение Хойта) демонстрируют великолепное совпадение с экспериментальными измерениями замираний в канале связи для наземных, мобильных и спутниковых систем телекоммуникации.

Строго говоря, закон распределения Накагами- n (распределение Райса) [1–3], частным случаем которого является рэлеевский закон распределения, обеспечивает оптимальное совпадение с экспериментальными данными как для наземных [4, 5], мобильных [6], так и для спутниковых систем телекоммуникации [7–9]. Закон распределения Накагами- q (распределение Хойта) [2], как правило, характерен для спутниковых каналов связи вследствие наличия ионосферного мерцания и модифицируется в пределах от одностороннего гауссовского распределения до рэлеевского закона распределения замираний в канале связи [10, 11]. В дальнейшем мы будем называть закон распределения Накагами- n (распределение Райса) и закон распределения Накагами- q (распределение Хойта) как модели замираний Райса и Хойта соответственно.

Предыдущие исследования, касающиеся додетекторного разнесения сигналов равной мощности с линейным суммированием при наличии моделей замираний Райса и Хойта в канале связи, представлены в [12–16]. Более точно в [12] оценивается помехозащищенность, или коэффициент ошибок при использовании когерентной двоичной фазовой модуляции и некогерентной двоичной частотной модуляции при разнесении сигналов равной мощности с линейным суммированием, аппроксимируя функцию распределения вероятностей суммы L статистически независимых случайных величин [17].

Однако, как упоминалось в [18], элегантное разложение в ряд степенной функции, выполненное в [12], имеет форму $0,5 \pm \Sigma$. Принимая во внимание хвосты распределения, необходимо учитывать большое число членов разложения в ряд, чтобы не потерять значимые коэффициенты при округлении значений, когда осуществляется сложение Σ с 0,5 или вычитание Σ из 0,5.

Помехозащищенность, или коэффициент ошибок для некогерентной двоичной частотной модуляции при линейном суммировании сигналов равной мощности для случая медленных, коррелированных и избирательных во времени замираний Райса, исследовалась в [13]. В [14] представлен альтернативный полуаналитический подход для оценивания функции распределения вероятностей взвешенной суммы L независимых случайных величин, распределенных по закону Райса, при условии наличия или отсутствия аддитивного белого гауссовского шума, используя эрмитово численное интегрирование. Этот результат применяется затем в [15] для оценивания вероятности ошибок на бит или символ в случае использования когерентной двоичной фазовой модуляции.

В [16], применяя теорему Парсевала, представлен основанный на преобразовании интеграла ошибок в частотной области альтернативный подход к оцениванию средней вероятности ошибок на бит или символ на выходе приемных устройств с линейным суммированием сигналов равной мощности, которые передаются по каналу связи с замираниями, описываемыми моделями Рэлея, Накагами- m , Райса, Хойта. Однако выражения для вероятности ошибок на бит или

символ для моделей замираний Райса и Хойта включают в себя интегралы с бесконечными пределами интегрирования и подынтегральные выражения, образованные бесконечными суммами комплексных функций (вырожденных гипергеометрических функций) вследствие комплексных форм представления их характеристических функций.

В настоящей работе мы преодолеваем проблемы, связанные с определением плотности распределения вероятностей суммы случайных величин, характеризующих замирания в канале связи, и использованием комплексных форм характеристических функций, путем предложения альтернативного подхода, основанного на производящей функции моментов, с целью анализа характеристик вероятности ошибок на бит или символ на выходе приемных устройств с линейным суммированием сигналов равной мощности, работающих в условиях независимых и неидентичных замираний в канале связи, описываемых моделями замираний Райса и Хойта.

Используя строгие математические выражения для производящих функций моментов отношения сигнал/помеха на выходе сумматора приемного устройства и аппроксимируя соответствующие производящие функции моментов при помощи теории аппроксимации Паде [19], мы исследуем важные критерии определения вероятности ошибок на бит или символ. Среднее значение отношения сигнал/помеха на выходе приемного устройства, степень замирания и спектральная эффективность в области сигналов малой мощности выражаются в простой математической форме при произвольном числе входных каналов приемного устройства и случайном характере замираний в канале связи.

Средние значения вероятности ошибок на бит или символ и вероятности нарушения связи строго аппроксимируются, используя хорошо известный подход на основе производящей функции моментов [20]. Кроме того, рассматривается возможность представления канала связи с замираниями, описываемыми моделью Хойта, законом распределения Накагами- m , выбранным в соответствии с требованиями при условии, что исследуется помехозащищенность, или коэффициент ошибки на выходе приемного устройства с линейным суммированием сигналов равной мощности. Предлагаемый математический анализ сопровождается представлением многочисленных результатов моделирования и соответствующим графическим представлением.

Моменты отношения сигнал/помеха на выходе приемного устройства. Рассмотрим L -канальное приемное устройство, выполняющее линейное суммирование сигналов равной мощности при условии статистической независимости, но необязательной идентичности распределения случайных процессов, поступающих по каналам связи на вход приемного устройства, и гладких замираний в каналах связи. Такая модель канала связи соответствует пространственному разнесению сигналов системами передачи информации, для которой случайные процессы, поступающие на вход приемного устройства, являются идентично распределенными так же, как и при многолучевом излучении по частотно-избирательным каналам связи при наличии замираний, для которых зависимость между мощностью сигнала и его задержкой на входе приемного устройства стремится к неравномерности.

Отношение сигнал/помеха на выходе приемного устройства можно определить следующим образом:

$$q_{\text{вых}} = \frac{E_s}{L\mathcal{N}_0} \left(\sum_{i=1}^L x_i \right)^2, \quad (1)$$

где x_i – огибающая случайного процесса на i -м входном канале многоканального приемного устройства, которая рассматривается как случайная величина, распределенная в соответствии с законом распределения Райса или Хойта; E_s – энергия сигнала на символ; \mathcal{N}_0 – односторонняя спектральная плотность распределения мощности аддитивного «белого» гауссовского шума.

По определению, момент n -го порядка отношения сигнал/помеха на выходе приемного устройства можно представить в следующем виде

$$E\{q_{\text{вых}}^n\} = E\left\{\left[\frac{E_s}{L\mathcal{N}_0}(x_1 + \dots + x_L)^2\right]^n\right\} = \left(\frac{E_s}{L\mathcal{N}_0}\right)^n E\{(x_1 + \dots + x_L)^{2n}\}, \quad (2)$$

где $E\{\dots\}$ – математическое ожидание случайной величины. Расширяя член $(x_1 + \dots + x_L)^{2n}$, используя мультиномиальное тождество [21], (2) может быть представлено в виде

$$E\{q_{\text{ВЫХ}}^n\} = \left(\frac{E_s}{L\mathcal{N}_0}\right)^n (2n)! \sum_{\substack{k_1, \dots, k_L=0 \\ k_1 + \dots + k_L = 2n}}^{2n} \frac{E\{x_1^{k_1} \dots x_L^{k_L}\}}{\prod_{j=1}^L (k_j)!}. \quad (3)$$

С учетом мгновенного значения отношения сигнал/помеха для каждого канала при приеме разнесенных сигналов, определяемого как $q_i = x_i^2 E_s / \mathcal{N}_0$, (3) может быть представлено как

$$E\{q_{\text{ВЫХ}}^n\} = \frac{(2n)!}{L^n} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_L=0 \\ k_1 + \dots + k_L = 2n}}^{2n} \frac{E\{q_1^{0.5k_1} \dots q_L^{0.5k_L}\}}{\prod_{j=1}^L (k_j)!}. \quad (4)$$

Предположим, что случайные процессы во всех каналах приемного устройства при линейном суммировании сигналов равной мощности не коррелированы между собой. Тогда (4) можно представить в более простом виде

$$E\{q_{\text{ВЫХ}}^n\} = \frac{(2n)!}{L^n} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_L=0 \\ k_1 + \dots + k_L = 2n}}^{2n} \prod_{j=1}^L \frac{E\{q_j^{0.5k_j}\}}{(k_j)!}. \quad (5)$$

Если приемное устройство функционирует при наличии в канале связи замираний, подчиняющихся закону распределения Райса, то отношение сигнал/помеха для каждого канала разнесенного приема распределено в соответствии с нецентральным χ^2 законом распределения.

Используя определение для моментов случайной величины, распределенной в соответствии с нецентральным χ^2 законом распределения [20], и учитывая (5), моменты отношения сигнал/помеха на выходе приемного устройства при линейном суммировании сигналов равной мощности могут быть записаны в виде следующего математического выражения:

$$E\{q_R^n\} = \frac{(2n)!}{L^n} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_L=0 \\ k_1 + \dots + k_L = 2n}}^{2n} \left\{ \prod_{j=1}^L \frac{\bar{q}_j^{0.5k_j} \Gamma(1 + 0.5k_j)}{(k_j)! (1 + K_j)^{0.5k_j}} {}_1F_1(-0.5k_j, 1; -K_j) \right\}, \quad (6)$$

где $\bar{q}_j = \Omega_j E_s / \mathcal{N}_0$ – среднее значение отношения сигнал/помеха на символ для j -го канала приемного устройства при $\Omega_j = x_i^2$ – среднее значение x_i^2 на символ; $\Gamma(\cdot)$ – Гамма функция [16]; ${}_1F_1(\cdot; \cdot)$ – вырожденная гипергеометрическая функция первого рода [21]; K_j – коэффициент Райса для j -го канала приемного устройства, определяемый как отношение мощности сигнала в главной компоненте к общей рассеиваемой мощности.

Если $K_j \rightarrow -\infty$ (дБ), получаем рэлеевские замирания в канале связи; при $K_j \rightarrow \infty$ (дБ) замирания в канале связи отсутствуют. Значения коэффициента Райса для наземных, мобильных и спутниковых систем телекоммуникации лежат в пределах от 0 до 12 дБ [5, 22]. В дальнейшем без потери общности будем полагать, что коэффициент Райса принимает одно и то же значение для всех каналов разнесенного приема, то есть $K_1 = \dots = K_L = K$.

Если многоканальное приемное устройство функционирует в условиях замираний в канале связи, определяемых законом распределения Хойта, то моменты отношения сигнал/помеха на выходе приемного устройства могут быть определены при подстановке в (5) моментов отношения сигнал/помеха для каждого канала на входе приемного устройства, что приводит к результату [20]

$$E\{q_H^n\} = \frac{(2n)!}{L^n} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_L=0 \\ k_1 + \dots + k_L = 2n}}^{2n} \left\{ \prod_{j=1}^L \frac{\bar{q}_j^{0.5k_j} \Gamma(1 + 0.5k_j)}{(k_j)!} {}_2F_1\left[-\frac{k_j - 2}{4} - 0.25k_j; 1; \left(\frac{1 - \gamma_j^2}{1 + \gamma_j^2}\right)^2\right] \right\}, \quad (7)$$

где ${}_2F_1(\cdot, \cdot; \cdot; \cdot)$ – гауссовская гипергеометрическая функция [21]; γ_j – параметр замирания в канале связи для закона распределения Накагами- q замираний j -го канала разнесенного приема сигналов, который изменяется от 0 (гауссовское распределение замираний в канале связи) до 1 (рэлеевское распределение замираний в канале связи).

Как и прежде, предположим без какой-либо потери общности, что γ_j принимают одно и то же значение для всех каналов разнесенного приема, то есть $\gamma_1 = \dots = \gamma_L = \gamma$. Моменты отношения сигнал/помеха на выходе многоканального приемного устройства используются в последующем для исследования важных критериев определения вероятности ошибок при линейном суммировании сигналов равной мощности, таких как средняя мощность отношения сигнал/помеха на выходе приемного устройства, степень замираний в канале связи, спектральная эффективность в области очень слабых сигналов, характеризующихся очень малым значением отношения сигнал/помеха по мощности. Также исследуются вероятность ошибок и вероятность отказа или нарушения связи, аппроксимируя производящую функцию моментов на основе теории аппроксимации Паде.

Необходимо отметить, что моменты более высокого порядка также полезны для анализа алгоритмов обработки сигналов при решении задач обнаружения сигналов и играют фундаментальную роль в понимании вероятности ошибок на бит или символ для широкополосных систем связи при наличии замираний в канале связи [23–25].

Среднее значение отношения сигнал/помеха на выходе приемного устройства. Среднее значение отношения сигнал/помеха на выходе L -канального приемного устройства с линейным суммированием сигналов равной мощности, которое функционирует при наличии независимых и не идентичных по распределению замираний в канале связи, описываемых законом распределения Райса, может быть получено, полагая $n = 1$ в (6). После простых математических преобразований мы получаем

$$\bar{q}_R = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \bar{q}_i + \frac{\pi}{4L(K+1)} [{}_1F_1(-0.5, 1; -K)]^2 \sum_{i=1}^L \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^L \sqrt{\bar{q}_i \bar{q}_j}. \quad (8)$$

В случае независимых и идентично распределенных замираний в канале связи, то есть $\bar{q}_i = \bar{q}$, (8) сводится к более простому выражению

$$\bar{q}_R = \bar{q} \left[1 + \frac{\pi(L-1)}{4(K+1)} [{}_1F_1(-0.5, 1; -K)]^2 \right]. \quad (9)$$

Заметим, что при $K \rightarrow \infty$ (дБ) легко проверить, что (9) сводится к выражению для рэлеевских замираний в канале связи, полученному в [20]. При замираниях в канале связи, описываемых законом распределения Хойта, среднее значение отношения сигнал/помеха на выходе L -канального приемного устройства с линейным суммированием сигналов равной мощности для независимых и не идентично распределенных замираний в канале связи может быть получено при $n = 1$ в (7). После простых преобразований получаем

$$\bar{q}_H = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \bar{q}_i + \left[{}_2F_1 \left[0.25, -0.25; 1; \left(\frac{1-\gamma^2}{1+\gamma^2} \right)^2 \right] \right]^2 \frac{\pi}{4L} \sum_{i=1}^L \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^L \sqrt{\bar{q}_i \bar{q}_j}. \quad (10)$$

В случае независимых идентично распределенных замираний в канале связи (10) имеет вид

$$\bar{q}_H = \bar{q} + (L-1) \frac{\bar{q}\pi}{4} \left[{}_2F_1 \left[0.25, -0.25; 1; \left(\frac{1-\gamma^2}{1+\gamma^2} \right)^2 \right] \right]^2. \quad (11)$$

При $\gamma = 1$ (рэлеевские замирания) (11) упрощается и сводится к известному уравнению [20].

Степень замираний и спектральная эффективность. Степень замираний была определена в [25] как единая мера показателя воздействия замираний в канале связи. Эта мера, как правило, независима от средней мощности замираний в канале связи и определяется следующим образом

$$Q = \frac{\text{Var}\{q_{\text{ВЫХ}}\}}{\bar{q}_{\text{ВЫХ}}^2} = \frac{E\{q_{\text{ВЫХ}}^2\}}{\bar{q}_{\text{ВЫХ}}^2} - 1, \quad (12)$$

где $\text{Var}\{q_{\text{ВЫХ}}\}$ – дисперсия отношения сигнал/помеха на выходе приемного устройства. Используя (6), получаем, что для замираний в канале связи, распределенных по закону Райса, степень замираний определяется как

$$Q_R = \frac{4! \sum_{\substack{k_1, \dots, k_L=0 \\ k_1 + \dots + k_L=4}}^4 \prod_{j=1}^L \frac{\bar{q}_j^{0.5k_j} \Gamma(1+0.5k_j)}{k_j! (1+K)^{0.5k_j}} {}_1F_1(-0.5k_j, 1; -K)}{\left[\sum_{i=1}^L \bar{q}_i + \frac{\pi}{4(K+1)} [{}_1F_1(-0.5, 1; -K)]^2 \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^L \sum_{j=1}^L \sqrt{\bar{q}_i \bar{q}_j} \right]^2} - 1. \quad (13)$$

Если приемное устройство с линейным суммированием сигналов равной мощности функционирует при условии, что замирания в канале связи распределены в соответствии с законом распределения Хойта, тогда степень замираний в канале связи, используя (7), имеет вид

$$Q_H = \frac{4! \sum_{\substack{k_1, \dots, k_L=0 \\ k_1 + \dots + k_L=4}}^4 \prod_{j=1}^L \frac{\bar{q}_j^{0.5k_j} \Gamma(1+0.5k_j)}{k_j!} {}_2F_1\left[-0.25(k_j-2), -0.25k_j; 1; \left(\frac{1-\gamma^2}{1+\gamma^2}\right)^2\right]}{\left[\sum_{i=1}^L \bar{q}_i + \frac{\pi}{4} \left[{}_2F_1\left[0.25, -0.25; 1; \left(\frac{1-\gamma^2}{1+\gamma^2}\right)^2\right] \right]^2 \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^L \sum_{j=1}^L \sqrt{\bar{q}_i \bar{q}_j} \right]^2} - 1. \quad (14)$$

Степень замираний в канале связи может быть использована для исследования спектральной эффективности при наличии гладких замираний в области очень слабых сигналов по мощности, например в спутниковой системе телекоммуникации. Тогда минимальное отношение энергии сигнала на бит к мощности помехи, требуемое для надежной связи, составляет $(E_b/\mathcal{N}_0)_{\min} = -1,59$ дБ.

Наклон кривой спектральной эффективности S_0 как функция отношения сигнал/помеха на бит E_b/\mathcal{N}_0 в единицах бит/Гц на 3 дБ при минимальном значении $(E_b/\mathcal{N}_0)_{\min}$ определяется как [26]

$$S_0 = \frac{2E^2\{x_{\text{ВЫХ}}^2\}}{E\{x_{\text{ВЫХ}}^4\}} = \frac{2\bar{q}_{\text{ВЫХ}}^2}{E\{q_{\text{ВЫХ}}^2\}}, \quad (15)$$

где $x_{\text{ВЫХ}}$ – огибающая амплитуды процесса на выходе сумматора приемного устройства. Выражение (15) можно записать в виде степенного ряда замираний в канале связи на выходе сумматора, то есть

$$S_0 = \frac{2}{Q+1}. \quad (16)$$

Используя (13) и (14) с учетом (16) спектральная эффективность в области очень слабых сигналов по мощности может быть определена для приемных устройств с линейным суммированием сигналов равной мощности, которые функционируют при наличии замираний в канале связи, распределенных в соответствии с законами Райса и Хойта соответственно.

Численный анализ. Предположим, что многоканальное приемное устройство функционирует согласно экспоненциальной зависимости между мощностью рассеивания и задержкой сигнала во времени, то есть $\bar{q}_i = \bar{q}_1 \exp\{-\delta(i-1)\}$.

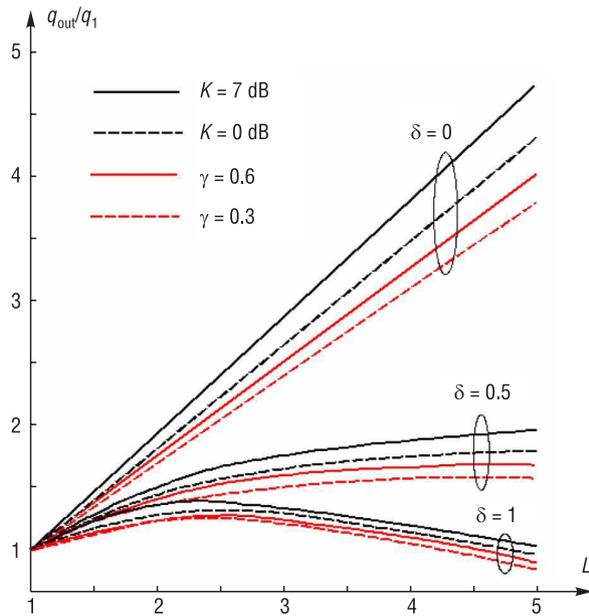


Рис. 1. Нормализованное среднее значение отношения сигнал/помеха для первого канала как функция числа каналов L при замираниях, распределенных по закону Райса (черный цвет) и Хойта (красный цвет)

Fig. 1. Normalized average SNR for the first channel versus channel number L in Rice (black) and Hoyt (red) fading

Рис. 1 демонстрирует графическое представление нормализованного среднего значения отношения сигнал/помеха, характерного для первого канала, на выходе многоканального приемного устройства для линейного суммирования сигналов равной мощности, как функцию числа каналов приема сигналов при наличии замираний в канале связи, распределенных по закону Райса: $K = 0$ дБ и $K = 7$ дБ, и Хойта: $\gamma = 0,3$ и $\gamma = 0,6$ соответственно.

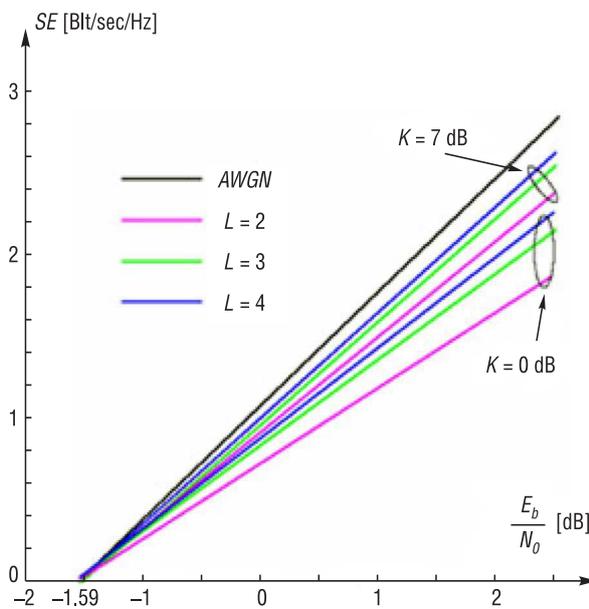


Рис. 3. Спектральная эффективность в области слабых сигналов при замираниях Райса в канале связи; AWGN – аддитивный «белый» гауссовский шум

Fig. 3. Spectral effectiveness for low power signals in Rice channel fading; AWGN – additive white Gaussian noise

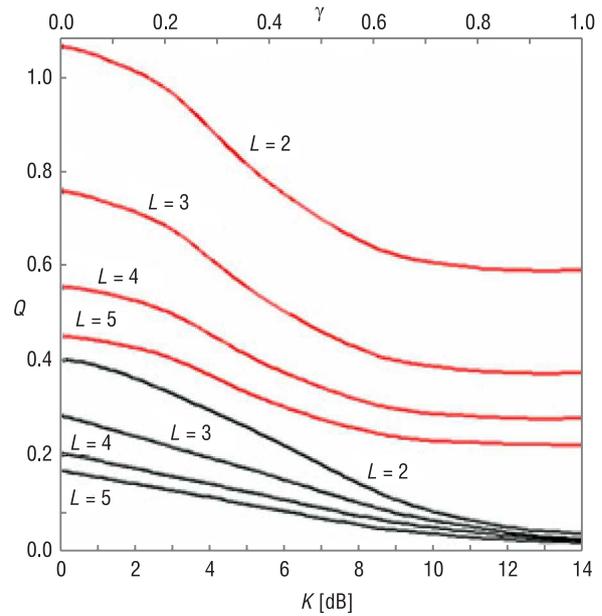


Рис. 2. Степень замираний в канале связи при линейном суммировании сигналов равной мощности как функция от соответствующего параметра замираний в канале связи, K (черный цвет) и γ (красный цвет)

Fig. 2. Fading channel degree for equal gain combining versus fading channel parameter, K (black) and γ (red)

На рис. 2 представлена степень замираний в канале связи для линейного суммирования сигналов равной мощности как функция соответствующего параметра замираний в канале связи, K или γ , для нескольких значений L . Как и ожидалось, на выходе сумматора приемного устройства степень замираний в канале связи компенсируется более эффективно с увеличением числа каналов L приемного устройства при линейном суммировании сигналов равной мощности.

На рис. 3 представлена спектральная эффективность в области очень слабых сигналов по мощности для многоканального приемного устройства при линейном суммировании сигналов равной мощности, которое функционирует в условиях замираний в канале связи, распределенных в соответствии с законом Райса. Спектральная эффективность демонстрируется для канала связи без замираний, подверженного воздействию аддитивного «белого» гауссовского шума с целью сравнения.

Частота ошибок и вероятность нарушения связи. *Средняя вероятность ошибок на символ.* Метод исследований, основанный на производящей функции моментов [20], является унифицированным для определения коэффициента или частоты ошибок при передаче двоичных данных для ряда видов модуляции. Однако пока не получены точные математические выражения для производящей функции моментов отношения сигнал/помеха на выходе приемного устройства с линейным суммированием сигналов равной мощности.

По этой причине в настоящей работе предлагается использовать теорию аппроксимации Паде как альтернативный и простой способ для аппроксимации производящей функции моментов. Объясним в краткой форме, как можно применить теорию аппроксимации Паде для получения точной рациональной аппроксимации производящей функции моментов $\mathcal{M}_{q_{\text{вых}}}(s)$ для отношения сигнал/помеха на выходе приемного устройства.

По определению производящая функция моментов равна [27]

$$\mathcal{M}_{q_{\text{вых}}}(s) = E\{\exp(sq_{\text{вых}})\} \quad (17)$$

и может быть представлена в виде степенного ряда, например в виде ряда Тейлора

$$\mathcal{M}_{q_{\text{вых}}}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} E\{q_{\text{вых}}^n\} s^n \sin^{-1} \theta. \quad (18)$$

Затруднительно сделать вывод, что степенной ряд в (18) имеет положительный радиус сходимости и относительно какого значения он сходится. Для решения этой проблемы привлекается теория аппроксимации Паде [19] как простой и альтернативный способ аппроксимации производящей функции моментов. Аппроксимирующая функция Паде является той рациональной функциональной аппроксимацией для $\mathcal{M}_{q_{\text{вых}}}(s)$ установленного порядка B для знаменателя и порядка A для числителя так, что разложение в степенной ряд согласуется с разложением в степенной ряд функции $\mathcal{M}_{q_{\text{вых}}}(s)$ порядка $A + B$

$$R_{[A/B]}(s) = \frac{\sum_{i=0}^A a_i s^i}{1 + \sum_{i=1}^B b_i s^i} = \sum_{n=0}^{A+B} \frac{E\{q_{\text{вых}}^n\}}{n!} s^n + o\{s^{N+1}\}, \quad (19)$$

где $o\{s^{N+1}\}$ – бесконечно малая величина, которой можно пренебречь. Здесь необходимо оценить первые $A + B$ моменты для построения аппроксимирующей функции $R_{[A/B]}(s)$. В последующем, $\mathcal{M}_{q_{\text{вых}}}(s)$ аппроксимируется, используя аппроксимирующие функции Паде $R_{[A/B]}(s)$ под диагональю матрицы, поскольку только в этом случае гарантируется сходимость и однозначность $\mathcal{M}_{q_{\text{вых}}}(s)$ [14, 21]. С помощью аппроксимирующих функций Паде выражения для коэффициента или частоты ошибок могут быть получены непосредственно для некогерентных и дифференциальных методов передачи двоичных данных, например, некогерентная двоичная фазовая модуляция, дифференциальная двоичная фазовая модуляция, поскольку для остальных случаев обычные интегралы с конечными пределами интегрирования и подынтегральные выражения, составленные из элементарных функций, должны без труда вычисляться с использованием численного интегрирования.

Вероятность нарушения связи. В дополнение к среднему значению коэффициента или частоты ошибок вероятность нарушения связи является другим стандартным критерием характеристики вероятности ошибок на бит или символ для систем телекоммуникации и связи, функционирующих в условиях замираний в канале связи. Эта вероятность определяется как вероятность события того, что суммарное отношение сигнал/помеха $q_{\text{вых}}$ по своему значению меньше $q_{\text{пор}}$, то есть [20]

$$P^{\text{outage}} = F_{q_{\text{вых}}}(q_{\text{пор}}) = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{M}_{q_{\text{вых}}}(s)/s] \Big|_{q_{\text{пор}}}, \quad (20)$$

где $F_{q_{\text{вых}}}(\cdot)$ – функция распределения вероятностей отношения сигнал/помеха на выходе приемного устройства с линейным суммированием сигналов равной мощности; $\mathcal{L}^{-1}(\cdot)$ – инверсное преобразование Лапласа.

Согласно рациональной аппроксимации Паде,

$$\mathcal{M}_{q_{\text{ВЫХ}}}(s) \cong \frac{\sum_{i=0}^A a_i s^i}{1 + \sum_{i=1}^B b_i s^i} = \sum_{i=0}^B \frac{\lambda_i}{s + p_i}. \quad (21)$$

Используя остаточную инверсию, вероятность нарушения связи может быть без труда определена из (20) как

$$P_{\text{outage}} = \sum_{i=1}^B \frac{\lambda_i}{p_i} \exp\{-p_i q_{\text{пор}}\}, \quad (22)$$

где p_i и λ_i – полюса и остатки (бесконечно малые числа, которые могут рассматриваться как 0) соответственно.

Более подробная и детальная информация о том, каким образом осуществляется аппроксимация функции распределения вероятностей и плотности распределения вероятностей, представлена в [28, 29].

Численный анализ. Представим некоторые численные результаты для иллюстрации предлагаемого математического анализа.

Рис. 4, а представляет среднюю вероятность ошибок на символ для 4-, 8- и 16-битовой дифференциальной двоичной фазовой модуляции, используемой при линейном суммировании сигналов равной мощности в условиях замираний в канале связи, распределенных согласно закону распределения Райса при $K = 7$ дБ и $L = 2, 3$. На рис. 4, а также представлены результаты компьютерного моделирования с целью проверки точности предлагаемой аппроксимации Паде. Наблюдается очень хорошее совпадение между результатами математического анализа и компьютерного моделирования.

Средние значения вероятности ошибок на символ для двоичной фазовой модуляции, квадратичной фазовой модуляции, 8- и 16-битовой двоичной фазовой модуляции, используемой при

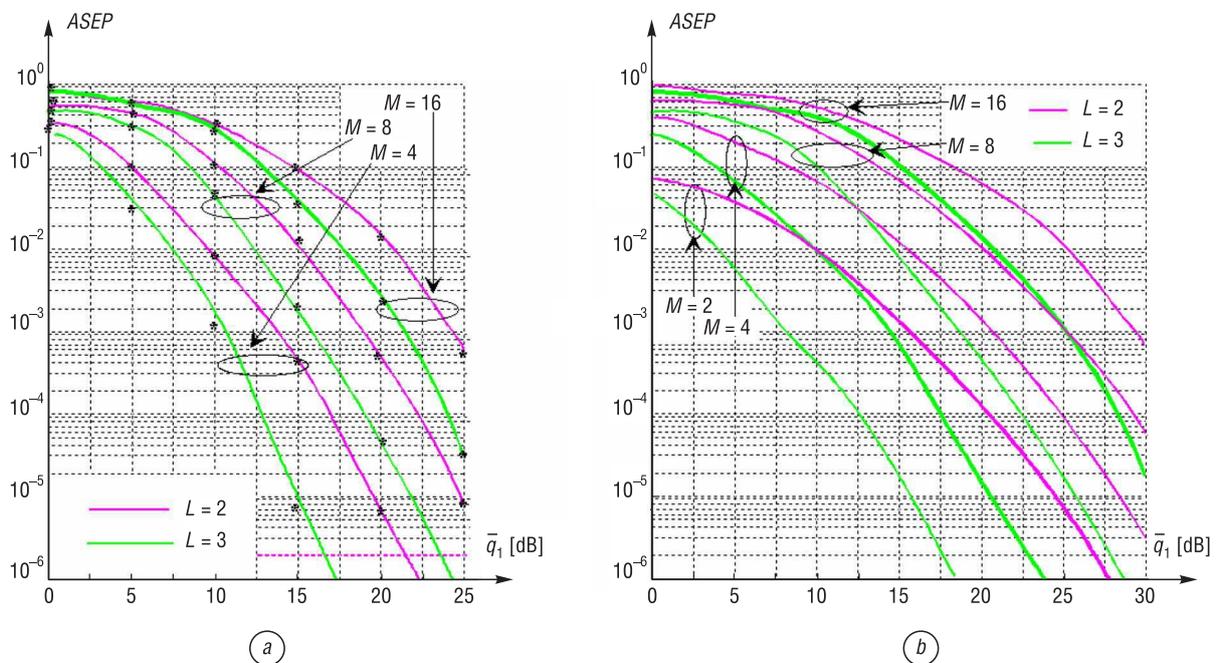


Рис. 4. Средняя вероятность ошибок на символ как функция отношения сигнал/помеха: а – M -битовая дифференциальная фазовая модуляция при замираниях Райса в канале связи, $K = 7$ дБ, * – компьютерное моделирование; б – M -битовая фазовая модуляция при замираниях Хойта в канале связи, $\gamma = 0,5$

Fig. 4. Average symbol error rate versus SNR: а – M -BDPSK in Rice fading channel, $K = 7$ dB, * – simulation; б – M -BPSK in Hoyt fading channel, $\gamma = 0.5$

линейном суммировании сигналов равной мощности в условиях замираний в канале связи, распределенных в соответствии с законом распределения Хойта при $\gamma = 0,5$ и $L = 2, 3$, демонстрируются на рис. 4, *b*.

На рис. 5 представлена вероятность нарушения связи, или вероятность отказа, для приемного устройства с удвоенным и утроенным линейным суммированием сигналов равной мощности в условиях независимых замираний в канале связи, идентично распределенных в соответствии с законами распределения Райса и Хойта соответственно, как функция от инверсного нормализованного порога нарушения связи $\bar{q}_1/q_{\text{пор}}$ для нескольких параметров замирания в канале связи. Как и вероятность ошибок на символ на выходе приемного устройства с линейным суммированием сигналов равной мощности, вероятность нарушения или отказа связи уменьшается при возрастании каналов приема сигналов и низких значениях параметров замираний в канале связи, то есть K и γ .

Аппроксимация модели Хойта моделью Накагами. Рассмотрим возможность аппроксимации закона распределения Хойта законом распределения Накагами- m , поскольку это касается анализа вероятности ошибок на символ при линейном суммировании сигналов равной мощности. Соответствие требованиям для параметров замираний в канале связи, распределенных согласно закону распределения Райса, было изложено в [26], используя простую форму математического представления закона распределения Накагами- m , что позволило представить несколько областей интерполяции параметров, в которых наблюдалась как удовлетворительная, так и неудовлетворительная совместимость.

Аппроксимация закона распределения Хойта соответствующим законом распределения Накагами- m была предложена в [2]. Отношение между параметром замирания m в канале связи закона распределения Накагами- m и параметром замирания γ закона распределения Хойта представлено как

$$m = \frac{(1 + \gamma^2)}{2(1 + 2\gamma^4)}, m \leq 1. \tag{23}$$

Для полноты исследования возможности аппроксимации замираний в канале связи, распределенных в соответствии с законом распределения Хойта, законом распределения Накагами- m , используя (23), на рис. 6 представлена средняя вероятность ошибок на бит как функция среднего значения отношения сигнал/помеха на символ для двоичной фазовой модуляции при линейном суммировании сигналов равной мощности в условиях замираний в канале связи, распределенных как в соответствии с законом распределения Хойта, так и согласно закону распределения Накагами- m .

Используется закон распределения Накагами- m при $m = 0,75$, который аппроксимирует замирания в канале связи, распределенные в соответствии с законом распределения Хойта при параметре замираний $\gamma = 0,7$.

Полученные результаты показывают, что эквивалентность двух законов распределения тем выше, чем меньше среднее значение отношения сигнал/помеха на бит (среднее значение вероятности ошибок на бит увеличивается) и чем больше число каналов приема сигналов L . Например, при $BER^{av} = 10^{-3}$ закон распределения Хойта превосходит эквивалентное распределение Накагами- m на 3 дБ, 1,68 и 1,4 дБ при $L = 2, 3, 4$ соответственно.

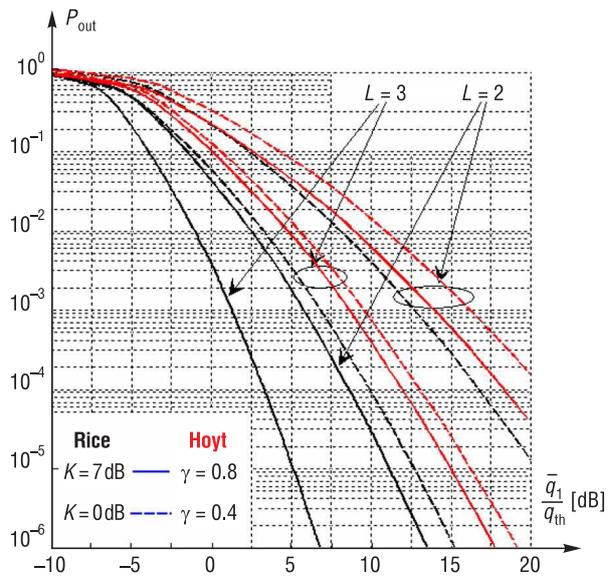


Рис. 5. Вероятность отказа связи как функция порога нарушения связи $\bar{q}_1/q_{\text{пор}}$ при замираниях Райса и Хойта в канале связи

Fig. 5. Outage probability versus threshold \bar{q}_1/q_{th} in Rice and Hoyt fading channels

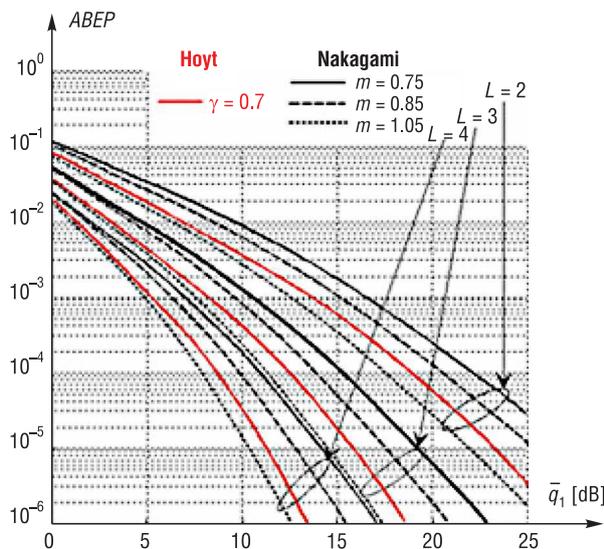


Рис. 6. Аппроксимация вероятности ошибок для двоичной фазовой модуляции при замираниях Хойта и модели распределения Накагами- m

Fig. 6. Average BER approximation in the case of BPSK in Hoyt fading channel and Nakagami- m modeling

чающуюся при законе распределения Хойта, и позволяет определить только верхнюю границу. Эмпирическим путем было установлено, что лучшая верхняя граница для модели закона распределения Хойта получается прибавлением 0,1 к эквивалентному параметру замираний m . Кроме того, прибавление 0,3 к эквивалентному параметру замираний в канале связи m позволяет нам зафиксировать нижнюю границу вероятности ошибок на бит при моделировании распределения замираний в канале связи законом распределения Хойта.

Заключение. Исследована характеристика вероятности ошибок приемных устройств додетекторного линейного суммирования сигналов равной мощности в условиях замираний в канале связи, распределенных в соответствии с законами распределения Райса и Хойта. В ходе анализа предполагалось, что замирания в канале связи являются независимыми и обладают неидентичным распределением в каждом канале приемного устройства.

При выводе точных математических выражений для моментов отношения сигнал/помеха на выходе многоканального приемного устройства оценивались важные параметры вероятности ошибок, такие как среднее значение отношения сигнал/помеха на выходе многоканального приемного устройства, степень замирания в канале связи, спектральная эффективность в области очень слабых сигналов по мощности.

Среднее значение вероятности ошибок на символ и вероятность нарушения (отказа) связи были строго аппроксимированы с использованием метода производящей функции моментов и теории аппроксимации Паде. Впервые проводилось исследование на соответствие моделирования замираний в канале связи, распределенных согласно закону распределения Хойта, с помощью строго выбранной модели закона распределения Накагами- m , поскольку рассматривалась вероятность ошибок при линейном суммировании сигналов равной мощности. Данные о подобных исследованиях отсутствуют в открытых источниках печати. Проведенный в настоящей работе анализ показал, что аппроксимация замираний в канале связи, распределенных в соответствии с законом распределения Хойта, моделью закона распределения Накагами- m всегда ухудшает вероятность ошибок, характерную для модели закона распределения Хойта.

Список использованных источников

1. Rice, S.O. Statistical properties of a sine wave plus random noise / S.O. Rice // Bell System Technol. J. – 1948. – №1 (27). – P. 109–157.
2. Nakagami, M. The m -distribution – a general formula if intensity distribution of rapid fading / M. Nakagami // Statistical Methods in Radio Wave Propagation / ed. W.G. Hoffman. – Pergamon, Oxford, U. K., 1960. – P. 3–36.

Для более худших условий в канале связи, когда параметр замираний в канале связи, распределенных в соответствии с законом распределения Хойта, равен $\gamma = 0,3$, легко заметить, что при $BER^{av} = 10^{-3}$ превосходство распределения Хойта по сравнению с распределением Накагами- m равно 4,13 дБ, 2,48 и 1,45 дБ при $m = 0,585$ и $L = 2, 3, 4$ соответственно. При $BER^{av} = 10^{-4}$ преимущество составляет 5,51 дБ, 4,14 и 2,66 дБ соответственно.

При сравнении результатов аппроксимации замираний в канале связи, распределенных в соответствии с законом распределения Хойта и эквивалентным законом распределения Накагами- m , видно, что совпадение между распределениями улучшается по мере ослабления замираний в канале связи.

Из рис. 6 также можно заметить, что аппроксимация закона распределения Хойта эквивалентной моделью закона распределения Накагами- m , как предлагается в (23), не улучшает вероятность ошибок на бит, получающуюся при законе распределения Хойта, и позволяет определить только верхнюю границу.

3. Kaur, N. SNR and BER performance analysis of MRC and EGC receivers over Rayleigh fading channel / N. Kaur // *Int. J. Computer Applications*. – 2015. – Vol. 132, №9. – P. 12–17.
4. Wijk, F. Assessment of a pico-cellular system using propagation measurements at 1.9 GHz for indoor wireless communications / F. Wijk, F. Kegel, R. Prasad // *IEEE Transactions on Vehicular Technology*. – 1995. – Vol. 44, № 1. – P. 155–162.
5. Rappaport, T. Multipath propagation models for in-building communications / T. Rappaport, Y. Seidel // *IEEE 5th International Conference on Mobile Radio Personal Communications*. – 1989. – P. 69–74.
6. Parsons, J.D. *The Mobile Radio Propagation Channel* / J.D. Parsons. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 2000. – 436 p.
7. Adeyemo, Z.K. Symbol error rate analysis of M-QAM with equal gain combining over a mobile satellite channel / Z.K. Adeyemo, I.A. Ojedokun, D.O. Akande // *Int. J. of Electrical and Computer Engineering*. – 2013. – Vol. 3, №6. – P. 849–856.
8. Hamza, D.R. Equal gain combining for cooperative spectrum sensing in cognitive radio networks / D.R. Hamza, S. Aissa, G. Anipa // *IEEE Transactions on Wireless Communications*. – 2014. – Vol. 13, №8. – P. 4334–4345.
9. Wu, W. *Satellite communications* / W. Wu // *Proc. IEEE*. – 1995. – Vol. 85, №6. – P. 998–1010.
10. Chytil, B. The distribution of amplitude scintillation and the conversion of scintillation indices / B. Chytil // *J. of Atmospheric and Terrestrial Phys.* – 1967. – Vol. 29, №9. – P. 1175–1177.
11. Bischoff, K. A note on scintillation indices / K. Bischoff, B. Chytil // *Planetary and Space Science*. – 1969. – Vol. 17, №8. – P. 463–467.
12. Abu-Dayya, A. Macrodiversity on Rician fading channels / A. Abu-Dayya, C. Beaulieu // *IEEE Transactions on Communications*. – 1994. – Vol. 42, №6. – P. 2258–2267.
13. Vitetta, G.M. An error probability formula for non-coherent orthogonal binary FSK with dual diversity on correlated Rician channels / G.M. Vitetta, U. Mengali, D.P. Taylor // *IEEE Communications Lett.* – 1999. – Vol. 3, №2. – P. 43–45.
14. Karagiannidis, G.R. Outage probability analysis for a Rician signal in L Nakagami interferers with arbitrary parameters / G.R. Karagiannidis, C.J. Georgopoulos, S.A. Kotsopoulos // *KICS J. on Communications Networks*. – 1999. – Vol. 1, №1. – P. 26–30.
15. Ekanayake, N. Equal-gain combining diversity reception of M -ary CPSK signals in Nakagami fading / N. Ekanayake // *IEEE Communications Lett.* – 2010. – Vol. 14, №4. – P. 285–287.
16. Annamalai, A. Equal-gain diversity receiver performance in wireless channels / A. Annamalai, C. Tellambura, V.K. Bhargava // *IEEE Transactions on Communications*. – 2000. – Vol. 48, №10. – P. 1732–1745.
17. Rohilla, S. Comparative analysis of maximum ratio combining and equal gain combining diversity techniques for WCDMA: a survey / S. Rohilla, D.K. Patidar, N.K. Soni // *Int. J. of Engineering Inventions*. – 2013. – Vol. 3, №1. – P. 72–77.
18. Helstrom, C.W. Computing the distribution of sums of random sine waves and of Rayleigh-distributed random variables by saddle-point integration / C.W. Helstrom // *IEEE Transactions on Communications*. – 1997. – Vol. 45, №11. – P. 1487–1494.
19. Baker, G.A. *Pade Approximation* / G.A. Baker, P. Graves-Morris. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996. – 746 p.
20. Tuzlukov, V.P. *Signal Processing in Radar Systems* / V.P. Tuzlukov. – Boca Raton: CRC Press, 2013. – 632 p.
21. Abramovitz, M. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* / M. Abramovitz, A. Stegun. – New York: Dover, 1972. – 1061 p.
22. Попов, В.Ф. Оценка помехоустойчивости при разнесенном приеме в канале с замираниями по закону Накагами и когерентно-весовом сложении сигналов / В.Ф. Попов // *Омск. науч. вестн. Сер. Приборы, машины и технологии*. – 2012. – Т. 113, №3. – С. 309–313.
23. Win, M.Z. Higher order statistics of antenna subset diversity / M.Z. Win, R.K. Mallik, G. Chrisikos // *IEEE Transaction on Wireless Communications*. – 2003. – Vol. 2, №5. – P. 871–875.
24. Быховский, М.А. Оптимальная линейная коррекция многолучевого канала связи при разнесенном приеме сигналов / М.А. Быховский // *Электросвязь*. – 2011. – №12. – С. 36–41.
25. *Communications Systems: New Research* / ed. V.P. Tuzlukov. – New York: NOVA Science Publishers Inc., 2013. – 423 p.
26. Charash, U. Reception through Nakagami fading multipath channels with random delays / U. Charash // *IEEE Transactions on Communications*. – 1979. – Vol. 27, №4. – P. 657–670.
27. Shamai, S. The impact of frequency-flat fading on the spectral efficiency of CDMA / S. Shamai, S. Verdú // *IEEE Transactions on Information Theory*. – 2001. – Vol. 47, №4. – P. 1302–1327.
28. Papoulis, A. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes* / A. Papoulis. – New York: McGraw-Hill, 2002. – 852 p.
29. Amindavar, H. Rade approximation of probability density functions / H. Amindavar, J.A. Ritcey // *IEEE Transactions on Aerospace and Electronics Systems*. – 1994. – Vol. 30, №2. – P. 416–424.
30. Метод комбинированной обработки цифровых сигналов при разнесенном приеме / О.Р. Никитин [и др.] // *Вестн. Рязан. гос. радиотехн. ун-та*. – 2009. – Т. 27, №1. – С. 27–32.

References

1. Rice S. O. Statistical properties of a sine wave plus random noise. *Bell System Technology Journal*, 1948, no. 1 (27), pp.109–157. Doi: 10.1002/j.1538-7305.1948.tb01334.x
2. Nakagami M. The m -distribution – a general formula if intensity distribution of rapid fading. Hoffman W. G. (ed.). *Statistical Methods in Radio Wave Propagation*. Pergamon, Oxford, U.K., 1960, pp. 3–36. Doi: 10.1016/B978-0-08-009306-2.50005-4
3. Kaur N. SNR and BER performance analysis of MRC and EGC receivers over Rayleigh fading channel. *International Journal of Computer Applications*, 2015, vol. 132, no. 9, pp. 12–17. Doi: 10.5120/ijca2015907520
4. Wijk F., Kegel F., Prasad R. Assessment of a pico-cellular system using propagation measurements at 1.9 GHz for indoor wireless communications. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 1995, vol. 44, no. 1, pp. 155–162. Doi: 10.1109/25.350281

5. Rappaport T., Seidel Y. Multipath propagation models for in-building communications. *IEEE 5th International Conference on Mobile Radio Personal Communications*. 1989, pp. 69–74.
6. Parsons J. D. *The Mobile Radio Propagation Channel*. New York, John Wiley & Sons, Inc., 2000. 436 p. Doi: 10.1002/0470841524
7. Adeyemo Z. K., Ojedokun I. A., Akande D. O. Symbol error rate analysis of M-QAM with equal gain combining over a mobile satellite channel. *International Journal of Electrical and Computer Engineering*, 2013, vol. 3, no. 6, pp. 849–856. Doi: 10.11591/ijece.v3i6.4343
8. Hamza D. R., Aissa S., Anipa G. Equal gain combining for cooperative spectrum sensing in cognitive radio networks. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2014, vol. 13, no. 8, pp. 4334–4345. Doi: 10.1109/twc.2014.2317788
9. Wu W. Satellite communications. *Proceedings IEEE*, 1995, vol. 85, no. 6, pp. 998–1010. Doi: 10.1109/5.598421
10. Chytil, B. The distribution of amplitude scintillation and the conversion of scintillation indices. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, 1967, vol. 29, no. 9, pp. 1175–1177. Doi: 10.1016/0021-9169(67)90151-1
11. Bischoff K., Chytil B. A note on scintillation indices. *Planetary and Space Science*, 1969, vol. 17, no. 8, pp. 463–467. Doi: 10.1016/0032-0633(69)90112-3
12. Abu-Dayya A., Beaulieu C. Macrodiversity on Rician fading channels. *IEEE Transactions on Communications*, 1994, vol. 42, no. 6, pp. 2258–2267. Doi: 10.1109/26.293677
13. Vitetta G. M., Mengali U., Taylor D. P. An error probability formula for non-coherent orthogonal binary FSK with dual diversity on correlated Rician channels. *IEEE Communications Letters*, 1999, vol. 3, no. 2, pp. 43–45. Doi: 10.1109/4234.749357
14. Karagiannidis G. R., Georgopoulos C. J., Kotsopoulos S. A. Outage probability analysis for a Rician signal in L Nakagami interferers with arbitrary parameters. *KICS Journal on Communications Networks*, 1999, vol. 1, no. 1, pp. 26–30. Doi: 10.1109/jcn.1999.6596695
15. Ekanayake N. Equal-gain combining diversity reception of M -ary CPSK signals in Nakagami fading. *IEEE Communications Letters*, 2010, vol. 14, no. 4, pp. 285–287. Doi: 10.1109/lcomm.2010.04.092491
16. Annamalai A., Tellambura C., Bhargava V. K. Equal-gain diversity receiver performance in wireless channels. *IEEE Transactions on Communications*, 2000, vol. 48, no. 10, pp. 1732–1745. Doi: 10.1109/26.871398
17. Rohilla S., Patidar D. K., Soni N. K. Comparative analysis of maximum ratio combining and equal gain combining diversity techniques for WCDMA: a survey. *International Journal of Engineering Inventions*, 2013, vol. 3, no. 1, pp. 72–77.
18. Helstrom C. W. Computing the distribution of sums of random sine waves and of Rayleigh-distributed random variables by saddle-point integration. *IEEE Transactions on Communications*, 1997, vol. 45, no. 11, pp. 1487–1494. Doi: 10.1109/26.649781
19. Baker G. A., Graves-Morris P. *Pade Approximation*. Cambridge, Cambridge University Press, 1996. 746 p. Doi: 10.1017/cbo9780511530074
20. Tuzlukov V. P. *Signal Processing in Radar Systems*. Boca Raton, CRC Press, 2013. 632 p.
21. Abramovitz M., Stegun A. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York, Dover, 1972. 1061 p.
22. Popov V. F. Noise immunity evaluation at diversity Nakagami fading and coherent weight combining. *Omskii nauchnyi vestnik Ser. Pribory, mashiny i tekhnologii* [Scientific Vestnik of the Omsk State University. Series: Equipment, Machinery and Technologies], 2012, vol. 113, no. 3, pp. 309–313 (in Russian).
23. Win M. Z., Mallik R. K., Chrisikos G. Higher order statistics of antenna subset diversity. *IEEE Transaction on Wireless Communications*, 2003, vol. 2, no. 5, pp. 871–875. Doi: 10.1109/twc.2003.816774
24. Bykhovskii M. A. Optimal linear correction of multipath diversity channel. *Elektrosviaz' = Telecommunications and Radio Engineering*, 2011, no. 12, pp. 36–41 (in Russian).
25. Tuzlukov V. P. (ed.). *Communications Systems: New Research*. New York, NOVA Science Publishers Inc., 2013. 423 p.
26. Charash U. Reception through Nakagami fading multipath channels with random delays. *IEEE Transactions on Communications*. 1979, vol. 27, no. 4, pp. 657–670. Doi: 10.1109/tcom.1979.1094444
27. Shamai S., Verdú S. The impact of frequency-flat fading on the spectral efficiency of CDMA. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2001, vol. 47, no. 4, pp. 1302–1327. Doi: 10.1109/18.923717
28. Papoulis A. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. New York, McGraw-Hill, 2002. 852 p.
29. Amindavar H., Ritcey J. A. Rade approximation of probability density functions. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronics Systems*. 1994, vol. 30, no. 2, pp. 416–424. Doi: 10.1109/7.272264
30. Nikitin O. R., Polushin P. A., Girshevich M. V., Piatov V. A. Diversity combining digital signal processing procedure. *Vestnik Riazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta = Vestnik of Ryazan State Radio Engineering University*, 2009, vol. 27, no. 1, pp. 27–32 (in Russian).

Информация об авторе

Тузлуков Вячеслав Петрович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой технической эксплуатации авиационного и радиоэлектронного оборудования, Белорусская государственная академия авиации (ул. Уборевича, 77, 220096, Минск, Республика Беларусь). E-mail: slava.tuzlukov@mail.ru

Information about the author

Tuzlukov P. Vyacheslav – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Technical Maintenance of Aviation and Radio Electronic Equipment, Belarusian State Aviation Academy (77, Ubovich Str., 220096, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: slava.tuzlukov@mail.ru

Н. И. Беленкевич, В. А. Ильинков

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь

СОВМЕСТНОЕ ОПИСАНИЕ СИГНАЛОВ, ЛИНЕЙНЫХ ЗВЕНЬЕВ И РЕАКЦИЙ СИСТЕМ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Аннотация. Основным инструментом проектирования и разработки современных систем телекоммуникаций и радиоэлектроники является математическое моделирование, выполняемое на структурно- и схмотехническом уровнях. Структурно-техническое моделирование используют на начальных этапах проектирования и разработки (научно-исследовательская работа, техническое задание, эскизный и технический проекты). Его результаты определяют структуру и основные параметры качества создаваемой техники. Установлено, что известные программные средства структурно-технического моделирования обладают существенными недостатками из-за отсутствия удобного математического описания сигналов и звеньев. Целью работы являлась разработка математического описания сигналов, линейных звеньев и реакций, обеспечивающего: создание развитых библиотек математических моделей сигналов и линейных звеньев; построение автоматизированных процедур формирования, преобразования и расчета частотно-временных характеристик моделей сигналов, звеньев и реакций.

На базе операторной дробно-рациональной функции специального вида разработано совместное математическое описание, задающее все типы применяемых при моделировании сигналов, линейных звеньев и реакций систем телекоммуникаций и радиоэлектроники, обеспечивающее необходимые преобразования моделей сигналов, звеньев и создание развитых библиотек их математических моделей. Построены математические алгоритмы (де)нормирования, реактансного преобразования и перемножения моделей (не)минимально-фазовых линейных звеньев. Разработаны обобщенные модели сигналов, линейных звеньев и реакций в частотной и временной областях, обеспечивающие создание единых математических алгоритмов и на их основе автоматизированных процедур расчета частотных и временных характеристик сигналов, звеньев и реакций.

Ключевые слова: система, сигнал, звено, реакция, модель, алгоритм

Для цитирования. Беленкевич, Н. И. Совместное описание сигналов, линейных звеньев и реакций систем телекоммуникаций и радиоэлектроники / Н. И. Беленкевич, В. А. Ильинков // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2017. – №4. – С. 93–104.

N. I. Belenkevich, V. A. Ilyinkov

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus

THE COMPATIBLE DESCRIPTION OF SIGNALS, LINEAR LINKS AND RESPONSES OF TELECOMMUNICATIONS AND RADIOELECTRONICS SYSTEMS

Abstract. Mathematical modeling is a basic tool for design and development of modern telecommunications and radioelectronics systems. It is realized on two fundamentally different levels: schematic circuit and block diagram simulation. At the initial stages of design and development of system (i.e. research scientific work, specification of requirements, initial outlay and technical project) simulation on the block diagram level is applied. Its results define the structure and basic parameters of the quality of created facilities. It has been established, that commonly applied software of block diagram simulation has essential flaws, which are resulted from a scarce mathematical description of signals and links. The research described in the article is aimed at working out the mathematical description of signals, linear links and responses. This description will contribute to creating the enhanced library of mathematical models of signals and linear links, as well as automated procedures of formation, transformation and calculation of time-and-frequency characteristics of signals, links and responses.

We suggest a mathematical description of signals, linear links and responses on the basis of specifically shaped operator fractional-rational function. It embodies and epitomizes all types of signals, linear links and responses used in modeling and provides needed transformation and creation of the enhanced library of mathematical models of signals and linear links. Subsequently, it allows creation of mathematical algorithms of normalization, reactance transformation and multiplication of models of minimum-phase and nonminimum-phase linear links, as well as generalized models of signals, linear links and responses in frequency- and time-domains. These generalized models make a basis of single mathematical algorithms and automated procedures of calculation frequency- and time-characteristics of signals, links and responses.

Keywords: system, signal, link, response, model, algorithm

For citation. Belenkevich N. I., Ilyinkov V. A. The compatible description of signals, linear links and responses of telecommunications and radioelectronics systems. *Vestsi Natsyyanal' nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2017, no. 4, pp. 93–104 (in Russian).

Введение. Основным инструментом проектирования и разработки систем телекоммуникаций и радиоэлектроники (СТР) является математическое моделирование, которое существенно интенсифицирует процессы анализа и синтеза; решает задачи, часто невыполнимые другими методами; многократно снижает материальные и временные затраты на создание сложных систем (устройств) при одновременном повышении их качества. При этом различают структурно- и схмотехническое моделирование, выполняемое соответственно на уровнях структурной (функциональной) и принципиальной схем [1–19]. Структурно-техническое моделирование используют на начальных этапах проектирования и разработки (научно-исследовательская работа, техническое задание, эскизный и технический проекты). Его результаты в основном и определяют структуру и основные параметры качества создаваемой техники.

Сравнительный анализ методов, моделей, алгоритмов и программ моделирования СТР [1–13, 20–30] показывает, что известные программные средства структурно-технического моделирования обладают (частично или целиком) следующими существенными недостатками: отсутствие развитых библиотек моделей сигналов и функциональных звеньев, а также автоматизированных процедур формирования и преобразования моделей, большой объем черновой подготовительной работы и значительное время моделирования. При этом отмеченные недостатки – во многом следствие отсутствия удобного математического описания сигналов и звеньев.

Цель работы – создание совместного математического описания сигналов, линейных звеньев и их реакций, обеспечивающего построение автоматизированных процедур формирования, преобразования и расчета частотно-временных характеристик моделей сигналов, звеньев, реакций; разработка развитых библиотек математических моделей сигналов и линейных звеньев.

Математическое описание линейных звеньев СТР. Важнейшей составляющей структурно-технического моделирования СТР является разработка обоснованных требований к частотно-временным характеристикам отдельных функциональных блоков и системы в целом. Ее выполняют посредством моделирования линейных искажений, применяя в качестве моделей блоков (каналов) линейные звенья. Моделирование линейных искажений отличает многообразие и сложность моделей сигналов (воздействий) и звеньев, а также сложность процедуры и большой объем вычислений при нахождении реакций, зависящие от используемых моделей и метода моделирования [24, 28–30]. Ответственным этапом, во многом определяющим конечные результаты моделирования, является выбор метода описания и формирование моделей линейных звеньев разного вида: фильтров нижних (верхних) частот (ФНЧ, ФВЧ), полосовых (заграждающих) фильтров (ПФ, ЗФ), фильтров с несколькими полосами пропускания (задерживания).

С учетом общих принципов, специфики структурно-технического моделирования СТР и свойств известных моделирующих программ математическое описание линейных звеньев должно: удовлетворять условиям физической реализуемости и устойчивости; задавать (не)минимально-фазовые звенья с различной формой частотных характеристик; обеспечивать использование справочной литературы (каталогов математических моделей), все виды и простоту преобразования моделей; хорошо согласовываться с применяемыми методами моделирования и описания сигналов [24, 29, 30].

Известны различные методы описания линейных звеньев: во временной области – импульсной и переходной характеристиками; в частотной области – комплексной передаточной функцией либо амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) (характеристикой рабочего затухания (ХРЗ)) и фазочастотной характеристикой (ФЧХ) (характеристикой группового времени запаздывания (ХГВЗ)); на комплексной плоскости – операторной передаточной функцией $K_Z(p)$ [21–27, 29–31]. Предъявляемым требованиям больше других отвечает последнее описание, задаваемое дробно-рациональной функцией комплексного переменного. Такая модель широко используется в СТР. Однако применяемые формы представления функции $K_Z(p)$ [21–27, 29, 30, 32–34] не позволяют задавать (весьма широко используемые на практике) линейные звенья с кратными полюсами и кратными нулями передаточной функции, недостаточно согласуются с описанием сигналов.

Для расширения возможностей моделирования линейные звенья целесообразно описывать операторной передаточной функцией специального вида

$$K_Z(p) = \frac{A_Z(p)}{C_Z B_Z(p)} = \frac{\prod_{x=1}^{N_{Z3}} (p + a_{Z3x})^{n_{Z3x}} \prod_{y=1}^{N_{Z4}} (p^2 + 2a_{Z4y}p + a_{Z4y}^2 + \omega_{Z4y}^2)^{n_{Z4y}}}{C_Z \prod_{s=1}^{N_{Z1}} (p + a_{Z1s})^{n_{Z1s}} \prod_{l=1}^{N_{Z2}} (p^2 + 2a_{Z2l}p + a_{Z2l}^2 + \omega_{Z2l}^2)^{n_{Z2l}}}, \quad (1)$$

где $B_Z(p)$ – полином Гурвица степени $\nu_Z = \sum_{s=1}^{N_{Z1}} n_{Z1s} + 2 \sum_{l=1}^{N_{Z2}} n_{Z2l}$; $A_Z(p)$ – полином с вещественными

коэффициентами степени $g_Z = \sum_{x=1}^{N_{Z3}} n_{Z3x} + 2 \sum_{y=1}^{N_{Z4}} n_{Z4y}$, нули которого могут лежать в левой,

правой полуплоскости и на мнимой оси; $a_{Z1s} = \text{Re } a_{Z1s} > 0$; $n_{Z1s} = [n_{Z1s}] > 0$; $a_{Z2l} = \text{Re } a_{Z2l} > 0$; $\omega_{Z2l} = \text{Re } \omega_{Z2l} > 0$; $n_{Z2l} = [n_{Z2l}] > 0$; $a_{Z3x} = \text{Re } a_{Z3x}$; $n_{Z3x} = [n_{Z3x}] > 0$; $a_{Z4y} = \text{Re } a_{Z4y}$; $\omega_{Z4y} = \text{Re } \omega_{Z4y} > 0$; $n_{Z4y} = [n_{Z4y}] > 0$; $g_Z \leq \nu_Z$; $C_Z = \text{Re } C_Z \neq 0$ – масштабный множитель; коэффициенты a_{Z1s} , a_{Z3x} , a_{Z2l} и ω_{Z2l} , a_{Z4y} и ω_{Z4y} , определяющие нули и полюсы функции $K_Z(p)$, образуют соответственно одномерные A_{Z1} , A_{Z3} и двумерные A_{Z2} , A_{Z4} массивы чисел.

Моделирование линейных искажений включает различные процедуры преобразования математических моделей: денормирование; преобразование модели ФНЧ-прототипа в модели ФВЧ, ПФ, ЗФ, фильтра с несколькими полосами пропускания (задерживания); перемножение моделей [24, 27, 29–32]. Эти процедуры, за исключением денормирования, известные моделирующие программы не реализуют вследствие недостатков используемого описания звеньев. В результате их приходится выполнять вручную, что представляет громоздкий и трудоемкий процесс, особенно при высоких порядках передаточной функции. Поэтому автоматизация процедур преобразования моделей весьма актуальна при создании эффективных моделирующих программ.

Операция денормирования модели $K_Z(p)$ соответствует замене в (1) переменной p на p/ω_{Dd} (ω_{Dd} – нормирующая частота: граничная частота полосы пропускания ФНЧ (ФВЧ); центральная частота полосы пропускания (задерживания) ПФ (ЗФ)) [27, 32]. Выполняя необходимые преобразования, приходим к денормированной модели звена

$$K_{Zd}(p) = \frac{A_{Zd}(p)}{C_{Zd} B_{Zd}(p)} = \frac{\prod_{xd=1}^{N_{Z3d}} (p + a_{Z3xd})^{n_{Z3xd}} \prod_{yd=1}^{N_{Z4d}} (p^2 + 2a_{Z4yd}p + a_{Z4yd}^2 + \omega_{Z4yd}^2)^{n_{Z4yd}}}{C_{Zd} \prod_{sd=1}^{N_{Z1d}} (p + a_{Z1sd})^{n_{Z1sd}} \prod_{ld=1}^{N_{Z2d}} (p^2 + 2a_{Z2ld}p + a_{Z2ld}^2 + \omega_{Z2ld}^2)^{n_{Z2ld}}}, \quad (2)$$

где $a_{Z1sd} = a_{Z1s}\omega_{Dd}$, $n_{Z1sd} = n_{Z1s}$, $N_{Z1d} = N_{Z1}$; $a_{Z2ld} = a_{Z2l}\omega_{Dd}$, $\omega_{Z2ld} = \omega_{Z2l}\omega_{Dd}$, $n_{Z2ld} = n_{Z2l}$, $N_{Z2d} = N_{Z2}$, $a_{Z3xd} = a_{Z3x}\omega_{Dd}$, $n_{Z3xd} = n_{Z3x}$, $N_{Z3d} = N_{Z3}$; $a_{Z4yd} = a_{Z4y}\omega_{Dd}$, $\omega_{Z4yd} = \omega_{Z4y}\omega_{Dd}$, $n_{Z4yd} = n_{Z4y}$, $N_{Z4d} = N_{Z4}$; $C_{Zd} = C_Z \omega_{Dd}^{g_Z - \nu_Z}$.

Преобразование модели ФНЧ-прототипа в модели других фильтров выполняют трансформированием нулей и полюсов его передаточной функции $K_Z(p)$ реактансными или нереактансными преобразованиями. Причем первые используют для получения звеньев с характеристиками ФВЧ и частотно-симметричными характеристиками ПФ и ЗФ, вторые (например, преобразования Зданека) – в случае ПФ (ЗФ) с частотно-несимметричными характеристиками [24, 27]. На практике в основном применяются реактансные преобразования, являющиеся наиболее простыми. Согласно им переход к ФВЧ соответствует замене в модели $K_Z(p)$ (1) ФНЧ-прототипа переменной p на $1/p$ [27, 32]. Выполняя необходимые преобразования, получаем передаточную функцию $K_{Zd}(p)$ в виде (2), в которой:

$$a_{Z1sd} = a_{Z1s}^{-1}, n_{Z1sd} = n_{Z1s}, N_{Z1d} = N_{Z1}, C_{Z1sd} = a_{Z1s}^{n_{Z1s}}; a_{Z2ld} = a_{Z2l} (a_{Z2l}^2 + \omega_{Z2l}^2)^{-1},$$

$$\omega_{Z2ld} = \omega_{Z2l} (a_{Z2l}^2 + \omega_{Z2l}^2)^{-1}, n_{Z2ld} = n_{Z2l}, N_{Z2d} = N_{Z2}, C_{Z2ld} = (a_{Z2l}^2 + \omega_{Z2l}^2)^{n_{Z2l}};$$

$$\begin{aligned}
 a_{Z3xd} &= \begin{cases} a_{Z3x}^{-1} & (a_{Z3x} \neq 0 \cup xd \leq N_{Z3d} - 1) \\ 0 & (a_{Z3x} \neq 0 \cup xd = N_{Z3d}) \\ 0 & (a_{Z3x} = 0 \cup xd \leq N_{Z3d}) \end{cases}, \quad n_{Z3xd} = \begin{cases} n_{Z3x} & (a_{Z3x} \neq 0 \cup xd \leq N_{Z3d} - 1) \\ v_Z - g_Z & (a_{Z3x} \neq 0 \cup xd = N_{Z3d}) \\ v_Z - g_Z & (a_{Z3x} = 0 \cup xd \leq N_{Z3d}) \end{cases}, \\
 N_{Z3d} &= \begin{cases} N_{Z3} + 1 & (a_{Z3x} \neq 0) \\ N_{Z3} & (a_{Z3x} = 0) \end{cases}, \quad C_{Z3xd} = \begin{cases} a_{Z3x}^{-n_{Z3x}} & (a_{Z3x} \neq 0 \cup xd \leq N_{Z3d} - 1) \\ 1 & (a_{Z3x} \neq 0 \cup xd = N_{Z3d}) \\ 1 & (a_{Z3x} = 0 \cup xd \leq N_{Z3d}) \end{cases}; \quad (3) \\
 a_{Z4yd} &= a_{Z4y} (a_{Z4y}^2 + \omega_{Z4y}^2)^{-1}, \quad \omega_{Z4yd} = \omega_{Z4y} (a_{Z4y}^2 + \omega_{Z4y}^2)^{-1}, \quad n_{Z4yd} = n_{Z4y}, \quad N_{Z4d} = N_{Z4}, \\
 C_{Z4yd} &= (a_{Z4y}^2 + \omega_{Z4y}^2)^{-n_{Z4y}}; \quad C_{Zd} = C_Z \prod_{sd=1}^{N_{Z1d}} C_{Z1sd} \prod_{ld=1}^{N_{Z2d}} C_{Z2ld} \prod_{xd=1}^{N_{Z3d}} C_{Z3xd} \prod_{yd=1}^{N_{Z4d}} C_{Z4yd}.
 \end{aligned}$$

Переход к ПФ (ЗФ) достигается заменой в передаточной функции (1) переменной p на $\alpha(p+1/p)((\alpha(p+1/p))^{-1})$ (α – параметр преобразования) [27, 32]. Выполняя последующие преобразования, в обоих случаях приходим к моделям в виде (2), параметры которых связаны с параметрами $K_Z(p)$ несложными соотношениями. Отсюда следует, что денормирование, преобразование ФНЧ \rightarrow ФВЧ, ФНЧ \rightarrow ПФ и ФНЧ \rightarrow ЗФ приводят к совпадающим по форме передаточным функциям. Последнее превращает операцию перемножения произвольного числа (де)нормированных моделей с характеристиками ФНЧ, ФВЧ, ПФ и ЗФ в элементарную операцию объединения соответствующих одномерных A_{Z1} , A_{Z3} и двумерных A_{Z2} , A_{Z4} массивов исходных звеньев. Перемножением же можно получить модель фильтра с несколькими полосами пропускания или(и) задерживания.

Таким образом, модель (1) полностью удовлетворяет предъявляемым требованиям. Она описывает все типы (не)минимально-фазовых линейных звеньев, в том числе с кратными полюсами и нулями передаточной функции, обеспечивает использование справочной литературы, например [32]. Приводимые в последней математические модели ФНЧ-прототипов являются частным случаем выражения (1) при условии $N_{Z3} = a_{Z4y} = 0, n_{Z4y} = 1$ ($y = \overline{1, N_{Z4}}$). Как установлено, при всех преобразованиях моделей вновь получаемая передаточная функция по виду совпадает с исходной. Это важное дополнительное свойство предлагаемого описания. Оно обеспечивает построение автоматизированных процедур формирования, преобразования и расчета частотно-временных характеристик моделей, создание развитых библиотек математических моделей (не)минимально-фазовых линейных звеньев.

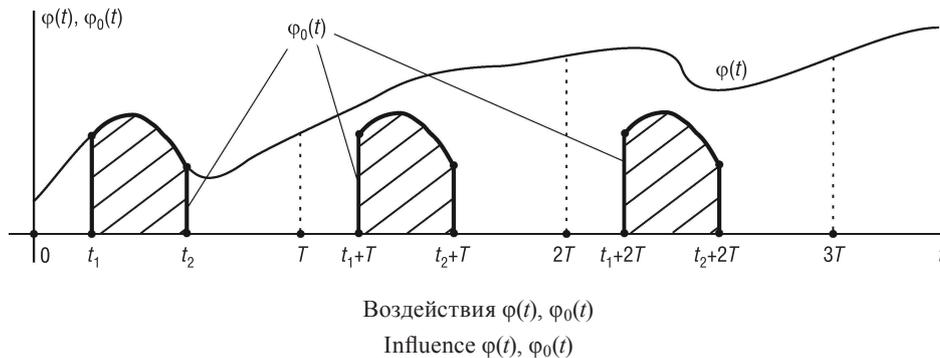
Математическое описание сигналов СТР. При моделировании линейных искажений ответственным этапом является также выбор метода описания и формирование моделей используемых в качестве воздействий континуальных детерминированных сигналов. Понятно, что математическое описание последних должно обеспечивать простоту формирования и преобразования моделей; хорошо согласовываться с применяемыми методом моделирования и методом описания звеньев [24, 28].

Известны различные методы описания континуальных детерминированных сигналов: во временной области, в частотной области, на комплексной плоскости [20, 22–26, 28, 33–35]. Предъявляемым требованиям больше других отвечает описание сигналов на основе (одностороннего, двустороннего) преобразования Лапласа – лапласовскими изображениями [20, 22, 23, 25]. Отметим также, что при моделировании линейных искажений в качестве воздействий используются как периодические, так и непериодические (финитные, бесконечно протяженные) сигналы. С учетом изложенного введем в рассмотрение образующую действительную функцию $\varphi(t)$, которая: определена на неограниченном полуоткрытом интервале $[0, \infty)$; имеет все производные и $|\varphi^{(u)}(t)| \leq ML^{u+1}$ ($u = \overline{0, \infty}$). Построим на ее основе непериодические финитные $\varphi_{iT}(t)$, непериодические бесконечно протяженные $\alpha_i(t)$ и периодические $\varphi_i(t)$ сигналы (рисунок):

$$\varphi_{iT}(t) = \begin{cases} \varphi(t), & [(i-1)(i-2)t_1/2, t_1 + (i-1)^2(t_2 - t_1)] \\ 0, & (-\infty, (i-1)(i-2)t_1/2) \cup [t_1 + (i-1)^2(t_2 - t_1), \infty) \end{cases}$$

$$\alpha_i(t) = \begin{cases} \varphi(t), & [i(2-i)t_1 + i(i-1)t_2/2, \infty) \\ 0, & (-\infty, i(2-i)t_1 + i(i-1)t_2/2) \end{cases}, \varphi_i(t) = \begin{cases} \varphi_{iT}(t), & [0, T) \\ \varphi_i(t+T), & (-\infty, \infty) \end{cases}, \quad (4)$$

где $0 \leq t_1 < t_2 \leq T, i = 0, 1, 2$.



Далее, основываясь на известной теореме [22, 23], устанавливаем, что при сформулированных требованиях к образующей функции $\varphi(t)$ лапласовские изображения рассматриваемых непериодических и периодических сигналов представляются в виде [28]

$$\varphi_{0T}(t) \Leftrightarrow \bar{\varphi}_{0T}(p) = S_2(p)e^{-pt_2} - S_1(p)e^{-pt_1},$$

$$\varphi_{1(2)T}(t) \Leftrightarrow \bar{\varphi}_{1(2)T}(p) = S_{1(2)}(p)e^{-pt_{1(2)}} - S_0(p),$$

$$\alpha_0(t) \Leftrightarrow \bar{\alpha}_0(p) = -S_0(p) = -\lim_{t_1 \rightarrow 0} S_1(p) = -\lim_{t_2 \rightarrow 0} S_2(p), \quad (5)$$

$$\alpha_{1(2)}(t) \Leftrightarrow \bar{\alpha}_{1(2)}(p) = -S_{1(2)}(p)e^{-pt_{1(2)}},$$

$$\varphi_{0(1,2)}(t) \Leftrightarrow \bar{\varphi}_{0(1,2)}(p) = \bar{\varphi}_{0(1,2)T}(p)(1 - e^{-pT})^{-1},$$

где функции комплексного переменного $S_{0(1,2)}(p)$ аналитичны в области $|p| > L$ и стремятся к нулю при $p \rightarrow \infty$ равномерно относительно $\arg p$. Причем, согласно следствию из упомянутой теоремы [22, 23], если $S_0(p)$ – дробно-рациональная функция, то функции $S_{1(2)}(p)$ – тоже дробно-рациональны, и многочлены их знаменателей совпадают с многочленом знаменателя функции $S_0(p)$.

Учитывая последнее, модели (4) и (5), для расширения возможностей моделирования сигналы $\varphi_{iT}(t), \alpha_i(t)$ и $\varphi_i(t)$ целесообразно описывать с помощью операторных функций $S_i(p)$ ($i = 0, 1, 2$) вида

$$S_i(p) = \frac{A_i(p)}{C_i B_0(p)} = \frac{\prod_{x=1}^{N_{i3}} (p + a_{i3x})^{n_{i3x}} \prod_{y=1}^{N_{i4}} (p^2 + 2a_{i4y}p + a_{i4y}^2 + \omega_{i4y}^2)^{n_{i4y}}}{C_i \prod_{s=1}^{N_{01}} (p + a_{01s})^{n_{01s}} \prod_{l=1}^{N_{02}} (p^2 + 2a_{02l}p + a_{02l}^2 + \omega_{02l}^2)^{n_{02l}}}, \quad (6)$$

где $B_0(p), A_i(p)$ – полиномы с вещественными коэффициентами (степени соответственно $\nu_0 = \sum_{s=1}^{N_{01}} n_{01s} + 2 \sum_{l=1}^{N_{02}} n_{02l}$ и $g_i = \sum_{x=1}^{N_{i3}} n_{i3x} + 2 \sum_{y=1}^{N_{i4}} n_{i4y}$), нули которых могут лежать в левой, правой полуплоскости и на мнимой оси; $a_{01s} = \text{Re} a_{01s}; n_{01s} = [n_{01s}] > 0; a_{02l} = \text{Re} a_{02l}; \omega_{02l} = \text{Re} \omega_{02l} > 0; n_{02l} = [n_{02l}] > 0; a_{i3x} = \text{Re} a_{i3x}; n_{i3x} = [n_{i3x}] > 0; a_{i4y} = \text{Re} a_{i4y}; \omega_{i4y} = \text{Re} \omega_{i4y} > 0; n_{i4y} = [n_{i4y}] > 0; g_i \leq \nu_0; C_i = \text{Re} C_i \neq 0$ – масштабные множители; коэффициенты $a_{01s}, a_{03x}, a_{13x}, a_{23x}, a_{02l}$ и ω_{02l} ,

a_{04y} и ω_{04y} , a_{14y} и ω_{14y} , a_{24y} и ω_{24y} , определяющие нули и полюсы функции $S_i(p)$, образуют соответственно одномерные A_{01} , A_{03} , A_{13} , A_{23} и двумерные A_{02} , A_{04} , A_{14} , A_{24} массивы чисел.

При моделировании в качестве воздействий широко применяются как простые, так и составные сигналы. К простым принято относить сигналы типов $\varphi_{iT}(t)$, $\alpha_i(t)$ и $\varphi_i(t)$ (соответственно непериодические финитные, непериодические бесконечно протяженные и периодические), построенные на основе одной образующей функции $\varphi(t)$ (см. рисунок). Составные сигналы (компонитные, компонентные) – линейная суперпозиция двух и более простых сигналов, построенных обычно из разных образующих функций.

Анализ задач моделирования линейных искажений показывает следующее. При формировании сигналов, не сужая возможностей моделирования, достаточно использовать в качестве образующих элементарные функции: линейную $y_1(t) = kt + b$, степенную $y_2(t) = t^n$, показательную $y_3(t) = a^t$, тригонометрическую $y_4(t) = \cos(\omega t + \alpha)$ [24, 33, 34]. При таком подходе лапласовские изображения сигналов представляются с помощью операторных функций вида (6). Дополнительно при формировании сигналов, как и в случае звеньев, широко применяются процедуры преобразования математических моделей. Обычно их реализуют с помощью известных свойств (теорем) линейности, подобия, смещения, запаздывания, дифференцирования изображения, дифференцирования и интегрирования оригинала [20, 24]. Последующий анализ показывает, что все упомянутые преобразования приводят к моделям сигналов, представляемым функциями (6). Для демонстрации этого возьмем низкочастотный сигнал $f_1(t) = \cos(\Omega t)$ (типа $\alpha_0(t)$; см. (5) и рисунок), имеющий изображение $F_1(p) = p / (p^2 + \Omega^2)$. Перейдем к соответствующему ему радиосигналу $f_2(t) = f_1(t) = \cos(\omega_0 t) = f_1(t)(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})/2$. Далее, используя теоремы смещения и линейности, получаем: $f_2(t) \Leftrightarrow F_2(p) = p(p^2 + \omega_0^2 + \Omega^2) / ((p^2 + (\omega_0 + \Omega)^2)(p^2 + (\omega_0 - \Omega)^2))$.

Таким образом, описание в форме (6) задает все применяемые типы сигналов, обеспечивает необходимые преобразования их математических моделей и создание развитых библиотек последних, полностью согласуется с описанием (1) линейных звеньев.

Совместное математическое описание сигналов, линейных звеньев и реакций СТР.

Моделирование линейных искажений в СТР основано на нахождении реакции $U_{\text{вых}}(t)$ исследуемого звена (канала) на континуальное детерминированное воздействие $U_{\text{вх}}(t)$. В общем случае это возможно осуществить методами решения дифференциальных уравнений, разностных рекуррентных соотношений, интеграла Дюамеля, спектральным и операционным методами [20, 22–26, 33–35]. Методы отличаются используемым математическим аппаратом, каждый из них имеет свои преимущества и недостатки, степень проявления которых определяется конкретными условиями применения. Поэтому решение поставленной задачи во многом зависит от правильного выбора метода математического моделирования.

Применительно к предлагаемому описанию сигналов (6) и звеньев (1) целесообразно использовать операционный метод моделирования. Согласно ему реакция $U_{\text{вых}}(t)$ находится обратным преобразованием Лапласа [20]

$$U_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} \bar{U}_{\text{вых}}(p) e^{pt} dp, \quad (7)$$

где $\bar{U}_{\text{вых}}(p) = \bar{U}_{\text{вх}}(p) K_Z(p)$ – изображение реакции; путь интегрирования лежит правее особых точек функции $\bar{U}_{\text{вых}}(p)$ (целая трансцендентная функция e^{pt} аналитична во всей открытой комплексной плоскости). Поскольку функции (1) и (6) являются мероморфными, вычисление интеграла (7) Римана – Меллина выполняется с помощью обобщенной теоремы разложения, то есть сводится к простой операции нахождения вычетов в полюсах функции $M(p) = \bar{U}_{\text{вых}}(p) e^{pt}$ [20, 24]. Поэтому аппарат операционного исчисления оптимально согласуется с предлагаемым описанием сигналов и звеньев. Он позволяет сравнительно просто получить точное аналитическое выражение реакции $U_{\text{вых}}(t)$, для определения численных значений которой необходимы, как правило, небольшие объем оперативной памяти и машинное время. Дополнительным преимуществом этого метода моделирования является возможность его использования при воздействиях $U_{\text{вх}}(t)$, не удовлетворяющих условию абсолютной интегрируемости. Все виды применяемых на практике функций представимы интегралом Лапласа.

Совместное использование моделей (1), (6) и операционного метода позволяет ввести в рассмотрение базовую операторную функцию специального вида

$$R_{00}(p) = \frac{A(p)}{CB(p)} = \frac{\prod_{x=1}^{N_3} (p + a_{3x})^{n_{3x}} \prod_{y=1}^{N_4} (p^2 + 2a_{4y}p + a_{4y}^2 + \omega_{4y}^2)^{n_{4y}}}{C \prod_{s=1}^{N_1} (p + a_{1s})^{n_{1s}} \prod_{l=1}^{N_2} (p^2 + 2a_{2l}p + a_{2l}^2 + \omega_{2l}^2)^{n_{2l}}}, \quad (8)$$

где

$$\begin{cases} \left\{ \begin{matrix} a_{1s} \\ n_{1s} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} a_{Z1s} (1 \leq s \leq N_{Z1}) \cup a_{01s} (N_{Z1} + 1 \leq s \leq N_{Z1} + N_{01}); h_Z = 0, 1; \\ n_{Z1s} \\ n_{01s} \end{matrix} \right\}; \\ \left\{ \begin{matrix} a_{2l} \\ n_{2l} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} a_{Z2l} (1 \leq l \leq N_{Z2}) \cup a_{02l} (N_{Z2} + 1 \leq l \leq N_{Z2} + N_{02}); h_i = 0, 1 (i = 0, 1, 2); \\ n_{Z2l} \\ n_{02l} \end{matrix} \right\}; \\ \left\{ \begin{matrix} a_{3x} \\ n_{3x} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} a_{Z3x} (1 \leq x \leq N_{Z3}) \cup a_{03x} (N_{Z3} + 1 \leq x \leq N_{Z3} + N_{03}) \cup \\ n_{Z3x} \\ n_{13x} (N_{Z3} + N_{03} + 1 \leq x \leq N_{Z3} + N_{03} + N_{13}) \cup \\ n_{23x} (N_{Z3} + N_{03} + N_{13} + 1 \leq x \leq N_{Z3} + N_{03} + N_{13} + N_{23}); \\ a_{4y} \\ n_{4y} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} a_{Z4y} (1 \leq y \leq N_{Z4}) \cup a_{04y} (N_{Z4} + 1 \leq y \leq N_{Z4} + N_{04}) \cup \\ n_{Z4y} \\ n_{14y} (N_{Z4} + N_{04} + 1 \leq y \leq N_{Z4} + N_{04} + N_{14}) \cup \\ n_{24y} (N_{Z4} + N_{04} + N_{14} + 1 \leq y \leq N_{Z4} + N_{04} + N_{14} + N_{24}). \end{matrix} \right.$$

$$C = C_Z^{h_Z} \cdot C_0^{h_0} \cdot C_1^{h_1} \cdot C_2^{h_2};$$

Очевидно, функция (8) образована элементарной (легко программируемой) операцией объединения соответствующих массивов коэффициентов функций $K_Z(p)$ (1) и $S_i(p)$ (6). Поэтому

$$R_{00}(p) = \begin{cases} R_Z(p) = K_Z(p) & (h_Z = 1, h_0 = h_1 = h_2 = 0, N_{0i} = N_{1j} = N_{2j} = 0) \\ R_0(p) = S_0(p) & (h_0 = 1, h_Z = h_1 = h_2 = 0, N_{Zi} = N_{1j} = N_{2j} = 0) \\ R_1(p) = S_1(p) & (h_1 = 1, h_Z = h_0 = h_2 = 0, N_{Zi} = N_{0j} = N_{2j} = 0) \\ R_2(p) = S_2(p) & (h_2 = 1, h_Z = h_0 = h_1 = 0, N_{Zi} = N_{0j} = N_{1j} = 0) \\ R_{0Z}(p) = S_0(p)K_Z(p) & (h_0 = h_Z = 1, h_1 = h_2 = 0, N_{13} = N_{14} = N_{23} = N_{24} = 0) \\ R_{1Z}(p) = S_1(p)K_Z(p) & (h_1 = h_Z = 1, h_0 = h_2 = 0, N_{03} = N_{04} = N_{23} = N_{24} = 0) \\ R_{2Z}(p) = S_2(p)K_Z(p) & (h_2 = h_Z = 1, h_0 = h_1 = 0, N_{03} = N_{04} = N_{13} = N_{14} = 0) \end{cases}; \quad (9)$$

$$i = \overline{1, 4}, \quad j = 3, 4.$$

Анализ полученных результатов (см. модели (1), (5), (6), (8) и (9)) показывает, что, основываясь на базовой функции $R_{00}(p)$, можно предложить совместное математическое описание (на комплексной плоскости) в виде

$$R(p) = (R_{2Z}(p)e^{-pt_2} - R_{1Z}(p)e^{-pt_1}) (1 - e^{-pT})^{-1}. \quad (10)$$

Модель (10) задает все типы применяемых при моделировании сигналов, линейных звеньев и реакций СТР, она полно описывает их частотные и временные свойства и характеристики. Действительно, подстановкой $p = j\omega$ выполняется переход к функции

$$R(j\omega) = (R_{2Z}(j\omega)e^{-j\omega t_2} - R_{1Z}(j\omega)e^{-j\omega t_1}) (1 - e^{-j\omega T})^{-1}, \quad (11)$$

которая представляет собой обобщенную модель сигналов, звеньев и реакций в частотной области. При различных сочетаниях параметров $h_Z, h_i, N_{Z1} - N_{Z4}, N_{i1} - N_{i4}$ ($i = 0, 1, 2$) и дополнительных предельных переходах при $t_1 \rightarrow 0, t_2 \rightarrow \infty$ и $T \rightarrow \infty$ она описывает комплексную передаточную функцию $K_Z(j\omega)$ моделируемого звена, спектральные плотности непериодических финитных $\varphi_{0T}(t), \varphi_{2T}(t)$, непериодических бесконечно протяженных $\alpha_0(t), \alpha_1(t)$, периодических $\varphi_0(t), \varphi_2(t)$ воздействий, спектральные плотности реакций звена на указанные воздействия (см. формулы (5), (9), рисунок). Детальная реализация обобщенной модели (11) позволяет создать единый математический алгоритм и на его основе автоматизированную процедуру расчета частотных характеристик (АЧХ, ФЧХ, ХРЗ, ХГВЗ) линейных звеньев, амплитудных и фазовых спектров сигналов и реакций.

Рассмотрим характеристики во временной области.

Согласно операционному методу [20, 24, 33] временные характеристики (импульсная $g(t)$, переходная $h(t)$) линейного звена и его реакций на непериодические финитные $\varphi_{iT}(t)$ и непериодические бесконечно протяженные $\alpha_i(t)$ воздействия представляются конечной суммой слагаемых (в замкнутом виде), число которых определяется количеством полюсов базовой функции $R_{00}(p)$ (8). Что касается реакции на периодические воздействия $\varphi_i(t)$, то они определяются суммой вычетов в бесконечном числе полюсов (нули уравнения $1 - e^{-pT} = 0$) и представляются тригонометрическим рядом Фурье (в незамкнутом виде) [20]. При этом известно, что корректное применение ряда Фурье в задачах моделирования искажений, помимо значительных вычислительных затрат (обусловленных плохой сходимостью тригонометрических рядов вообще), сопряжено с проблемой оценки сходимости решения и его точности [35]. Получить такую математическую оценку в большинстве случаев затруднительно. Кроме того, при переходе от периодического воздействия к непериодическому модель реакции в форме ряда Фурье теряет силу и в этом смысле не обладает общностью. В результате при необходимости одновременного использования периодических и непериодических воздействий приходится применять разные модели реакций и соответственно разные алгоритмы и программы расчетов, что на практике весьма неудобно. Учитывая изложенное, реакции на периодические воздействия $\varphi_i(t)$ целесообразно тоже представлять в замкнутом виде.

Известные методы представления в замкнутом виде реакции линейной системы (звена) на периодическое воздействие основаны на преобразовании (сворачивании) тригонометрического ряда одним из методов гармонического синтеза [35] либо на непосредственном решении векторного (скалярного) дифференциального уравнения пространства состояний и последующем представлении реакции сверткой воздействия и периодической функции Грина [36, 37] или в виде интегрального преобразования воздействия с ядром, содержащим матрицу перехода [38–40]. Они отличаются сложностью, громоздкими преобразованиями, значительными даже для простейших воздействий и невысоких порядков дифференциального уравнения (передаточной функции), плохим согласованием с используемым описанием свойств звеньев, поэтому практически не применяются.

Отмеченных недостатков лишен метод, изложенный в [22, 23], который является дальнейшим развитием операционного метода. Применяя его к решаемой задаче, с учетом моделей (1), (4)–(6), (8) и (9) устанавливаем, что реакцию $\psi_0(t)$ линейного звена на периодическое воздействие $\varphi_0(t)$ (см. рисунок) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \psi_{0L} \\ \psi_{0B} \\ \psi_{0U} \end{Bmatrix} &= -\sum_{p_{Si}} \operatorname{res} \left(R_{0Z}(p) e^{pt} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) + \sum_{p_{Kz}} \operatorname{res} \left(\frac{R_{1Z}(p) e^{p(t-t_1)}}{1 - e^{-pT}} \begin{Bmatrix} 1 \\ e^{-pT} \\ e^{-pT} \end{Bmatrix} \right) - \\ &- \sum_{p_{Kz}} \operatorname{res} \left(\frac{R_{2Z}(p) e^{p(t-t_2)}}{1 - e^{-pT}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ e^{-pT} \end{Bmatrix} \right), \quad \psi_0(t) = \begin{cases} \psi_{0L}(t), & (0, t_1) \\ \psi_{0B}(t), & (t_1, t_2) \\ \psi_{0U}(t), & (t_2, T) \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

где первая сумма вычетов берется по полюсам p_{Si} функций $S_i(p)$, вторая и третья – по полюсам p_{Kz} функции $K_Z(p)$.

Модель (12), в отличие от ряда Фурье, описывает реакцию в замкнутом виде, является результатом разложения по конечной неортогональной системе функций, образованной из «собственных функций воздействия» $e^{pS_i t}$ и «собственных функций линейного звена» $e^{pKz t}$. Использование ее при моделировании уменьшает объем вычислений, устраняет свойственные применению тригонометрического ряда проблемы улучшения сходимости и оценки точности решения, повышает наглядность результата. Последующий анализ показывает, что по своей сути она является обобщенной моделью сигналов, линейных звеньев и реакций во временной области. Аналогично модели (11) в частотной области, при различных сочетаниях параметров $h_z, h_i, N_{z1} - N_{z4}, N_{i1} - N_{i4}$ и дополнительных предельных переходах при $t_1 \rightarrow 0, t_2 \rightarrow \infty$ и $T \rightarrow \infty$ она описывает временные характеристики линейного звена, все воздействия (см. рисунок) и реакции на последние. Детальная реализация обобщенной модели (12) позволяет создать единый математический алгоритм и на его основе автоматизированную процедуру расчета временных характеристик сигналов, звеньев и их реакций.

Заключение. На базе операторной дробно-рациональной функции специального вида предложено совместное математическое описание, задающее все типы применяемых при моделировании сигналов, линейных звеньев и реакций СТР, обеспечивающее необходимые преобразования моделей сигналов и звеньев, создание развитых библиотек их математических моделей. Построены математические алгоритмы денормирования, реактансного преобразования и перемножения моделей (не)минимально-фазовых линейных звеньев. Построены обобщенные модели сигналов, линейных звеньев и реакций в частотной и временной областях, обеспечивающие создание единых математических алгоритмов и на их основе автоматизированных процедур расчета частотных и временных характеристик сигналов, звеньев и реакций.

Список использованных источников

1. Трухин, М.П. Основы компьютерного проектирования и моделирования радиоэлектронных средств: учеб. пособие для вузов / М.П. Трухин. – М.: Горячая линия-Телеком, 2015. – 440 с.
2. Колесов, Ю.Б. Моделирование систем: объектно-ориентированный подход: учеб. пособие / Ю.Б. Колесов, Ю.Б. Сениченков. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 192 с.
3. Сирота, А.А. Компьютерное моделирование и оценка эффективности сложных систем: учеб. пособие / А.А. Сирота. – М.: Техносфера, 2006. – 280 с.
4. Васильев, К.К. Математическое моделирование систем связи: учеб. пособие / К.К. Васильев, М.Н. Служивый. – 2-е изд., перераб. и доп. – Ульяновск: УлГТУ, 2010. – 170 с.
5. Шелухин, О.И. Моделирование информационных систем: учеб. пособие / О.И. Шелухин, А.М. Тенякшев, А.В. Осин; под ред. О.И. Шелухина. – М.: Радиотехника, 2005. – 368 с.
6. Голяницкий, И.А. Математические модели и методы в радиосвязи: учеб. пособие / И.А. Голяницкий; под ред. Ю.А. Громакова. – М.: Эко-Трендз, 2005. – 440 с.
7. Математическое моделирование систем беспроводной связи / [А.С. Вершинин и др.]; М-во образования и науки Рос. Федерации, Федеральное гос. авт. образовательное учреждение высш. образования «Нац. исслед. Томский политехнический ун-т». – Томск: Изд-во Том. политехн. ун-та, 2014. – 163 с.
8. Солонина, А.И. Цифровая обработка сигналов. Моделирование в Simulink: учеб. пособие / А.И. Солонина. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012. – 432 с.
9. Солонина, А.И. Цифровая обработка сигналов. Моделирование в MatLab: учеб. пособие / А.И. Солонина, С.М. Арбузов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008. – 816 с.
10. Гонсалес, Р. Цифровая обработка изображений в среде MATLAB : пер. с англ. / Р. Гонсалес, Р. Вудс, С. Эддинс. – М.: Техносфера, 2006. – 616 с.
11. Дьяконов, В.П. Mathematica 4.1/4.2/5.0 в математических и научно-технических расчетах / В.П. Дьяконов. – М.: Солон-Пресс, 2004. – 696 с.
12. Аладьев, В.З. Расширение функциональной среды системы Mathematica / В.З. Аладьев, Д.С. Гринь. – Херсон: Олди-Плюс, 2012. – 552 с.
13. Загидуллин, Р.Ш. SystemView. Системотехническое моделирование устройств обработки сигналов / Р.Ш. Загидуллин, С.Н. Карутин, В.Б. Стешенко. – М.: Горячая линия-Телеком, 2005. – 294 с.
14. Фриск, В.В. Основы теории цепей. Использование пакета Microwave Office для моделирования электрических цепей на персональном компьютере: учеб. пособие для вузов / В.В. Фриск. – М.: Солон-Пресс, 2004. – 160 с.
15. Евдокимов, Ю.К. LabVIEW для радиоинженера: от виртуальной модели до реального прибора: практическое руководство для работы в программной среде LabVIEW: учеб. пособие / Ю.К. Евдокимов, В.Р. Линдваль, Г.И. Щербаков. – М.: ДМК, 2007. – 400 с.
16. Карлашук, В.И. Электронная лаборатория на IBM PC: лаборатор. практикум на Electronics Workbench и VisSim по элементам телекоммуникационных систем / В.И. Карлашук. – М.: Солон-Пресс, 2005. – 480 с.

17. Шестеркин, А. Н. Система моделирования и исследования радиоэлектронных устройств Multisim 10 / А. Н. Шестеркин. – М.: ДМК Пресс, 2012. – 360 с.
18. Амелина, М. А. Программа схемотехнического моделирования Micro-Cap 8 / М. А. Амелина, С. А. Амелин. – М.: Горячая линия-Телеком, 2007. – 464 с.
19. Болотовский, Ю. И. OrCAD 9.x. OrCAD 10.x. Практика моделирования / Ю. И. Болотовский, Г. И. Таназлы. – М.: Солон-Пресс, 2008. – 208 с.
20. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного: учеб. для вузов / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – Изд. 6-е, стереотип. – СПб.: Лань, 2002. – 688 с.
21. Bracken, E. S-Domain Methods for Simultaneous Time and Frequency Characterization of Electromagnetic Devices / E. Bracken, S. Din-Kow, Z. Cendes // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1998. – Vol. 46, №9. – P. 1277–1290/
22. Ильинков, В. А. Метод расчета реакции линейной системы на периодическое воздействие / В. А. Ильинков // Радиотехника. – 1990. – № 10. – С. 14–16.
23. Ильинков, В. А. Метод расчета реакции линейной системы на периодическое и непериодическое воздействие / В. А. Ильинков, Н. И. Ильинкова // Вестн. БГУ. Сер. 1: Физика, математика, информатика. – 1999. – № 3. – С. 33–38.
24. Ильинков, В. А. Моделирование линейных свойств звеньев и сигналов в телекоммуникационных системах: учеб. пособие / В. А. Ильинков, Н. И. Беленкевич, В. Е. Романов. – Минск: БГУИР, 2005. – 102 с.
25. Гоноровский, И. С. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. пособие для вузов / И. С. Гоноровский. – 5-е изд., испр. и доп. – М.: Дрофа, 2006. – 720 с.
26. Баскаков, С. И. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. для вузов / С. И. Баскаков. – 4-е изд., испр. и доп. – М.: Ленанд, 2016. – 528 с.
27. Современная теория фильтров и их проектирование: пер. с англ. / под ред. Г. Темеша, С. Митра. – М.: Мир, 1977. – 560 с.
28. Ильинков, В. А. Математическое моделирование сигналов систем телекоммуникаций / В. А. Ильинков, Н. И. Беленкевич // Изв. Белорус. инженер. акад. – 2000. – № 1(9)/1. – С. 126
29. Ильинков, В. А. Математическое моделирование линейных звеньев телекоммуникационных систем / В. А. Ильинков, Н. И. Беленкевич, В. Е. Романов // Изв. Белорус. инженер. акад. – 1998. – № 2 (6)/1. – С. 78–79.
30. Ильинков, В. А. Формирование, преобразование и расчет характеристик математических моделей линейных звеньев радиоэлектронных систем / В. А. Ильинков, Н. И. Беленкевич, В. Е. Романов // Радиотехника и электроника: Респ. межведомств. сб. науч. тр. – Минск: БГУИР, 1999. – Вып. 23. – С. 81–86.
31. Белецкий, А. Ф. Теория линейных электрических цепей: учеб. для вузов / А. Ф. Белецкий. – 2-е изд., стереотип. – СПб.: Лань, 2009. – 544 с.
32. Зааль, Р. Справочник по расчету фильтров / Р. Зааль; под ред. Н. Н. Слепова. – М.: Радио и связь, 1983. – 752 с.
33. Ильинков, В. А. Моделирование линейных искажений в яркостном канале системы уплотнения / В. А. Ильинков // Техника кино и телевидения. – 1988. – № 11. – С. 16–22.
34. Ильинков, В. А. Моделирование линейных искажений в телевизионных системах / В. А. Ильинков // Радиотехника и электроника: Респ. межведомств. сб. науч. тр. – Минск: БГУИР, 1989. – Вып. 18. – С. 11–16.
35. Заездный, А. М. Гармонический синтез в радиотехнике и электросвязи / А. М. Заездный. – 2-е изд., испр. и доп. – Л.: Энергия, 1971. – 528 с.
36. Эггартер, Т. П. Функция Грина для стационарного отклика линейной цепи на периодическое входное воздействие / Т. П. Эггартер // ТИИЭР. – 1969. – Т. 57, № 3. – С. 112–113.
37. Корн, Г. Справочник по математике: для науч. работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн; под ред. И. Г. Арамановича. – М.: Наука, 1974. – 832 с.
38. Лиу, М. Л. Характеристика стационарного состояния линейных не изменяющихся во времени систем / М. Л. Лиу // ТИИЭР. – 1966. – Т. 54, № 12. – С. 364–365.
39. Робинсон, П. Н. Решение для установившегося режима в линейных не изменяющихся во времени системах / П. Н. Робинсон // ТИИЭР. – 1969. – Т. 57, № 8. – С. 90.
40. Фейрман, Ф. Вычисление функции Грина для случая периодических возбуждений / Ф. Фейрман, П. Маклейн // ТИИЭР. – 1970. – Т. 58, № 6. – С. 157–158.

References

1. Truhin M. P. *Fundamentals of computer development and simulation of radioelectronic facilities*. Moscow, Goryachaya liniya-Telekom Publ., 2015. 440 p. (in Russian).
2. Kolesov Yu. B., Senichenkov Yu. B. *Modeling of systems: object-oriented approach*. Saint Petersburg, BHV-Peterburg Publ., 2006. 192 p. (in Russian).
3. Sirota A. A. *Computer based simulation and performance evaluation of complex systems*. Moscow, Tekhnosfera Publ., 2006. 280 p. (in Russian).
4. Vasil'ev K. K., Sluzhivij M. N. *Mathematical modeling of communications systems*. Ulyanovsk, Ulyanovsk State Technical University, 2010. 170 p. (in Russian).
5. Sheluhin O. I., Tenyakshev A. M., Osin A. V. *Simulation of information systems*. Moscow, Radiotekhnika Publ., 2005. 368 p. (in Russian).
6. Golyanickij I. A. *Mathematical models and methods in radio communication*. Moscow, Eko-Trendz Publ., 2005. 440 p. (in Russian).

7. Vershinin A. S., Sharova D. N., Maikov D. Yu. (et al.) *Mathematical modeling of wireless communications systems*. Tomsk, Tomsk Polytechnic University Publ., 2014. 164 p. (in Russian).
8. Solonina A. I. *Digital signal processing. Simulation using Simulink*. Saint Petersburg, BHV-Peterburg Publ., 2012. 432 p. (in Russian).
9. Solonina A. I., Arbizov S. M. *Digital signal processing. Simulation using MatLab*. Saint Petersburg, BHV-Peterburg Publ., 2008. 816 p. (in Russian).
10. Gonsales R., Vuds R., Eddins S. *Digital image processing using MatLab*. Prentice-Hall, 2004. 344 p.
11. D'yakonov V. P. *Mathematical and scientific-and-technical calculations using Mathematica 4.1/4.2/5.0*. Moscow, Solon-Press Publ., 2004. 696 p. (in Russian).
12. Alad'ev V. Z., Grin' D. S. *Enhancement of Mathematica*. Herson, Oldi-Plyus Publ., 2012. 552 p. (in Russian).
13. Zagidullin R. Sh., Karutin S. N., Steshenko V. B. *SystemView. System modeling of signal data processor*. Moscow, Goryachaya liniya-Telecom Publ., 2005. 294 p. (in Russian).
14. Frisk V. V. *Foundations of network analysis. Using Microwave Office for electrical circuit modeling on PC*. Moscow, Solon-Press Publ., 2004. 160 p. (in Russian).
15. Evdokimov Yu. K., Lindval' V. R., Shcherbakov G. I. *LabView for a radio engineer: from virtual model to workable device: hands-on guide for using LabView*. Moscow, DMK Publ., 2007. 400 p. (in Russian).
16. Karlashchuk V. I. *An electronic laboratory on IBM PC: a laboratory course in Electronics Workbench and VisSim using blocks of telecommunications systems*. Moscow, Solon-Press Publ., 2005, 480 p. (in Russian).
17. Shesterkin A.N. *Multisim 10 is a system of modeling and research into radio electronic devices*. Moscow, DMK Press Publ., 2012. 360 p. (in Russian).
18. Amelina M. A., Amelin S. A. *The general-circuit simulator Micro-Cap 8*. Moscow, Goryachaya liniya-Telecom Publ., 2007. 464 p. (in Russian).
19. Bolotovskii Yu. I., Tanazly G. I. *OrCAD 9.x. OrCAD 10.x. Simulations practice*. Moscow, Solon-Press Publ., 2008. 208 p. (in Russian).
20. Lavrent'ev M. A., Shabat B. V. *Methods of the theory of functions of a complex variable*. Saint Petersburg, Lan' Publ., 2002. 688 p. (in Russian).
21. Bracken E., Din-Kow S., Cendes Z. S-Domain Methods for Simultaneous Time and Frequency Characterization of Electromagnetic Devices. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 1998, vol. 46, no. 9, pp. 1277–1290. Doi: 10.1109/22.709471
22. Ilyinkov V. A. A method of the computation of a linear system's response to a periodic action. *Radiotekhnika = Radioengineering*, 1990, no. 10, pp. 14–16 (in Russian).
23. Ilyinkov V. A., Ilyinkova N. I. A method of the computation of a linear system's response to periodic and non-periodic actions. *Vestnik BGU. Seriya 1: Fizika, matematika, informatika = Vestnik BSU. Series 1: Physics. Mathematics. Informatics*, 1999, no. 3, pp. 33–38 (in Russian).
24. Ilyinkov V. A., Belenkevich N. I., Romanov V. E. *Modeling linear properties of links and signals in telecommunications systems*. Minsk, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, 2005. 102 p. (in Russian).
25. Gonorovskii I. S. *Radio technical circuits and signals*. Moscow, Drofa Publ., 2006. 720 p. (in Russian).
26. Baskakov S. I. *Radio technical circuits and signals*. Moscow, Lenand Publ., 2016. 528 p. (in Russian).
27. Temesh G., Mitr S. (eds.) *The modern theory of filters and their design*. Moscow, Mir Publ., 1977. 560 p. (in Russian).
28. Ilyinkov V. A., Belenkevich N. I. Mathematical modeling of signals of telecommunications systems. *Izvestiya Belorusskoj inzhenernoj akademii* [Proceedings of the Belarusian Engineering Academy], 2000, no. 1(9)/1, pp. 126 (in Russian).
29. Ilyinkov V. A., Belenkevich N. I., Romanov V. E. Mathematical modeling of linear links of telecommunications systems. *Izvestiya Belorusskoj inzhenernoj akademii* [Proceedings of the Belarusian Engineering Academy], 1998, no. 2(6)/1, pp. 78–79 (in Russian).
30. Ilyinkov V. A., Belenkevich N. I., Romanov V. E. Formation, transformation and account of the characteristics of mathematical models of linear networks of radio electronic systems. *Radiotekhnika i elektronika: Respublikanskii mezhvedomstvennyi sbornik nauchnykh trudov* [Radio Engineering and Electronics: Republican interdepartmental collection of scientific papers]. Minsk, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, 1999, issue 23, pp. 81–86 (in Russian).
31. Beleckii A. F. *Linear electrical circuit theory*. Saint Petersburg, Lan' Publ., 2009. 544 p. (in Russian).
32. Saal R. *Handbuch zum Filterentwurf* [Handbook of filter design]. Frankfurt, Gesellschaft AEG-Telefunken, 1979. 663 p. (in German).
33. Ilyinkov V. A. Modeling linear distortions in the luminance channel of a multiplex system. *Tekhnika kino i televide-niya* [Technique of Cinema and Television], 1988, no. 11, pp. 16–22 (in Russian).
34. Il'inkov V. A. Modeling linear distortions in television systems. *Radiotekhnika i elektronika: Respublikanskii mezhvedomstvennyi sbornik nauchnykh trudov* [Radio Engineering and Electronics: Republican interdepartmental collection of scientific papers]. Minsk, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, 1989, issue18, pp. 11–16 (in Russian).
35. Zaezdneyj A. M. *A harmonic synthesis in radio engineering and telecommunication*. Leningrad, Ehnergiya Publ., 1971. 528 p. (in Russian).
36. Eggarter T. P. Green's function for the steady state of a periodically excited circuit. *Proceedings of the IEEE*, 1969, vol. 57, no. 3, pp. 355–356. Doi: 10.1109/proc.1969.6977
37. Korn G., Korn T. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*. Moscow, Nauka Publ., 1974. 832 p. (in Russian).

38. Loiu M. L. Steady-state response of linear time-invariant systems. *Proceedings of the IEEE*, 1966, vol. 54, no. 12, pp. 1952–1953. Doi: 10.1109/proc.1966.5286

39. Robinson P. N. Steady-state solution to linear time-invariant systems. *Proceedings of the IEEE*, 1969, vol. 57, no. 8, pp. 1429–1430. Doi: 10.1109/proc.1969.7286

40. Fairman F., McLane P. Derivation of the Green's function for periodic excitation. *Proceedings of the IEEE*, 1970, vol. 58, no. 6, pp. 938. Doi: 10.1109/proc.1970.7818

Информация об авторах

Беленкевич Наталья Ивановна – старший преподаватель кафедры систем телекоммуникаций, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, Минск, Республика Беларусь). E-mail: belenkevich@bsuir.by

Ильинков Валерий Андреевич – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры систем телекоммуникаций, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, Минск, Республика Беларусь). E-mail: v.ilyinkov@gmail.com

Information about the authors

Natalia I. Belenkevich – Senior Lecturer of the Department of Telecommunications Systems, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: belenkevich@bsuir.by

Valery A. Ilyinkov – Ph. D. (Engineering), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Telecommunications Systems, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: v.ilyinkov@gmail.com

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И СИСТЕМЫ
INFORMATION TECHNOLOGIES AND SYSTEMS

УДК 004.932.4

Поступила в редакцию 10.03.2017
Received 10.03.2017

В. М. Артемьев, А. О. Наумов, Л. Л. Кохан

Институт прикладной физики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

**РЕКУРРЕНТНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ
ПОЛЕЙ В УСЛОВИЯХ АПРИОРНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ**

Аннотация. Задача фильтрации случайных динамических полей актуальна для ряда приложений. Для ее решения можно использовать статистический подход на основе теории фильтра Калмана. Из-за большой размерности изображений полей это приводит к сложным уравнениям и требует больших вычислительных затрат, что затрудняет решение задачи в реальном масштабе времени. В данной работе вместо статистического предложено использовать детерминистский подход на основе рекуррентного метода наименьших квадратов. Предполагается, что априорно заданы модель поля, его ковариационные характеристики, а также модель и характеристики результатов измерений. Для получения рекуррентных уравнений фильтрации используется функция потерь, состоящая из двух частей: первая является квадратичным функционалом невязки решения с весом в виде обратной ковариационной матрицы измерений, вторая – квадратичным функционалом разности текущей оценки и ее экстраполяции на следующий момент времени. В результате в явном виде получен алгоритм оптимальной фильтрации, который может быть реализован в реальном масштабе времени со значительно меньшими вычислительными затратами по сравнению с фильтром Калмана. Выведено уравнение для дисперсии ошибок фильтрации, что дает возможность оценить точность фильтрации и сравнить ее с точностью фильтра Калмана. Приведен пример использования предложенной методики.

Ключевые слова: линейная фильтрация, случайные поля, метод наименьших квадратов, фильтр Калмана, априорная статистика, регуляризация

Для цитирования. Артемьев, В. М. Рекуррентная линейная фильтрация случайных динамических полей в условиях априорной неопределенности / В. М. Артемьев, А. О. Наумов, Л. Л. Кохан // Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2017. – №4. – С. 105–111.

V. M. Artemiev, A. O. Naumov, L. L. Kokhan

Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

RECURSIVE LINEAR FILTERING OF THE RANDOM DYNAMIC FIELDS UNDER A PRIORI UNCERTAINTY

Abstract. The task of filtering random dynamic fields is relevant for a number of applications. To solve it, one can use a statistical approach based on the Kalman filter theory. Because of large dimension of the images, this leads to complicated equations and requires large computational costs, which makes it difficult to solve the problem in real time. Instead of statistical, it is suggested to use a deterministic approach based on the recursive least-squares technique. It is assumed that the field model, its covariance characteristics, as well as the model and characteristics of the measurement results are a priori given. To obtain recursive filter equations the loss function is used, which consists of two parts. The first one is the quadratic residual functional of the solution with weight in the form of an inverse covariance measurement matrix. The second one is a quadratic functional of the difference between the current estimation and its extrapolation to the next time point. As a result, an optimal filtering algorithm is obtained in an explicit form, which can be realized in real time with significantly less computational costs compared to the Kalman filter. An equation for the variance of filtering errors is obtained, that allows estimating the accuracy of the proposed filter and its comparison with the accuracy of the Kalman filter. An example of using the proposed methodology is given.

Keywords: linear filtering, random fields, least squares method, Kalman filter, priori statistics, regularization

For citation. Artemiev V. M., Naumov A. O., Kokhan L. L. Recursive linear filtering of the random dynamic fields under a priori uncertainty. *Vesti Natsyonal'noi akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2017, no. 4, pp. 105–111 (in Russian).

Введение. Фильтрация случайных динамических (изменяющихся во времени) полей, измеряемых на фоне шумов, является задачей, часто встречающейся на практике. Полагается, что такие поля обладают временной корреляцией, пространственной ковариацией и задаются посредством стохастических моделей в дискретные моменты времени в пространстве состояний на дискретной сетке с числом строк N и столбцов M . Путем сканирования по строкам и столбцам модель поля может быть отображена посредством вектора $\mathbf{x}_k = [x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{Sk}]^T$, где $S = N \times M$ – размерность поля, $k = 0, 1, 2, \dots$ – дискретное время, а T – символ транспонирования. В линейном случае модель поля описывается следующим стохастическим конечно-разностным уравнением:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_k, \quad (1)$$

где \mathbf{A}_k – переходная матрица поля размерности $S \times S$, а случайный S -мерный вектор $\mathbf{w}_k = [w_{1k}, w_{2k}, \dots, w_{Sk}]^T$ есть формирующее воздействие в виде централизованного дискретного белого шума с ковариационной матрицей \mathbf{Q}_k . Линейные измерения описываются L -мерным вектором $\mathbf{z}_k = [z_{1k}, z_{2k}, \dots, z_{Lk}]^T$ с уравнением

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad (2)$$

где \mathbf{H}_k – матрица измерений размерности $L \times S$, а вектор шумов измерений $\mathbf{v}_k = [v_{1k}, v_{2k}, \dots, v_{Lk}]^T$ полагается централизованным дискретным белым шумом с ковариационной матрицей \mathbf{R}_k , статистически независимым от \mathbf{w}_k .

При сделанных предположениях оптимальная линейная фильтрация поля по критерию минимума дисперсий ошибок фильтрации может быть осуществлена посредством фильтра Калмана (ФК) [1–3]. Эта методика предполагает априорные знания ковариационных характеристик воздействий \mathbf{w}_k и \mathbf{v}_k , и при высокой размерности S , что характерно для случайных полей, реализация ФК в реальном масштабе времени приводит к большим вычислительным затратам. На практике априорные статистические характеристики поля, как правило, известны не полностью, и возникает задача синтеза фильтров в условиях неопределенности. В настоящей работе полагается, что модели поля (1) и измерений (2) известны, а неизвестными являются ковариационные матрицы \mathbf{Q}_k и \mathbf{R}_k . В такой постановке задача решалась методами робастной [4, 5] и адаптивной [6, 7] фильтрации на основе статистического подхода. Но их применение для фильтрации случайных динамических полей также требует чрезмерных вычислительных затрат.

В данной работе предлагается использовать детерминистский подход на основе метода наименьших квадратов (МНК) [8], требующий значительно меньшего объема вычислительных затрат и априорной статистики. Однако классический подход на этой основе приводит к синтезу фильтров с независимыми во времени оценками или непрерывно растущей размерностью, что обычно неприемлемо на практике. Рассмотрим рекуррентный МНК (РМНК), который позволяет получать решения в рекуррентной форме, используя некоторые эмпирические представления о характеристиках входных воздействий. Подобный подход дает возможность существенно снизить вычислительные затраты, но синтезированный таким методом фильтр наименьших квадратов (ФНК) приводит к увеличению ошибок фильтрации по сравнению с ФК. Далее приводится методика синтеза ФНК и на конкретном примере дается оценка его точности в сравнении с ФК.

Уравнение фильтра. Задача состоит в нахождении уравнения оценки вектора поля $\hat{\mathbf{x}}_k = [\hat{x}_{1k}, \hat{x}_{2k}, \dots, \hat{x}_{Sk}]^T$ по результатам измерений (2) в детерминистской постановке с использованием РМНК. В основе методики синтеза лежит выбор критерия оптимальности, который должен приводить как к пространственной, так и временной фильтрации. При классической методике синтеза МНК в качестве критерия используется квадратичная форма невязки $(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k)^T (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k)$, зависящая от текущей оценки $\hat{\mathbf{x}}_k$ и обеспечивающая пространственную фильтрацию [9]. Для учета временных изменений поля предлагается в состав критерия включить дополнительную сглаживающую квадратичную форму, которая зависит от вектора оценки $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ на предыдущем шаге фильтрации. Вариантом такой формы может быть выражение $(\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1})^T (\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1})$, где $\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1} = [\hat{x}_{1,k,k-1}, \hat{x}_{2,k,k-1}, \dots, \hat{x}_{S,k,k-1}]^T$ есть экстраполирующий вектор поля текущей оценки $\hat{\mathbf{x}}_k$, полученный на основе результатов предыдущей оценки $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$. В итоге рекуррентный критерий оптимальности принимает вид квадратичного функционала:

$$J_k(\hat{\mathbf{x}}_k) = (1 - \alpha)(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k)^T (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k) + \alpha(\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1})^T (\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (3)$$

Этот критерий определяет текущие потери при пространственно-временной фильтрации и является основой РМНК. Здесь первое слагаемое учитывает влияние измерения \mathbf{z}_k на величину оценки $\hat{\mathbf{x}}_k$, второе является сглаживающим функционалом, позволяющим согласовать текущую оценку с оценкой на предыдущем шаге фильтрации. Выбором величины коэффициента $0 < \alpha < 1$ можно регулировать вес слагаемых критерия и обеспечивать регуляризацию решения. Величина этого коэффициента выбирается из эмпирических представлений об отношении сигнала к шумам. Эмпирические данные следуют из физического смысла задачи, результатов моделирования и экспериментов.

Оптимальную оценку $\hat{\mathbf{x}}_k$ можно получить из условия минимума критерия (3), необходимое условие которого выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial J_k(\hat{\mathbf{x}}_k)}{\partial \hat{\mathbf{x}}_k} = -2(1 - \alpha)\mathbf{H}_k^T (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k) + 2\alpha(\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}) = 0.$$

Его решение приводит к уравнению оптимального ФНК на основе РМНК, которое имеет вид

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{K}_{1k} \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1} + \mathbf{K}_{0k} \mathbf{z}_k. \quad (4)$$

Здесь матричный коэффициент усиления \mathbf{K}_{0k} имеет размерность $L \times S$ и выражается следующим образом:

$$\mathbf{K}_{0k} = (1 - \alpha) \left(\alpha \mathbf{I} + (1 - \alpha) \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k \right)^{-1} \mathbf{H}_k^T, \quad (5)$$

а матричный коэффициент \mathbf{K}_{1k} размерности $S \times S$ равен

$$\mathbf{K}_{1k} = \alpha \left(\alpha \mathbf{I} + (1 - \alpha) \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k \right)^{-1}. \quad (6)$$

В этих выражениях \mathbf{I} есть единичная матрица, а символ « -1 » определяет операцию обращения матрицы. Поскольку матрица $\mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k$ неотрицательно определена, то матрица $(\alpha \mathbf{I} + (1 - \alpha) \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k)$ будет положительно определенной, и поэтому существует матрица ей обратная. При $\alpha = 0$ уравнение (4) принимает вид $\hat{\mathbf{x}}_k = (\mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k)^{-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{z}_k$, соответствующий классическому фильтру МНК при независимых во времени оценках [9].

Путем эквивалентных преобразований уравнение (4) может быть приведено к структуре фильтра с обратной связью типа ФК, для чего представляется в виде

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{K}_{1k}^* \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1} + \mathbf{K}_{0k}^* \left[\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{K}_{1k}^* \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1} \right]. \quad (7)$$

Приравнивая правые части уравнений (4) и (7) с учетом выражений (5) и (6) после группировки слагаемых получаем следующие выражения для матричных коэффициентов усиления фильтра с обратной связью $\mathbf{K}_{0k}^* = \mathbf{K}_{0k}$, $\mathbf{K}_{1k}^* = \mathbf{I}$. В итоге уравнение ФНК принимает вид

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1} + \mathbf{K}_{0k} \left[\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1} \right], \quad (8)$$

откуда следует, что $\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}$ есть вектор экстраполяции поля, как у ФК. Из полученных формул для коэффициентов усиления ФНК видно, что они не зависят от ковариационных матриц воздействий \mathbf{Q}_k и \mathbf{R}_k , и это существенно снижает объем вычислительных затрат. Для линейной модели поля (1) вектор экстраполяции, как и у ФК, выбирается в виде

$$\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1} = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}. \quad (9)$$

Дисперсии ошибок ФНК. Критерий (3) определяет величину потерь фильтрации при детерминистском подходе, и синтезированный ФНК будет оптимальным по этому критерию. При статистическом подходе качество фильтрации оценивается величиной дисперсии ошибки фильтрации, и оптимальным фильтром в классе линейных является ФК. Представляет интерес

сравнение дисперсий ошибок обоих типов фильтров при одинаковых исходных данных, что дает возможность оценки потерь за счет неучета априорной статистики, поскольку дисперсия ошибки ФНК будет выше, чем у ФК.

Ошибка фильтрации определяется выражением $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k$. После подстановки формул (1), (4) и группировки слагаемых можно получить уравнение

$$\mathbf{e}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{0k} \mathbf{H}_k) \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{0k} \mathbf{H}_k) \mathbf{A}_k \mathbf{e}_{k-1} - \mathbf{K}_{1k} \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1} + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{0k} \mathbf{H}_k) \mathbf{w}_k - \mathbf{K}_{0k} \mathbf{v}_k.$$

После использования формулы (5) матрица $(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{0k} \mathbf{H}_k)$ преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{0k} \mathbf{H}_k) &= \left(\alpha \mathbf{I} + (1 - \alpha) \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k \right)^{-1} \left(\alpha \mathbf{I} + (1 - \alpha) \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k \right) \times \\ &\times \left[\mathbf{I} - (1 - \alpha) \left(\alpha \mathbf{I} + (1 - \alpha) \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k \right)^{-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k \right] = \alpha \left(\alpha \mathbf{I} + (1 - \alpha) \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k \right)^{-1} = \mathbf{K}_{1k}, \end{aligned}$$

что следует из формулы (6). Для линейной модели поля (1) после подстановки (9) уравнение ошибки ФНК принимает вид

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{K}_{1k} \mathbf{A}_k \mathbf{e}_{k-1} + \mathbf{K}_{1k} \mathbf{w}_k - \mathbf{K}_{0k} \mathbf{v}_k. \quad (10)$$

При нулевом математическом ожидании ошибки ковариационная матрица ошибки $\mathbf{P}_{e,k} = \langle \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T \rangle$, где треугольные скобки обозначают операцию нахождения математического ожидания. При статистически независимых белых шумах \mathbf{w}_k и \mathbf{v}_k , а также учитывая независимость ошибки \mathbf{e}_{k-1} в момент $k-1$ от белых шумов в последующий момент времени k , уравнение для ковариационной матрицы ошибки ФНК выражается следующим образом:

$$\mathbf{P}_{e,k} = \mathbf{K}_{1k} \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{e,k-1} \mathbf{A}_k^T \mathbf{K}_{1k}^T + \mathbf{K}_{1k} \mathbf{Q}_k \mathbf{K}_{1k}^T + \mathbf{K}_{0k} \mathbf{R}_k \mathbf{K}_{0k}^T. \quad (11)$$

Это уравнение является автономным, не зависящим от уравнения оценки, как и у ФК. Диагональные элементы матрицы $\mathbf{P}_{e,k}$ определяют дисперсии ошибок фильтрации составляющих вектора поля. Важно отметить, что в выражения для коэффициентов усиления ФНК (5) и (6) ковариационная матрица (11) не входит, что снижает объем вычислительных затрат по сравнению с ФК.

Сравнение точности ФНК и ФК. Сравнительную оценку точности по величинам дисперсий ошибок у ФНК и ФК проведем на следующем примере. Полагаем переходную матрицу модели поля диагональной, равной $\mathbf{A}_k = a_k \mathbf{I}$ ($0 < a_k < 1$). Такое поле относится к классу полей без пространственной динамики [3], и его ковариационная матрица формируется лишь посредством ковариационной матрицы формирующего воздействия \mathbf{Q}_k . Рассмотрим случай, когда матрица измерений $\mathbf{H}_k = h_k \mathbf{I}$ и ковариационная матрица шумов измерений равна $\mathbf{R}_k = \sigma_{vk}^2 \mathbf{I}$, где σ_{vk}^2 – дисперсия составляющих вектора шумов. Для этого примера ковариационная матрица ошибок фильтрации ФНК (11) с учетом выражений для коэффициентов усиления (5) и (6) имеет вид

$$\mathbf{P}_{e,k} = \frac{1}{\left(\alpha + (1 - \alpha) h_k^2 \right)^2} \left[\alpha^2 a_k^2 \mathbf{P}_{e,k-1} + \alpha^2 \mathbf{Q}_k + (1 - \alpha)^2 h_k^2 \sigma_{vk}^2 \mathbf{I} \right]. \quad (12)$$

При постоянных параметрах $a_k = a$, $h_k = h$, $\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}$, $\sigma_{vk}^2 = \sigma_v^2$ в установившемся режиме ковариационная матрица ошибки будет постоянной $\mathbf{P}_{e,k} = \mathbf{P}_e$ и равной

$$\mathbf{P}_e = \frac{1}{\left(\alpha + (1 - \alpha) h^2 \right)^2} \left[\alpha^2 \mathbf{Q} + (1 - \alpha)^2 h^2 \sigma_v^2 \mathbf{I} \right]. \quad (13)$$

Дисперсии ошибок фильтрации ФНК составляющих поля являются диагональными элементами матрицы (13). Выбор величины весового коэффициента α осуществляется из условия минимизации дисперсии ошибки с учетом регуляризации решения.

При моделировании размерность поля полагалась равной $S = 64 \times 64$ и использовалась ковариационная функция поля в виде осесимметричной двухмерной гауссовой функции с интервалом ковариации 16 единиц на уровне 0,1 от максимума.

Дисперсия поля обозначается символом σ_x^2 , величина $\rho = \sigma_x/\sigma_y$ есть отношение сигнала к шумам, коэффициент a модели поля выбирался равным 0,95, что соответствует длительности корреляции $\tau_x = 19$, а дисперсия задавалась величиной $\sigma_x^2 = 0,04$. Измерение поля проводилось с параметром $h = 1$. На рис. 1, *a* приведены фрагменты результатов моделирования поля для моментов времени $k = 1, 2, 5, 10, 20$. На рис 1, *b* показаны результаты измерений при отношении сигнала к шумам $\rho = 3$.

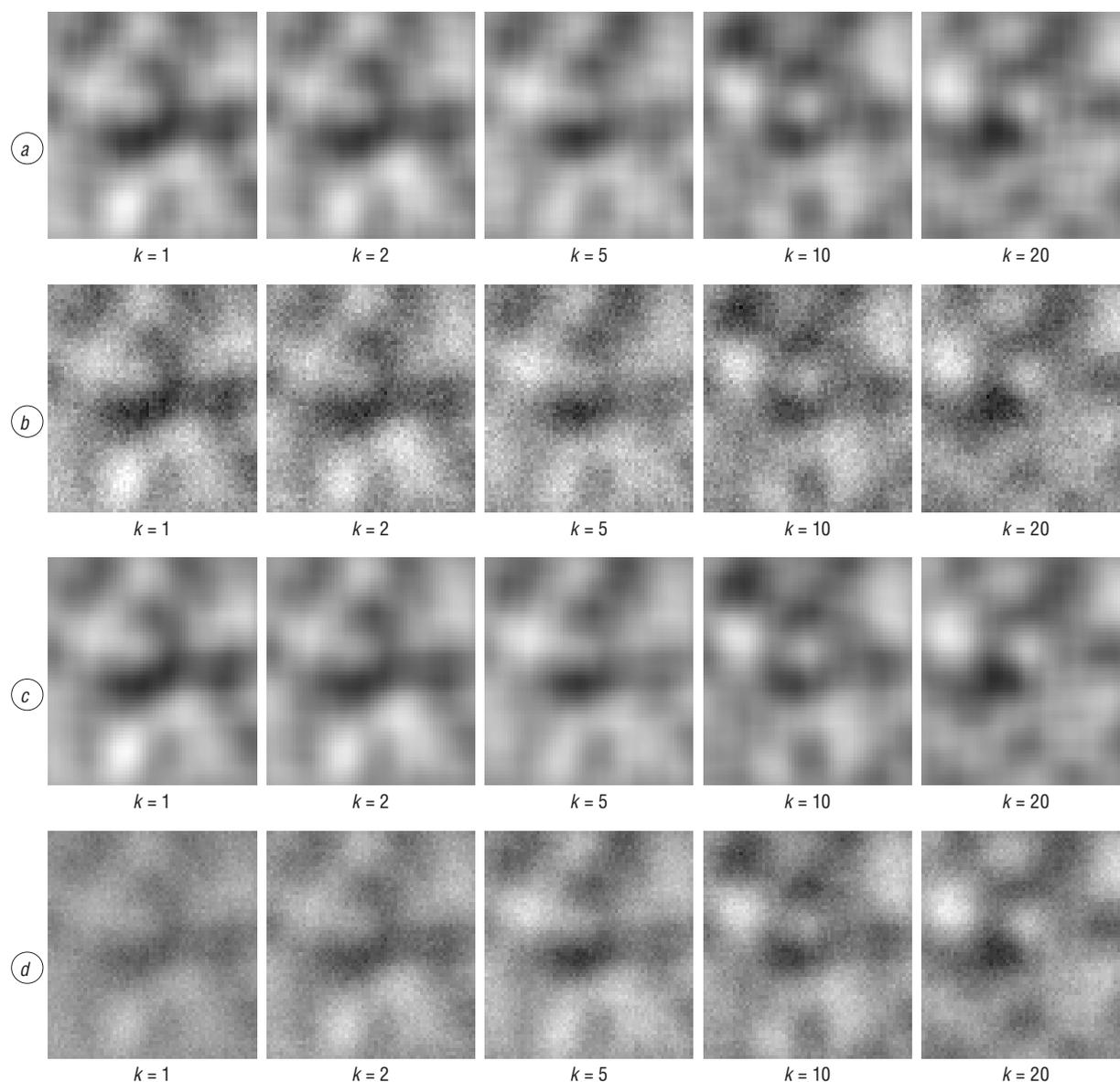


Рис. 1. Фрагменты изображений случайного динамического поля: *a* – исходное изображение, *b* – результаты его измерений, *c* – фильтрация посредством ФК, *d* – фильтрация посредством ФНК

Fig. 1. Fragments of the random dynamic field images: *a* – original image, *b* – results of its measurements, *c* – filtering by Kalman filter, *d* – filtering by Least Squares filter

Фильтрация посредством ФК (рис. 1, *c*) проводилась по известной методике, а посредством ФНК (рис. 1, *d*) – по методике, описанной выше, при $\alpha = 0,5$. Эти рисунки позволяют качественно сравнить результаты фильтрации посредством ФК и ФНК.

На рис. 2 сплошными линиями приведены графики зависимости относительных среднеквадратических отклонений (СКО) ошибок фильтрации $\varepsilon_{\text{ФНК}} = \sigma_e/\sigma_x$ от величины параметра α при различных отношении сигнала к шумам ρ . Пунктиром показаны значения относительных среднеквадратических отклонений ошибок $\varepsilon_{\text{ФК}}$ при тех же условиях.

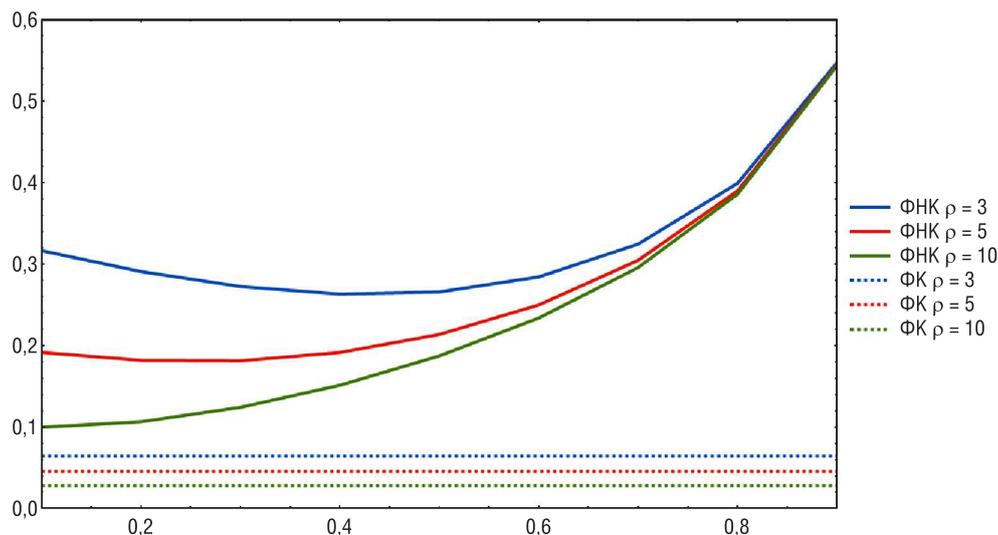


Рис. 2. Относительные величины СКО ошибок фильтрации ФНК и ФК при различных значениях параметра α и отношениях сигнала к шумам ρ

Fig. 2. Relative RMS values of filtering error using Kalman filter and Least Squares filter for different values of the parameter α and signal-to-noise ratio ρ

Из рис. 2 видно, насколько увеличивается дисперсия ошибки ФНК за счет неучета априорной информации о ковариационных характеристиках воздействий. При больших отношениях сигнала к шумам величина коэффициента α близка к нулю. Это говорит о том, что оптимальная оценка близка к случаю независимых оценок. При меньшем отношении сигнала к шумам проявляется оптимальное значение коэффициента α . Следует отметить, что модель поля без пространственной динамики дает наибольшую разницу дисперсий ошибок ФНК и ФК, так как ковариационная характеристика поля формируется лишь посредством ковариационной характеристики формирующего воздействия, которая не учитывается при синтезе ФНК.

Заключение. Использование фильтра Калмана (ФК) для фильтрации в реальном масштабе времени результатов измерений случайных динамических полей трудно реализуемо из-за больших вычислительных затрат. Кроме того, его синтез требует знания априорных статистических характеристик воздействий, что на практике не всегда доступно. Предложен альтернативный подход к решению этой задачи, приводящий к меньшему объему вычислительных затрат и требуемых априорных знаний. Для этого использован детерминистский подход на основе рекуррентного метода наименьших квадратов. Приводится методика синтеза линейных фильтров при неизвестных статистических характеристиках воздействий, формирующих модели полей. В состав уравнений фильтра входит параметр α , выбираемый из эмпирических представлений об отношении сигнала к шумам. Качественно можно отметить, что при большом отношении сигнала к шумам предпочтение следует отдавать результатам измерений и выбирать $\alpha < 0,5$. При малом отношении сигнала к шумам возрастает роль сглаживания решения и α следует увеличивать.

Использование детерминистского подхода приводит к увеличению дисперсии ошибок фильтрации по сравнению с ФК, что требует от пользователя выбора между снижением вычислительных затрат и точностью фильтрации. В дальнейшем представляет интерес расширение детерминистского подхода на нелинейные модели случайных динамических полей.

Список использованных источников

1. Дубенко, Т.И. Фильтр Калмана для случайных полей / Т.И. Дубенко // Автоматика и телемеханика. – 1978. – №4. – С. 37–40.
2. Красовский, А.А. Оценивание стационарного поля при размытом изображении / А.А. Красовский // Докл. Акад. наук СССР. – 1979. – Т. 249, №5. – С. 1071–1073.
3. Артемьев, В.М. Реконструкция динамических изображений в томографии процессов / В.М. Артемьев, А.О. Наумов, Г.-Р. Йениш. – Минск: Изд. центр БГУ, 2004. – 168 с.

4. Ершов, А. А. Робастный фильтр Калмана в дискретном времени / А. А. Ершов, Р. Ш. Липцер // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 3. – С. 60–70.
5. Lewis, F. L. Optimal and Robust Estimation: With an Introduction to Stochastic Control Theory / F. L. Lewis, L. Xie, D. Popa. – CRC Press, 2008. – 552 p.
6. Шильман, С. В. Адаптивно-оптимальная фильтрация случайных процессов / С. В. Шильман // Автоматика и телемеханика. – 1986. – № 2. – С. 113–126.
7. Haykin, S. Adaptive Filter Theory / S. Haykin. – New Jersey: Prentice Hall, 1996. – 997 p.
8. Эльясберг, Л. Е. Определение движения по результатам измерений / Л. Е. Эльясберг. – М.: Наука, 1976. – 267 с.
9. Simon, D. Optimal State Estimation: Kalman, H-infinity, and Nonlinear Approaches / D. Simon. – John Wiley & Sons, 2006. – 482 p.

References

1. Dubenko T. I. Kalman Filter for random fields. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 1978, no. 4, pp. 37–40 (in Russian).
2. Krasovskii A. A. Estimation of the stationary field in a blurred image. *Doklady Akademii nauk SSSR = Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1979, vol. 249, no. 5, pp. 1071–1073 (in Russian).
3. Artemiev V. M., Naumov A. O., Jaenisch G.-R. *Dynamic image reconstruction for process tomography*. Minsk, BSU Publ., 2004. 168 p. (in Russian).
4. Ershov A. A., Liptser R. Sh. Robust Kalman filter in discrete time. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 1978, no. 3, pp. 60–70 (in Russian).
5. Lewis F. L., Xie L., Popa D. *Optimal and Robust Estimation: With an Introduction to Stochastic Control Theory*. CRC Press, 2008. 552 p.
6. Shilman S. V. Adaptive-optimal filtering of random processes. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 1986, no. 2, pp. 113–126 (in Russian).
7. Haykin S. *Adaptive Filter Theory*. New Jersey, Prentice Hall, 1996. 997 p.
8. Elyasberg L. E. *Determination of movement from measurements results*. Moscow, Nauka Publ., 1976. 267 p. (in Russian).
9. Simon D. *Optimal State Estimation: Kalman, H-infinity, and Nonlinear Approaches*. John Wiley & Sons, 2006. 482 p. Doi: 10.1002/0470045345

Информация об авторах

Артемьев Валентин Михайлович – член-корреспондент Национальной академии наук Беларуси, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт прикладной физики Национальной академии наук Беларуси (ул. Академическая 16, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: artemiev@iaph.bas-net.by

Наумов Александр Олегович – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией радиотомографии, Институт прикладной физики Национальной академии наук Беларуси (ул. Академическая 16, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: naumov@iaph.bas-net.by

Кохан Леонид Леонидович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики Национальной академии наук Беларуси (ул. Академическая 16, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: kokhanll@iaph.bas-net.by

Information about the authors

Valentin M. Artemiev – Corresponding Member of National Academy of Sciences of Belarus, D. Sc. (Engineering), Professor, Chief Researcher, Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (16, Akademicheskaya Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: artemiev@iaph.bas-net.by

Alexander O. Naumov – Ph. D. (Physics and Mathematics), Head of Laboratory, Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (16, Akademicheskaya Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: naumov@iaph.bas-net.by

Leonid L. Kokhan – Ph. D. (Engineering), Senior Researcher, Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (16, Akademicheskaya Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kokhanll@iaph.bas-net.by

Ю. И. Першина, А. В. Шилин

Украинская инженерно-педагогическая академия, Харьков, Украина

РЕШЕНИЕ 3D-ЗАДАЧИ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ ПО ИЗВЕСТНЫМ ТОМОГРАММАМ НА СИСТЕМЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

Аннотация. Построена и исследована математическая модель двумерной компьютерной томографии с использованием интерфлетации функций трех переменных по известным томограммам исследуемого тела. Дается понятие томограммы в математическом смысле как след от функции трех переменных на заданной плоскости, построен алгоритм перевода изображения томограмм в функциональную зависимость, аргументами которой являются номер рисунка и координаты точек. Это дает возможность работать с томограммами как с функциями, то есть позволяет по номеру рисунка получать его изображения и выделять компонент цвета в указанной точке рисунка.

Строится и исследуется оператор интерфлетации функции трех переменных по известным следам функции на системе произвольных плоскостей. Приводится теорема об общем виде погрешности приближения функции трех переменных, построенного оператором интерфлетации в интегральном виде. Также приведена оценка неустранимой погрешности экспериментальных данных. Продемонстрирован пример восстановления функции трех переменных с помощью оператора интерфлетации по ее известным следам на системе произвольно расположенных плоскостей. Проведен численный эксперимент для заранее заданного тела, для этого был разработан комплекс программ в системе компьютерной математики MathCad. Численный эксперимент дает результаты визуализации точного решения и решения, полученного экспериментально, для случая, когда известна точная функция.

Предложенный метод восстановления существенно отличается от существующих тем, что в нем может проводиться обработка томограмм, которые не лежат в параллельных плоскостях (например, в простейшем случае томограммы могут располагаться в системе трех групп плоскостей, параллельных координатным плоскостям).

Ключевые слова: компьютерная томография, интерфлетация, восстановление, томограмма, математическая модель, погрешность восстановления, численный эксперимент

Для цитирования: Першина, Ю. И. Решение 3D-задачи компьютерной томографии по известным томограммам на системе произвольных плоскостей / Ю. И. Першина, А. В. Шилин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2017. – №4. – С. 112–121.

Iu. I. Pershyna, O. V. Shylin

Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov, Ukraine

THE SOLUTION TO THE 3D PROBLEM OF COMPUTER TOMOGRAPHY WITH KNOWN TOMOGRAMS ON THE SYSTEM OF ARBITRARY PLANES

Abstract. The article is based on restoration method for the internal structure of a three-dimensional body using polynomial interflatation based on known tomograms (traces) lying on a system of arbitrary planes, which is a generalization of the method of body restoration with its known tomograms on a system of three groups of parallel planes. A definition of tomograms in the mathematical sense has been provided and the algorithm of transition of tomogram images into the functional dependence has been outlined.

Theorems on interflatation properties and errors of the built operator have been formulated and proved. A test case for the construction of the interflatation operator for the quadratic function has been demonstrated, and the computational experiment involved the development of a number of programs in MathCad. The experiment has provided visualization results for an exact solution and a solution obtained experimentally for the case when the exact function is known. It has been shown that the constructed structure approximates this function exactly, which is not the case of classic interpolation operators.

The suggested method makes it possible to solve the problem of three-dimensional computer tomography for a fundamentally new data collection scheme. For example, it permits the use of the fan scheme for data collection in each of the planes in which the tomograms lie.

Keywords: computer tomography, interflatation, restoration, tomogram, mathematical model, restoration error, computational experiment

For citation. Pershyna Iu. I., Shylin O. V. The solution to the 3D problem of computer tomography with known tomograms on the system of arbitrary planes. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2017, no. 4, pp. 112–121 (in Russian).

Введение. В последней четверти XX в. в практике медицинских исследований, а также при неразрушающем контроле трехмерных объектов и проведении научных исследований в различных областях науки и техники нашли широкое применение компьютерные томографы [1–3], которые позволяют восстанавливать внутреннюю структуру тела, не разрезая его. При этом возник новый класс задач – задачи восстановления внутренней структуры трехмерного тела по его известным томограммам на нескольких плоскостях.

В работах [4, 5] построены и исследованы операторы полиномиальной и сплайн-интерфлетиции [6] функции трех переменных по известным следам на системе трех групп плоскостей (в каждой группе плоскости параллельны), и на основе этих операторов решена задача трехмерной компьютерной томографии в случае, когда известны томограммы в системе трех групп перерезанных плоскостей (параллельная схема сканирования). Доказана высокая точность разработанных методов. Известны также методы решения 3D-задачи компьютерной томографии с помощью конусообразной и спиральной схем сканирования, в которых заданные плоскости не являются параллельными [7–9].

Целью данной работы явилось решение задачи восстановления внутренней структуры трехмерного тела по известным томограммам, лежащим на системе произвольно расположенных плоскостей. Разработанный в статье метод является обобщением методов, изложенных авторами в [4, 5], и является более точным, чем известные методы авторов [7–9].

Построение оператора интерфлетиции на системе произвольно расположенных плоскостей. Пусть скалярно-значная функция $f(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $x \in R^3$ описывает некоторую физическую характеристику внутренней структуры (например, плотность, коэффициент поглощения и пр.). Источником информации о функции $f(x)$, то есть о внутренней структуре трехмерного тела, будем считать набор любых N перерезанных плоскостей, а также набор томограмм $T_k(x)$, лежащих на этих плоскостях, которые задаются следующими уравнениями:

$$\Pi_k : \omega_k(x) = \sum_{p=1}^3 a_{kp} x_p - \gamma_k = 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad \sqrt{\sum_{p=1}^3 a_{kp}^2} = 1.$$

Предположим, что в одной точке пересекается не более трех плоскостей.

Введем следующие обозначения:

$$1) \tau_{ik} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{vmatrix} \quad \text{– вектор, направленный вдоль линии пересечения плоскостей}$$

$$\omega_i = 0, \quad \omega_k = 0;$$

2) $M = \{(i, k, l) | \Pi_i \cap \Pi_k \cap \Pi_l = V_{ikl} = (x_{ikl1}, x_{ikl2}, x_{ikl3}) \neq \emptyset, i \neq k \neq l\}$, где V_{ikl} – точка пересечения трех плоскостей, M – множество точек пересечения;

3) $\Gamma_{ik} = \Pi_i \cap \Pi_k \neq \emptyset$ – ребра, по которым пересекаются две плоскости, на которых лежат соответствующие томограммы;

$$4) \Delta_{ikl} = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \\ a_{l1} & a_{l2} & a_{l3} \end{vmatrix} \quad \text{– определитель, составленный из коэффициентов уравнения заданных плоскостей;}$$

5) $T_k(\bar{x})$ – томограмма, которая лежит на плоскости Π_k .

Определение 1 [4]. Томограммой $T_k(\bar{x})$ (следом функции $f(x)$ на плоскости $\omega_k(x) = 0$ при условии, что коэффициенты $a_{ki}, i = \overline{1, 3}$ не равны нулю) будем называть одну из трех функций:

$$T_k(\bar{x}) = \begin{cases} f(x_{1k}(x_2, x_3), x_2, x_3) \\ f(x_1, x_{2k}(x_1, x_3), x_3) \\ f(x_1, x_2, x_{3k}(x_1, x_2)) \end{cases} = \begin{cases} f((\gamma_k - a_{k2}x_2 - a_{k3}x_3) / a_{k1}, x_2, x_3), a_{k1} \neq 0 \\ f(x_1, (\gamma_k - a_{k1}x_1 - a_{k3}x_3) / a_{k2}, x_3), a_{k2} \neq 0 \\ f(x_1, x_2, (\gamma_k - a_{k1}x_1 - a_{k2}x_2) / a_{k3}), a_{k3} \neq 0 \end{cases}, \quad \bar{x} = \begin{cases} (x_1, x_2), x_3 = 0 \\ (x_1, x_3), x_2 = 0 \\ (x_2, x_3), x_1 = 0 \end{cases}$$

где $x_k = x_{kp}$, $k = \overline{1, 3}$ – выражения, получаемые решением уравнения $\omega_k(x) = 0$ относительно переменной x_p .

Пусть томограммы $T_i(\bar{x})$, $T_k(\bar{x})$, $T_l(\bar{x})$ пересекаются в точке V_{ikl} . Обозначим: $u_{il}^k(x) = V_{ikl} + \frac{\tau_{ik}}{\Delta_{ikl}} \omega_l(x) + \frac{\tau_{kl}}{\Delta_{kli}} \omega_i(x)$, $w_i(x) = V_{ikl} + \frac{\tau_{kl}}{\Delta_{kli}} \omega_i(x)$.

Теорема 1. Для существования функции $L_{ikl}(x) \in C^r(\Omega)$ с заданными томограммами $T_{1,i}(\bar{x})$, $i = \overline{1, n}$, $T_{2,k}(\bar{x})$, $k = \overline{1, m}$, $T_{3,l}(\bar{x})$, $l = \overline{1, s}$, для которой выполняются условия:

$$L_{ikl}(x)|_{\Pi_i} = T_{1,i}(\bar{x})|_{\Pi_i}, L_{ikl}(x)|_{\Pi_k} = T_{2,k}(\bar{x})|_{\Pi_k}, L_{ikl}(x)|_{\Pi_l} = T_{3,l}(\bar{x})|_{\Pi_l}, \quad (1)$$

необходимо и достаточно, чтобы следы $T_{q,d}(\bar{x})$, $q = 1, 2, 3$, $d = i, k, l$, $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, m}$, $l = \overline{1, s}$ удовлетворяли условию $T_{q,d}(\bar{x}) \in C^r(R^2)$, $r \geq 0$ и условиям С. М. Никольского, которые на ребре Γ_{kl} сводятся к проверке равенств:

$$T_{2,k}(u_{il}^k(x))|_{\omega_{3l}(x)=0} = T_{3,l}(u_{ik}^l(x))|_{\omega_{2k}(x)=0},$$

то есть значения томограмм на линии пересечения должны совпадать для всех пересекающихся томограмм. Аналогичный вид имеют эти условия на ребрах Γ_{ik} , Γ_{li} .

В точке V_{ikl} условия Никольского сводятся к проверке равенств:

$$T_{3,l}(u_{il}^l(x))|_{\omega_{1i}(x)=0, \omega_{2k}(x)=0} = T_{2,k}(u_{ik}^k(x))|_{\omega_{3l}(x)=0, \omega_{1i}(x)=0} = T_{1,i}(u_{kl}^i(x))|_{\omega_{2k}(x)=0, \omega_{3l}(x)=0},$$

то есть, значения томограмм в точке пересечения должны совпадать для всех пересекающихся томограмм.

Доказательство. Оператор $L_{ikl}(x)$ построим в виде:

$$L_{ikl}(x) = L_{ikl}(\{T_{q,d}\}, x) = \left[L_{ik}^l + L_{kl}^i + L_{li}^k - L_{li}^k L_{kl}^i - L_{kl}^i L_{ik}^l - L_{li}^k L_{ik}^l + L_{ik}^l L_{kl}^i L_{li}^k \right] (\{T_{q,d}\}, x) \quad (2)$$

$$L_{ik}^l(\{T_{q,d}\}, x) = T_{3,l}(u_{ik}^l(x)) = f(u_{ik}^l(x)), L_{kl}^i L_{li}^k(\{T_{q,d}\}, x) = f(w_k(x)),$$

$$L_{ik}^l L_{kl}^i L_{li}^k(\{T_{q,d}\}, x) = f(V_{ikl}), q = 1, 2, 3, d = i, k, l.$$

Аналогично определяются операторы L_{kl}^i , L_{li}^k , $L_{kl}^i L_{li}^k$, $L_{li}^k L_{ik}^l$.

В работе С. М. Никольского [10] доказано, что для того, чтобы существовала функция $f(x_1, x_2, x_3) \in C^r(\Omega)$, имеющая следы

$$\left. \frac{\partial^\beta f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_s^p} \right|_{x_s=0} = \phi_{s,p} \Big|_{x_s=0}, s = 1, 2, 3, p = \overline{0, r},$$

необходимо и достаточно, чтобы граничные функции $\phi_{s,p}(\bar{x})$ удовлетворяли в точке $(0, 0, 0)$ условиям вида

$$\left. \frac{\partial^\beta \phi_{s,\alpha}(\bar{x})}{\partial x_p^\beta} \right|_{x_p=0} = \left. \frac{\partial^\alpha \phi_{s,\beta}(\bar{x})}{\partial x_s^\alpha} \right|_{x_s=0}, s, p = 1, 2, 3, \alpha, \beta = \overline{0, r}.$$

Этот факт позволяет строить операторы $L_{ikl}(x)$ в виде (2).

Теорема 1 доказана.

(Распространение результатов на случай большего количества плоскостей, чем три, приводится в теореме 4 благодаря использованию разложения единицы.)

Теорема 2. Пусть внутренняя структура трехмерного тела описывается функцией $f(x) \in C^r(\Omega)$ ($r \geq 3$), которая имеет томограммы $T_k(\bar{x})$, $k = \overline{1, N}$, заданные на плоскостях Π_k соответственно, и удовлетворяет условиям $f(x)|_{\Pi_s} = T_s(\bar{x})$. Тогда для погрешности $R_{ikl}f(x) = (I - L_{ikl})f(x)$ приближенного восстановления внутренней структуры $f(x)$ операторо-

ром $L_{ikl}(x)$, построенным с помощью данного набора плоскостей и томограмм, выполняется равенство

$$R_{ikl}f(x) = \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \int_0^{\omega_3} \frac{\partial^3}{\partial t_i \partial t_k \partial t_l} f \left(V_{ikl} + \frac{\tau_{kl}}{\Delta_{kli}} t_i + \frac{\tau_{li}}{\Delta_{lik}} t_k + \frac{\tau_{ik}}{\Delta_{ikl}} t_l \right) dt_i dt_k dt_l. \quad (3)$$

Доказательство. Примем во внимание тождества:

$$\begin{aligned} (I - L_{ikl})f(x) &= (I - L_{ik}^l - L_{kl}^i - L_{li}^k + L_{li}^i L_{kl}^k + L_{kl}^k L_{li}^l + L_{li}^l L_{ik}^i + L_{ik}^i L_{kl}^k L_{li}^l) f(x) = \\ &= (I - L_{kl}^i)(I - L_{li}^k)(I - L_{ik}^l) f(x), \end{aligned}$$

$$(I - L_{kl}^i) f(x) = \int_0^{\omega_i(x)} \frac{\partial f}{\partial t_i} \left(V_{ikl} + \frac{\tau_{kl}^{\omega_2, \omega_3}}{\Delta_{kli}} t_i + \frac{\tau_{li}^{\omega_3, \omega_1}}{\Delta_{lik}} \omega_k(x) + \frac{\tau_{ik}^{\omega_1, \omega_2}}{\Delta_{ikl}} \omega_l(x) \right) dt_i.$$

Подставим это интегральное выражение, а также аналогичные выражения для $(I - L_{li}^k) f(x)$, $(I - L_{ik}^l) f(x)$ в формулу (3):

$$\begin{aligned} R_{ikl}f(x) &= (I - L_{ikl})f(x) = (I - L_{kl}^i)(I - L_{li}^k)(I - L_{ik}^l) f(x) = \\ &= \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \int_0^{\omega_3} \frac{\partial^3}{\partial t_i \partial t_k \partial t_l} f \left(V_{ikl} + \frac{\tau_{kl}^{\omega_2, \omega_3}}{\Delta_{kli}} t_i + \frac{\tau_{li}^{\omega_3, \omega_1}}{\Delta_{lik}} t_k + \frac{\tau_{ik}^{\omega_1, \omega_2}}{\Delta_{ikl}} t_l \right) dt_i dt_k dt_l. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть множество произвольных томограмм, которые находятся на плоскостях, задаваемых уравнениями $\Pi_k : \omega_k(x) = 0, k = \overline{1, N}$, удовлетворяет условию: в одной точке $V_{ikl} = \Pi_i \cap \Pi_k \cap \Pi_l$ пересекаются не более трех томограмм.

Тогда система функций

$$h_{ikl}(x) = \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i, k, l}}^N \omega_j(x)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i, k, l}}^N \omega_j(V_{ikl})}$$

имеет свойства $h_{ikl}(V_{i'k'l'}) = \delta_{i,i'} \delta_{k,k'} \delta_{l,l'}$, $i, i' = \overline{1, n}$, $k, k' = \overline{1, m}$, $l, l' = \overline{1, s}$ и является разложением единицы, то есть $\sum_{\substack{i, k, l \in M \\ i \neq k \neq l}}^m h_{ikl}(x) = 1$.

Доказательство. Учтем, что $V_{i'k'l'} = \Pi_{i'} \cap \Pi_{k'} \cap \Pi_{l'}$, то есть $\omega_{l'}(V_{i'k'l'}) = 0$, $\omega_{k'}(V_{i'k'l'}) = 0$, $\omega_{i'}(V_{i'k'l'}) = 0$.

$$\begin{aligned} h_{ikl}(V_{i'k'l'}) &= \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i,}}^m \omega_j(V_{i'k'l'}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k,}}^n \omega_2(V_{i'k'l'}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l,}}^s \omega_3(V_{i'k'l'})}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i,}}^m \omega_j(V_{i'k'l'}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k,}}^n \omega_2(V_{i'k'l'}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l,}}^s \omega_3(V_{i'k'l'})} = \begin{cases} 1, & i=i', k=k', l=l' \\ 0, & \text{в других случаях} \end{cases} = \\ &= \delta_{i,i'} \delta_{k,k'} \delta_{l,l'}, \quad i, i' = \overline{1, m}, \quad k, k' = \overline{1, n}, \quad l, l' = \overline{1, s}. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

Лемма 1. Пусть томограммы $T_{1,i}(\bar{x})$, $i = \overline{1, n}$, $T_{2,k}(\bar{x})$, $k = \overline{1, m}$, $T_{3,l}(\bar{x})$, $l = \overline{1, s}$ удовлетворяют условиям теоремы 2, тогда система функций $h_{ikl}(x)$ является разложением единицы:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k, l}}^m \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, l}}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i, k}}^s h_{ikl}(x) = 1.$$

Доказательство. Равенство для $h_{ikl}(x)$ можно записать в виде

$$h_{ikl}(x) = \frac{\prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^n \omega_{1\Pi\mu}(x) \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^m \omega_{2\Pi 2v}(x) \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq l}}^s \omega_{3\Pi 3\beta}(x)}{\prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^n \omega_{1\Pi\mu}(V_{ikl}) \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^m \omega_{2\Pi 2v}(V_{ikl}) \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq l}}^s \omega_{3\Pi 3\beta}(V_{ikl})} = \\ = \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^n \frac{\omega_{1\Pi\mu}(x)}{\omega_{1\Pi\mu}(V_{ikl})} \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^m \frac{\omega_{2\Pi 2v}(x)}{\omega_{2\Pi 2v}(V_{ikl})} \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq l}}^s \frac{\omega_{3\Pi 3\beta}(x)}{\omega_{3\Pi 3\beta}(V_{ikl})}.$$

Теперь просуммируем это выражение:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \neq l}}^m \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \neq l}}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k \neq i}}^s h_{ikl}(x) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \neq l}}^m \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \neq l}}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k \neq i}}^s \left[\prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^n \frac{\omega_{1\Pi\mu}(x)}{\omega_{1\Pi\mu}(V_{ikl})} \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^m \frac{\omega_{2\Pi 2v}(x)}{\omega_{2\Pi 2v}(V_{ikl})} \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq l}}^s \frac{\omega_{3\Pi 3\beta}(x)}{\omega_{3\Pi 3\beta}(V_{ikl})} \right] = \\ = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \neq l}}^n \left[\prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^n \frac{\omega_{1\Pi\mu}(x)}{\omega_{1\Pi\mu}(V_{ikl})} \right] \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \neq l}}^m \left[\prod_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^m \frac{\omega_{2\Pi 2v}(x)}{\omega_{2\Pi 2v}(V_{ikl})} \right] \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k \neq i}}^s \left[\prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq l}}^s \frac{\omega_{3\Pi 3\beta}(x)}{\omega_{3\Pi 3\beta}(V_{ikl})} \right] \equiv 1.$$

Здесь учитывается, что

$$\prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^n \frac{\omega_{1\Pi\mu}(x)}{\omega_{1\Pi\mu}(V_{\mu\nu\beta})}, \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^m \frac{\omega_{2\Pi 2v}(x)}{\omega_{2\Pi 2v}(V_{\mu\nu\beta})}, \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq l}}^s \frac{\omega_{3\Pi 3\beta}(x)}{\omega_{3\Pi 3\beta}(V_{\mu\nu\beta})}$$

являются базисными полиномами Лагранжа. Из этого следует, что

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \neq l}}^n \left[\prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^n \frac{\omega_{1\Pi\mu}(x)}{\omega_{1\Pi\mu}(V_{ikl})} \right] \equiv 1, \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \neq l}}^m \left[\prod_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^m \frac{\omega_{2\Pi 2v}(x)}{\omega_{2\Pi 2v}(V_{ikl})} \right] \equiv 1, \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k \neq i}}^s \left[\prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq l}}^s \frac{\omega_{3\Pi 3\beta}(x)}{\omega_{3\Pi 3\beta}(V_{ikl})} \right] \equiv 1.$$

Лемма доказана.

Теорема 4. Пусть томограммы $T_k(\bar{x}) \in C^r(R^2)$, $r \geq 3$ удовлетворяют условиям С. М. Никольского на ребрах и в точке пересечения плоскостей. Тогда функция $L(x) = \sum_{(i,k,l) \in M} h_{ikl}(x)L_{ikl}(x)$ является полиномиальным интерфлетантом со свойствами:

$$L(x) \in C^r(\Omega), \quad L(x)|_{\Pi_s} = T_s(\bar{x}), \quad s = \overline{1, N}. \quad (4)$$

При этом $\forall f(x) \in C^r(\Omega)$, $r \geq 3$, что удовлетворяет условиям теоремы 3, выполняется равенство

$$L(x) = Lf(x), \quad f(x) = Lf(x) + Rf(x), \quad R(x)f(x) = \sum_{(i,k,l) \in M} h_{ikl}(x)R_{ikl}f(x),$$

где $R_{ikl}f(x)$ определяется формулой (3), а $h_{ikl}(x)$ – вспомогательные полиномы, которые устанавливаются в теореме 3.

Доказательство. Согласно формуле (2) при построении операторов $L_{ikl}(x)$ используются функции $T_{1,i}(\bar{x})$, $T_{2,k}(\bar{x})$, $T_{3,l}(\bar{x}) \in C^r(R^2)$, $r \geq 3$.

Поэтому $L(x) \in C^r(R^3)$, или, если $\Omega \subset R^3$, то $L(x) \in C^r(\Omega)$. Доказательство соотношений (4) с использованием условия теоремы 1 и то, что система функций $h_{ikl}(x)$ является разложением единицы, проводится так:

$$L(x) \Big|_{\Pi_i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^s h_{ikl}(x)L_{ikl}(x) \Big|_{\Pi_i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^s h_{ikl}(x) \Big|_{\Pi_i} L_{ikl}(x) \Big|_{\Pi_i} = T_i(x) \Big|_{\Pi_i}.$$

Учитывая, что $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \neq l}}^m \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \neq l}}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k \neq i}}^s h_{ikl}(x) = 1$, формула $L_{ikl}f(x) + R_{ikl}f(x) = f(x)$ переписывается следующим образом:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^s h_{ikl}(x) [L_{ikl}f(x) + R_{ikl}f(x)].$$

Отсюда получаем

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^s h_{ikl}(x) L_{ikl}f(x) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^s h_{ikl}(x) R_{ikl}f(x) = (L(x) + R(x))f(x).$$

Теорема 4 доказана.

Теорема 5. Абсолютная неустранимая погрешность E построенного интерфлетанта в допущении, что $f(x, y, z)$ на плоскостях Π_k , соответствующие томограммы заданы приближенно к δ_k , то есть $|T_k(\bar{x}) - \tilde{T}_k(\bar{x})| \leq \delta_k$, $k = \overline{1, n}$, а также $|T_k(\bar{x})|_{\Pi_i} - \tilde{T}_k(\bar{x})|_{\Pi_i}| \leq \delta_{ki}$, $k = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, m}$, $|T_k(\bar{x})|_{\omega_i(x)=0, \omega_l(x)=0} - \tilde{T}_k(\bar{x})|_{\omega_i(x)=0, \omega_l(x)=0}| \leq \delta_{kil}$, равняется

$$E \leq \sum_{(i,k,l) \in M} \delta_i + \delta_k + \delta_l + \delta_i \delta_k + \delta_i \delta_l + \delta_k \delta_l + \delta_i \delta_k \delta_l.$$

Тестовый пример восстановления функции трех переменных с помощью оператора интерфлетации по ее известным следам на системе произвольно расположенных плоскостей. По изложенной методике был разработан комплекс программ в системе компьютерной математики MathCad. Результаты тестирования показывают высокую точность.

Продемонстрируем результаты работы программы.

Пусть заданы четыре плоскости $\Pi_k : \omega_k(x) = 0$:

$$\omega_1 = \frac{x+y+z-1}{\sqrt{3}}, \quad \omega_2 = \frac{-x+y+z-1}{\sqrt{3}}, \quad \omega_3 = \frac{x-y+z-1}{\sqrt{3}}, \quad \omega_4 = \frac{-x-y+z-4}{\sqrt{3}},$$

которые пересекаются в четырех точках:

$$V_{123} = (0, 0, 1), V_{124} = (0, -1, 5, 2, 5), V_{134} = (-1, 5, 0, 2, 5), V_{234} = (-1, 5, -1, 5, 1).$$

Наблюдаем, что в одной точке не пересекается больше трех плоскостей.

О функции $F(x) = x_1^2 + 10x_2 + 5x_3$ известны ее следы на заданных плоскостях, то есть томограммы:

$$T_1(\bar{x}) = F(x)|_{\omega_1(x)=0} = x_1^2 - 5x_1 + 5x_2 + 5, \quad T_2(\bar{x}) = F(x)|_{\omega_2(x)=0} = x_1^2 - 5x_1 + 15x_2 + 5,$$

$$T_3(\bar{x}) = F(x)|_{\omega_3(x)=0} = x_1^2 + 5x_1 + 5x_2 + 5, \quad T_4(\bar{x}) = F(x)|_{\omega_4(x)=0} = x_1^2 + 5x_1 + 15x_2 + 5.$$

По теореме 4 был построен оператор интерфлетации, использующий только заданные томограммы и уравнения плоскостей, на которых лежат томограммы. После упрощения построенный оператор приобретает следующий вид:

$$L(x) = x_1^2 + 10x_2 + 5x_3.$$

Численный эксперимент. По теореме 4 был проведен численный эксперимент для заранее заданного тела, для чего разработан комплекс программ в системе компьютерной математики MathCad. Результаты эксперимента показывают высокую точность восстановления.

Продемонстрируем результаты работы программы (circle), которая изображает численную реализацию метода восстановления. Программа построена на основе оператора сплайн-интерфлетации.

Предлагаются результаты визуализации точного решения и решения, полученного экспериментально, для случая, когда известна точная функция. В случае, который рассматривается в примере, функция $f_1(x, y, z)$ является томограммой.

Пусть есть функция, например, такого вида:

$$f_1(x, y, z) := \begin{cases} 0 & \text{if } (x-0,5)^2 + (y-0,5)^2 + (z-0,5)^2 \leq 0,2^2 \\ 2 & \text{if } (x-0,5)^2 + (y-0,5)^2 + (z-0,5)^2 > 0,2^2 \wedge (x-0,5)^2 + (y-0,5)^2 + (z-0,5)^2 \leq 0,2^2 \\ 3 & \text{if } (x-0,5)^2 + (y-0,5)^2 + (z-0,5)^2 > 0,5^2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

Функция (5) задана в области восстановления от 0 до 1 с шагом 0,1. На рис. 1 представлены графики функции $f_1(x, y, z)$, которая лежит на плоскостях.

Строим оператор сплайн-интерфлетации на взаимно перпендикулярных линиях ($LLL(x, y, z)$), $H(k, t)$ – вспомогательный полином Лагранжа (рис. 2).

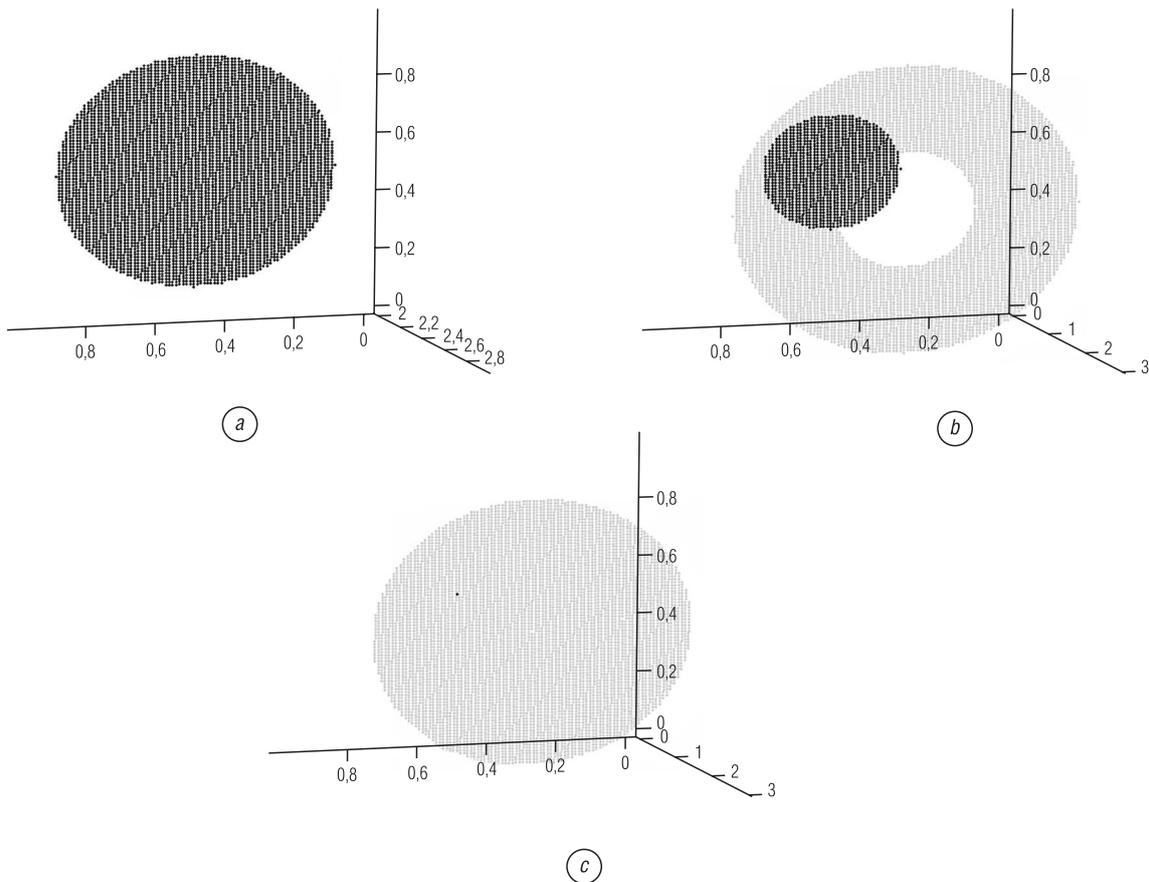


Рис. 1. Графики функции $f_1(x, y, z)$: $a - f_1(x, y, 0,1)$, $b - f_1(x, y, 0,5)$, $c - f_1(x, y, 0,7)$
 Fig. 1. Graphs of the function $f_1(x, y, z)$: $a - f_1(x, y, 0,1)$, $b - f_1(x, y, 0,5)$, $c - f_1(x, y, 0,7)$

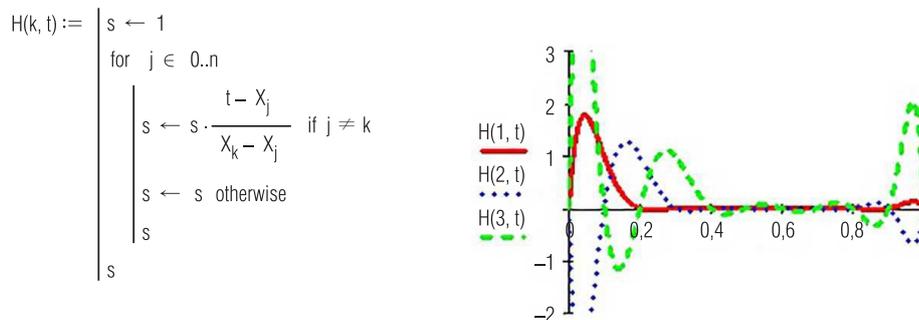


Рис. 2. Вспомогательный полином Лагранжа и его график в трех плоскостях
 Fig. 2. Lagrange preparatory polynomial and its graph in three dimensions

Результаты работы оператора LLL представлены на рис. 3.

Выполним проверку точности восстановления функции. Для этого сравним матрицы значений базовой функции и построенного оператора сплайн-интерфлетации (рис. 4).

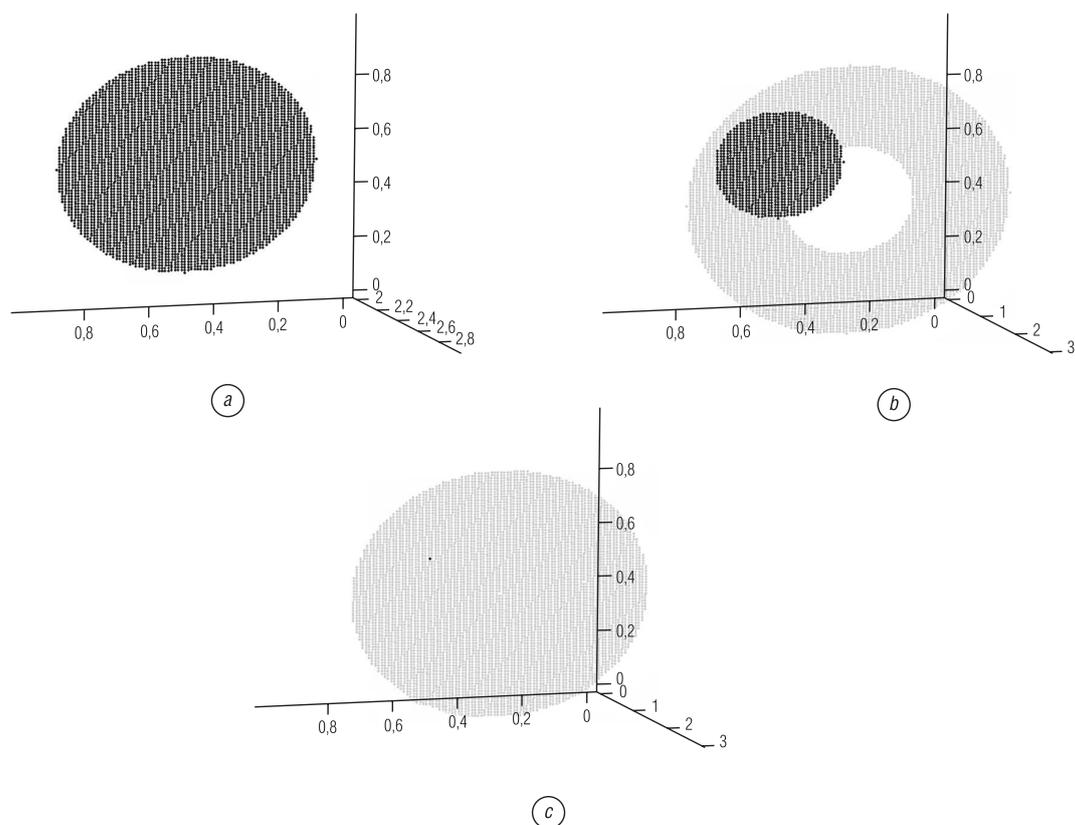


Рис. 3. Результаты работы оператора LLL : $a - LLL(x, y, 0,1)$, $b - LLL(x, y, 0,5)$, $c - LLL(x, y, 0,7)$
 Fig. 3. The results of the operator LLL work: $a - LLL(x, y, 0,1)$, $b - LLL(x, y, 0,5)$, $c - LLL(x, y, 0,7)$

$$L_2(x) := \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..10 \\ \quad \text{for } j \in 0..10 \\ \quad \quad y \leftarrow \frac{i}{10} \\ \quad \quad z \leftarrow \frac{j}{10} \\ \quad \quad AA_{i,j} \leftarrow f_1(x, y, z) \end{array} \quad L_3(x) := \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..10 \\ \quad \text{for } j \in 0..10 \\ \quad \quad y \leftarrow \frac{i}{10} \\ \quad \quad z \leftarrow \frac{j}{10} \\ \quad \quad AA_{i,j} \leftarrow LLL(x, y, z) \end{array}$$

$L_2(0.5) - L_3(0.5) =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 4. Проверка точности восстановления функции
 Fig. 4. Checking the accuracy of the function restoration

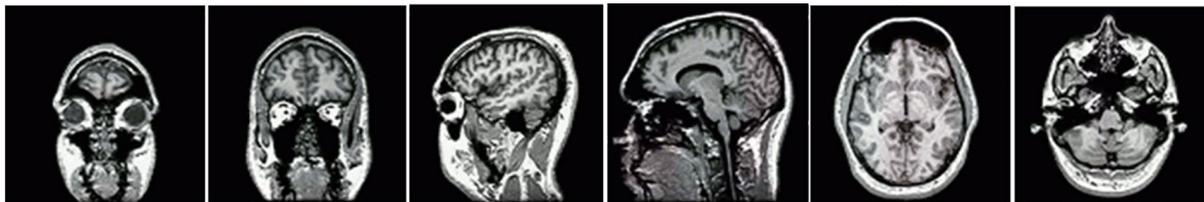
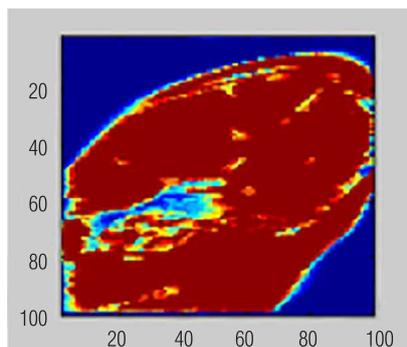


Рис. 5. Примеры томограмм, которые используются для восстановления

Fig. 5. Examples of tomograms used for restoration

Рис. 6. Результаты восстановления плотности $f(x, y, z)$ предложенным методом в плоскости $x + y + 10z = 0$ Fig. 6. The results of $f(x, y, z)$ density restoration with the use of the suggested method in the plane $x + y + 10z = 0$

Также проверим максимумы и минимумы базовой функции и построенного оператора сплайн-интерфлетации: $\max(L_2(0,45)) = 3$, $\max(L_3(0,45)) = 3$, $\min(L_2(0,45)) = 0$, $\min(L_3(0,45)) = 0$. Построенный оператор сплайн-интерфлетации точно приближает заданную функцию. Также возможно использование томограммы вместо функции. Результаты отражены на рис. 5, 6.

Вывод. Из тестового примера и численной реализации делаем вывод, что построенный оператор интерфлетации по известным томограммам (следам) на системе произвольно расположенных плоскостей точно восстановил квадратичную функцию, чего невозможно достичь с помощью операторов интерполяции, которые используются в современных методах компьютерной томографии. Но для предотвращения погрешности (шумов) надо более точно фиксировать объект и задавать более редкий интервал между проекциями.

Изложенный метод восстановления внутренней структуры трехмерного тела с помощью операторов интерфлетации в случае известных томограмм, лежащих на системе любых плоскостей, является обобщением разработанного авторами метода восстановления с известными томограммами на системе трех групп перерезанных плоскостей и имеет такую же высокую точность.

Список использованных источников

1. Наттерер, Ф. Математические аспекты компьютерной томографии / Ф. Наттерер; пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 279 с.
2. Хермен, Г. Восстановление изображений по проекциям: основы реконструктивной томографии / Г. Хермен; пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 350 с.
3. Хелгасон, С. Преобразование Радона / С. Хелгасон; пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 152 с.
4. Сергієнко, І. В. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням інтерфлетатії функцій / І. В. Сергієнко, О. М. Литвин, Ю. І. Першина. – Харків: [б. в.], 2008. – 160 с.
5. Литвин, О. М. Математична модель відновлення внутрішньої структури тривимірного об'єкта за відомими його томограмами з використанням інтерфлетатії функцій / О. М. Литвин, Ю. І. Першина // Допов. Нац. акад. наук України. – 2005. – № 1. – С. 20–24.
6. Литвин, О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування / О. М. Литвин. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
7. Likhachev, A. V. A new method for deriving unknown additive background in projection in three-dimensional tomography / A. V. Likhachev, V. V. Pickalov // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2002. – Vol. 42, № 3. – P. 341–352.
8. Трофимов, О. Е. Об одном способе восстановления изображения по многоакурсной томограмме / О. Е. Трофимов, Л. В. Тюренкова. – Новосибирск: ИАЭ СО АН СССР, 1989. – 28 с.
9. Пикалов, В. В. Сравнение алгоритмов спиральной томографии / В. В. Пикалов, А. В. Лихачев // Вычислительные методы и программирование. – 2004. – № 5. – С. 170–183.
10. Никольский, С. М. Граничные свойства функций, определенных на области с угловыми точками / С. М. Никольский // Математический сб. – 1958. – Т. 45 (87), № 2. – С. 181–194.

References

1. Natterer F. *Mathematical aspects of computerized tomography*. New York, Wiley, 1986. 221 p.
2. Herman, G. T. *Image Reconstruction from Projections. The Fundamentals of Computerized Tomography*. New York – London, Academic Press, 1980. 316 p.

3. Helgason S. *The Radon Transform*. Boston, Birkhäuser, 1980. 195 p. Doi: 10.1007/978-1-4899-6765-7
4. Sergienko I. V., Litvin O. M., Pershina Yu. I. *Mathematical modeling in computer tomography with the use of function interflatation*. Kharkiv, 2008. 160 p. (in Ukrainian).
5. Litvin O. M., Pershina Yu. I. Mathematical model of internal structure restoration for a 3D object with the use of function interflatation. *Dopovidi Nacional'noi' akademii' nauk Ukrai'ny = Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, 2005, no. 1, pp. 20–24 (in Ukrainian).
6. Litvin O. M. *Function interlination and some of its applications*. Kharkiv, Basis Publ., 2002. 544 p. (in Ukrainian).
7. Likhachev A. V., Pickalov V. V. A new method for deriving unknown additive background in projection in three-dimensional tomography. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2002, vol. 42, no. 3, pp. 341–352.
8. Trofimov O. E., Tyurenkova L. V. *On one method for image restoration based on multiangle tomogram*. Novosibirsk, IAE SO AN SSSR, 1989. 28 p. (in Russian).
9. Pikalov V. V., Lihachev A. V. Comparison of spiral tomography methods. *Vyichislitelnyie metody i programmirovaniya = Numerical Methods and Programming*, 2004, no. 5, pp. 170–183 (in Russian).
10. Nikolskii S. M. Boundary properties of functions determined on the angular point domain. *Matematicheskii sbornik = Sbornik: Mathematics*, 1958, vol. 45 (87), no. 2, pp. 181–194 (in Russian).

Информация об авторах

Першина Юлия Игоревна – доктор физико-математических наук, профессор, Украинская инженерно-педагогическая академия (ул. Университетская, 16, 61003, Харьков, Украина). E-mail: yulia_pershyna@ukr.net

Шилин Александр Викторович – аспирант, Украинская инженерно-педагогическая академия (ул. Университетская, 16, 61003, Харьков, Украина). E-mail: sh.aleks783@gmail.com

Information about authors

Iuliia I. Pershyna – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy (16, Universitetskaya Str., 61003, Kharkov, Ukraine). E-mail: yulia_pershyna@ukr.net.

Oleksandr V. Shylin – Postgraduate Student, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy (16, Universitetskaya Str., 61003, Kharkov, Ukraine). E-mail: sh.aleks783@gmail.com.

Ю. Д. Васильева

Институт современных знаний имени А. М. Широкова, Минск, Беларусь

РАЗРАБОТКА ПРОГНОЗИРУЕМОЙ ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ЛИЦА ПАЦИЕНТА ПОСЛЕ ЛЕЧЕНИЯ ЗУБОЧЕЛЮСТНЫХ АНОМАЛИЙ

Аннотация. Предлагается метод прогнозирования положения мягких тканей лица пациента после лечения зубочелюстных аномалий. В качестве исходных данных используются базовые формы сеточных моделей зубов для построения зубочелюстной системы пациента до лечения и трехмерная модель головы пациента, построенная по двум фотографиям. Между базовыми формами зубов и трехмерной моделью головы устанавливаются связи, позволяющие при изменении формы зубных дуг пациента плавно изменять соответствующий участок модели головы. Такие связи дают возможность по прогнозируемому скелетному профилю построить профиль лица пациента после предполагаемого лечения. Прогнозируемый скелетный профиль определяется в соответствии с построенной математической моделью параметрических зубочелюстных дуг пациента после лечения, которая использует методики, предложенные специалистами-ортодонтами. Были проведены экспериментальные исследования с визуальной и численной оценкой. Средние квадратичные отклонения положения кожного профиля лица пациента от прогнозируемого положения кожного профиля на трехмерной модели головы пациента не превысили 10 %.

Ключевые слова: параметрическая модель, трехмерная модель головы, зубочелюстные аномалии, боковая телерентгенограмма, усредненная модель, фотография лица, профиль лица

Для цитирования. Васильева, Ю. Д. Разработка прогнозируемой трехмерной модели лица пациента после лечения зубочелюстных аномалий / Ю. Д. Васильева // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. – 2017. – №4. – С. 122–128.

Yu. D. Vasilyeva

Institute of Modern Knowledge named after A. Shirokov, Minsk, Belarus

DEVELOPMENT OF A PREDICTED THREE-DIMENSIONAL MODEL OF PATIENT'S FACE AFTER THE TREATMENT OF DENTOALVEOLAR ANOMALIES

Abstract. The methods of prediction of location of patient's soft tissues after the treatment of dentoalveolar anomalies are considered. The base forms of teeth mesh models for modelling patient's dental systems before and also after the medical treatment and patient's three-dimensional model from his two photos are used as the input data. The relations are established between the base form of the teeth and three-dimensional model. These relations make it possible to modify the form of teeth with smooth modifications of soft tissues on the patient's head. The prediction position of soft tissues is based on the position of the skeletal profile. A method for constructing the position of patient's skeletal profile has been developed. It takes into account individual geometric parameters. The algorithm uses the technique of orthodontists to establish a series of geometric relations between the patient's teeth. An experimental study was conducted by means of visual and numerical evaluation. The mean square deviation between soft tissues of the patient's face and the predictable position of soft tissues of the patient's face hadn't prevail 10 %.

Keywords: 3D head, parametric model, front/side photos, 3D model of a face, 3D face reconstruction, dentoalveolar anomalies, orthodontic treatment, teleroentgenogram

For citation. Vasilyeva Yu. D. Development of a predicted three-dimensional model of patient's face after the treatment of dentoalveolar anomalies. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2017, no. 4, pp. 122–128 (in Russian).

Введение. Зубочелюстные аномалии – одно из распространенных заболеваний, которое приводит к неправильному развитию отдельных зубов, зубных рядов, челюстей, мягких тканей. Перед лечением таких аномалий врач планирует и предполагает изменение профиля лица пациента в зависимости от изменения зубочелюстной системы в процессе лечения. При этом важно предоставить визуальную информацию о прогнозируемой форме лица пациента. Это позволит

пациенту и специалисту контролировать ход лечения и даст психологическое обоснование затраченному времени и применяемому способу лечения.

Перед началом лечения врач измеряет ширину зубов пациента, определяет их положение на зубных дугах и делает боковую телерентгенограмму (ТРГ), которая является разновидностью рентгенологического исследования. Боковая ТРГ проводится для диагностики неправильного прикуса, аномалий роста и расположения челюстей во время ортодонтического лечения [1].

Для измерения размеров зубов используются оттиски с челюсти пациента. Ширину коронок зубов верхней или нижней челюсти измеряют в самой широкой части. Измерения проводят для первых шести зубов (два резца, клык, два премоляра и моляр) на обеих сторонах верхней и нижней челюстей [2]. Остальные зубы (седьмой и восьмой) не рассматриваются при формировании моделей зубочелюстных дуг пациента.

Задача заключается в разработке методов для прогнозирования формы лица пациента после лечения зубочелюстных аномалий на основе построенной трехмерной модели головы по двум фотографиям и «идеальной» модели зубочелюстной системы при наличии полученных в начале лечения данных о пациенте.

Объекты и методы исследований. В качестве исходных данных используется боковая ТРГ пациента, его фотографии лица и ширина зубов. В ходе исследований рассматривались пациенты в возрасте от 6 до 40 лет, при лечении которых использовались брекет-системы.

Процесс прогнозирования разбивается на три этапа:

- 1) построение модели зубочелюстной системы пациента;
- 2) построение трехмерной модели головы пациента;
- 3) изменение модели профиля лица пациента.

Построение модели зубочелюстной системы пациента. Разработанные методы позволяют построить зубочелюстную систему пациента до лечения с точным положением каждого зуба, наклона и ширины. Рассматриваются только по 12 зубов на верхней и нижней челюстях, поскольку только эти зубы оказывают влияние на формирование профиля лица.

Учитывая особенности строения каждого зуба и используя эскизы усредненных зубов [3], предварительно были подготовлены трехмерные сеточные объекты, которые представлены в виде базовой модели, без учета индивидуальных характеристик отдельного пациента.

Базовые модели зубов масштабируются пропорционально по всем направлениям локальных осей координат до совпадения с шириной зуба пациента и распределяются на зубных дугах, которые формируют зубочелюстную систему пациента.

Для соответствия построенных зубных дуг с дугами пациента предусматривается возможность уточнения аномалий зубов.

После создания нижней и верхней зубных дуг задаются наклон и положение нижних резцов на боковой ТРГ для смыкания построенных моделей.

Построение трехмерной модели головы пациента. Автором ранее были рассмотрены существующие методы и программные продукты построения трехмерной модели головы по фотографиям [4]. Из-за невозможности использования в готовых программных комплексах данных о зубных дугах пациента и последующей их модификации был разработан собственный метод, который строит модель головы пациента по двум фотографиям.

В основе построения лежит базовая форма трехмерной сеточной модели головы с правильной топологией. Дополнительно к модели привязываются объекты, выступающие в роли характерных точек (рис. 1). Каждая точка связана с соответствующей группой вершин, и при перемещении любой из точек будет изменяться форма сеточной структуры соответствующего участка.

Специалистом на двух фотографиях лица в профиль и анфас согласно приведенному шаблону для определения положения носа, глаз, подбородка и губ в произвольном порядке указываются характерные точки. Затем с помощью разработанного алгоритма устанавливаются связи точек на фотографиях с характерными точками на базовой сеточной модели [5].

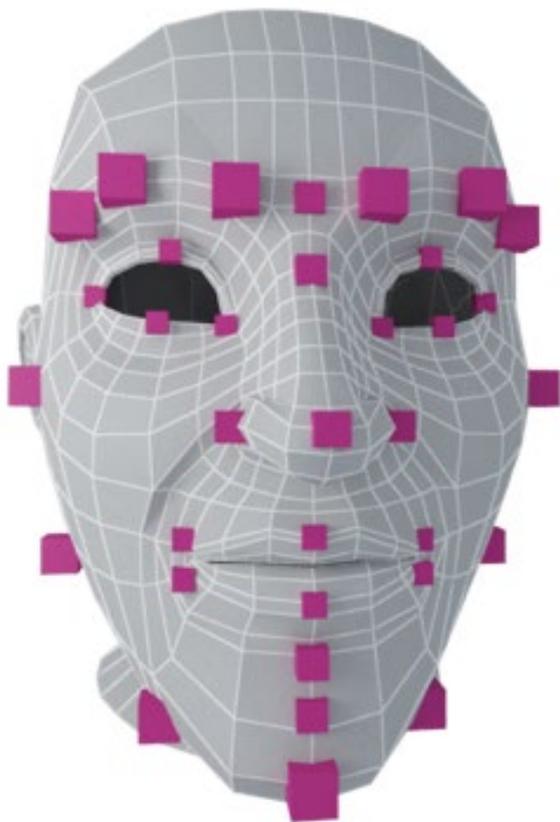


Рис. 1. Характерные точки на базовой сеточной модели
Fig. 1. Key points are located on the template mesh model

Рассматриваемые методы позволяют выявить по семь базовых точек на зубочелюстных дугах, через которые проводится сплайн Безье.

Построенные сплайны определяют верхнюю и нижнюю зубные дуги, на которых должны разместиться 24 зуба. В качестве зубов используются упрощенные сеточные модели. Зная ширину каждого зуба, они равномерно распределяются вдоль сплайнов.

В результате будет построено приближенное к оптимальному положение каждого зуба. Параметры трансформации с упрощенных моделей зубов переносятся на сеточные модели зубов пациента до лечения, формируя положение зубов, которое прогнозируется получить в результате лечения.

Благодаря установленным связям сеточная модель приобретает форму лица пациента (рис. 2).

Изменение модели профиля лица пациента. В соответствии с масштабом сеточной модели головы пациента устанавливается масштаб построенных ранее зубочелюстных дуг пациента до лечения, которые встраиваются в модель головы пациента.

Подготовленные связи между моделями упрощенных форм зубов и базовой моделью головы переносятся на сформированные сеточные модели зубов и модель головы пациента до лечения. Это позволяет связать области на модели головы так, чтобы получить плавное изменение соответствующего участка лица пациента при любой трансформации зуба.

Далее положение каждого зуба меняется в соответствии с его положением после лечения. Данный вид трансформации основывается на методе построения математической модели параметрических зубочелюстных дуг пациента после лечения и учитывает индивидуальные геометрические параметры зубочелюстной системы, используя методики, предложенные специалистами-ортодонтами (рис. 3) для установления ряда геометрических соотношений между зубами [7].



Рис. 2. Базовая форма изменена в соответствии с фотографиями пациента
Fig. 2. The template model was changed in accordance with the photos of patient

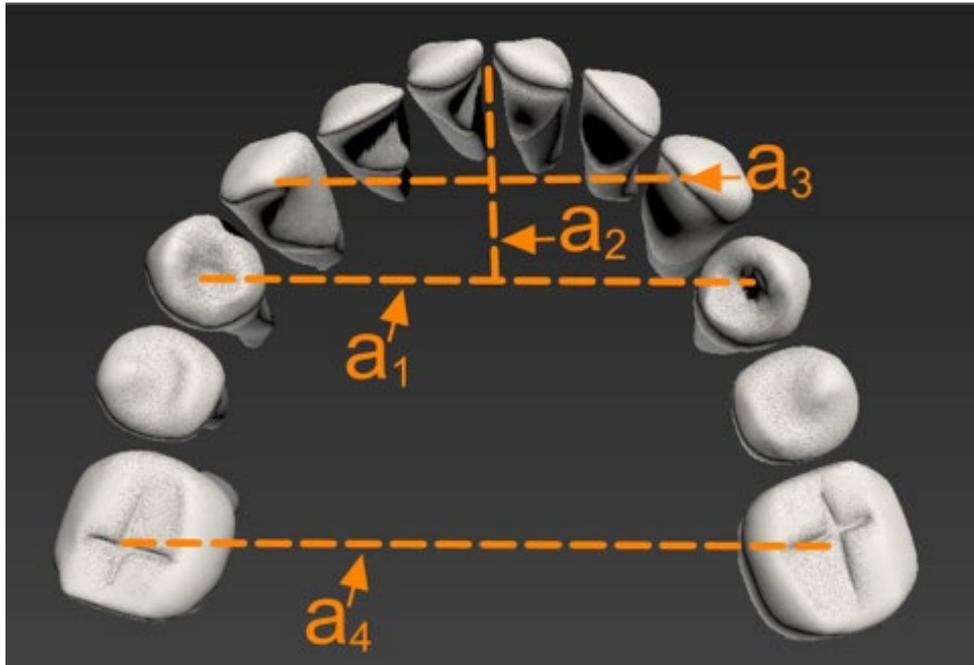


Рис. 3. Установление ряда геометрических соотношений: a_1 и a_4 – по методике Линден и Харт [6]; a_2 – метод Коркхауза; a_3 – метод Слабковской

Fig. 3. It was established a series of geometric relations: a_1 and a_4 – Linden's and Hart's method [6]; a_2 – Korkhaus's method; a_3 – Slabkovskaya's method

Исходя из назначенных ранее связей, с изменением положения зубов автоматически корректируется сетка модели головы пациента. Каждое изменение формы головы отражает предполагаемую внешность пациента после лечения (рис. 4).



Рис. 4. Положение мягких тканей лица после предполагаемого лечения

Fig. 4. Prediction of location of patient's soft tissues after the treatment

Результаты исследований. Экспериментальные исследования проводились на кафедре стоматологии Белорусского государственного медицинского университета под руководством специалистов. Были рассмотрены десять пациентов с зубочелюстными аномалиями, при лечении которых использовались брекет-системы и которые после лечения имеют гармоничный профиль лица.

Для сравнения полученных результатов использовались две фотографии лица пациента. Масштаб фотографий подбирался в соответствии с положением двух базовых характерных точек, относительно которых ранее встраивались зубные дуги: нижняя точка подбородка и точка на переносице.

Для оценки в качестве исходных данных использовались кожные профили лица пациента до и после лечения, полученные из профильной фотографии лица, и прогнозируемый кожный профиль, сформированный из сеточной оболочки на боковой проекции (рис. 5).

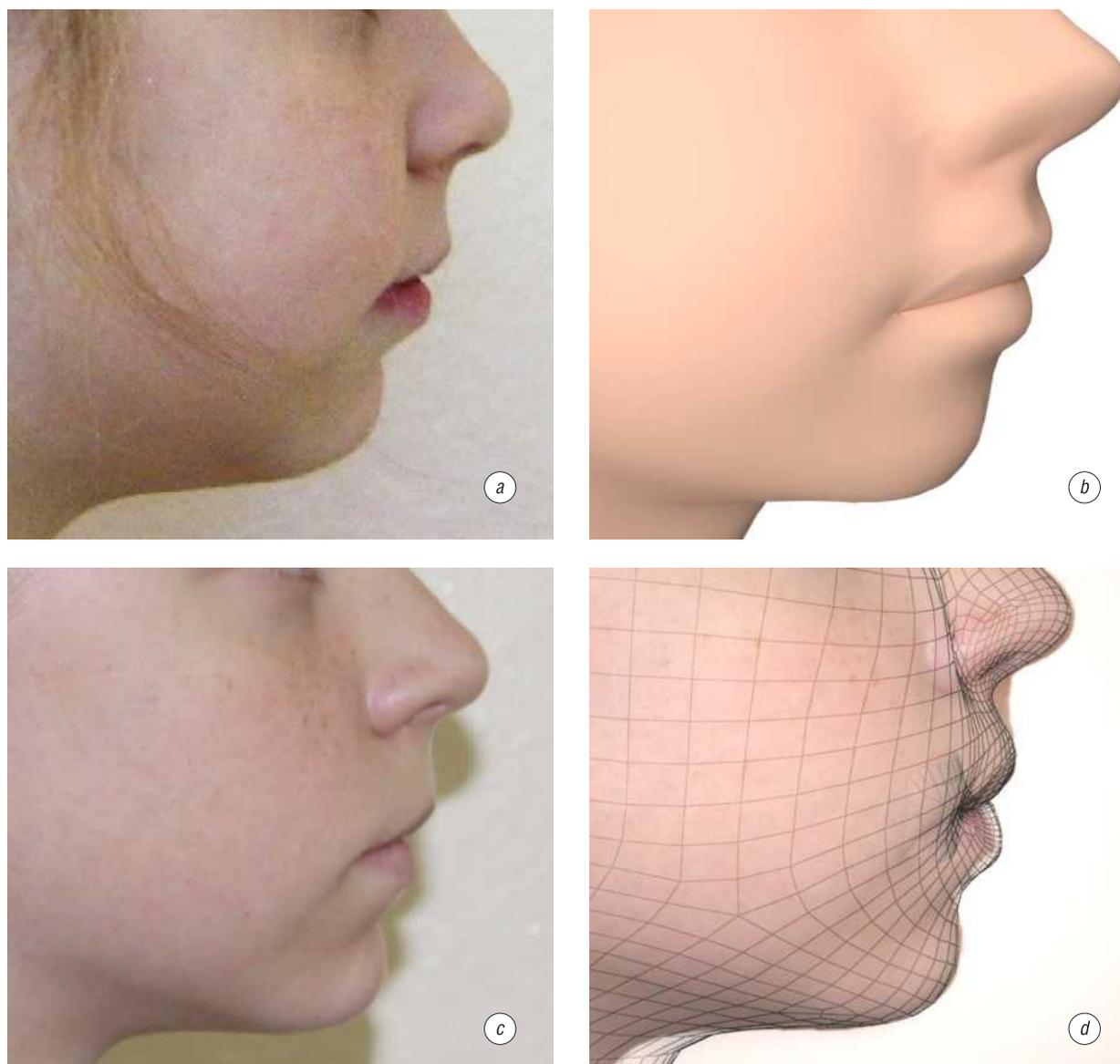


Рис. 5. Пример сравнения фотографий пациента (пациент № 1, 10 лет) до и после лечения и трехмерной модели головы с прогнозируемым положением мягких тканей: *a* – фотография в профиль до лечения, *b* – модель головы, *c* – фотография в профиль после лечения, *d* – модель головы

Fig. 5. The sample of comparison of patient's photos (patient № 1, 10 years old) before and after medical treatment and the three-dimensional model of the head with the prediction of location soft tissues: *a* – patient's photo before the treatment, *b* – the head's model, *c* – patient's photo after the treatment, *d* – the head's model

В результате экспериментальных исследований визуальная и численная оценки позволили оценить результаты прогнозирования на боковой ТРГ и на трехмерной модели головы. Средние квадратичные отклонения кожного профиля лица пациента от прогнозируемого кожного профиля на боковой ТРГ и трехмерной модели головы пациента представлены в таблице.

Средние квадратичные отклонения кожных профилей, %
Mean squared deviation of the soft profiles, %

Критерий	Среднее квадратичное отклонение	
	на боковой ТРГ головы	на 3D модели головы
Площадь	4	6,7
Максимальное расстояние	8,6	6,4
Сумма квадратов расстояний	8,6	6,3

Из таблицы следует, что отклонение по трем критериям на трехмерной модели головы пациента не превышает 10 %, что отражает высокие результаты прогноза.

Предполагается развитие методов и средств решения поставленной задачи путем усовершенствования расчетов и оптимизации процесса визуализации. Углубленное изучение проблем зубочелюстных аномалий позволит применять новые методы для прогноза при лечении зубочелюстных аномалий.

Заключение. Разработаны алгоритмы для построения прогноза формы лица пациента после планируемого лечения зубочелюстных аномалий. В основе построения прогноза лежат трехмерные модели зубных дуг пациента до лечения и головы пациента. С использованием заданной врачом ширины зубов пациента создается приближенная к оптимальной модель зубных дуг, которая задает форму лица пациента и формирует представление о его будущей внешности. Применяя рассмотренные методики, можно предположить, как будет выглядеть лицо пациента с учетом погрешности, выявленной при проведении численной и визуальной оценки результатов прогнозирования. Средние квадратичные отклонения по трем критериям не превысили 10 %. В ходе экспериментальных исследований были откорректированы связи сеточной модели с зубами для достижения более точного результата.

Список использованных источников

1. Палов, Н. А. Рентгенодиагностика / Н. А. Палов, А. З. Гингольд, К. А. Москачева. – М.: МЕД пресс-информ, 1999. – 556 с.
2. Антропометрические и графические методы в диагностике зубочелюстных аномалий: учеб.-метод. разработка / Т. Н. Терехова [и др.]; под ред. Т. Н. Терехова. – Минск: Изд-во МГМИ, 1998. – 36 с.
3. Справочник по стоматологии / А. И. Рыбаков [и др.]; под ред. А. И. Рыбакова. – М.: Медицина, 1986. – 260 с.
4. Васильева, Ю. Д. Компьютерное моделирование головы по фотографиям лица / Ю. Д. Васильева // Вест. Ин-та соврем. знаний. – 2011. – №3. – С. 86–92.
5. Васильева, Ю. Д. Построение трехмерной модели головы по фотографиям / Ю. Д. Васильева // Наука и образование в условиях социально-экономической трансформации общества: материалы XVI Междунар. науч.-практ. конф., Минск, 5 дек. 2013 г. / Ин-т соврем. знаний им. А. М. Широкова; редкол.: В. А. Мищенко [и др.]. – Минск, 2014. – С. 131–133.
6. Инновация в ортодонтии: учеб.-метод. пособие для элективного курса / И. В. Токаревич [и др.]; под ред. И. В. Токаревича. – Минск: Изд-во БГМУ, 2008. – 44 с.
7. Польша, Л. В. Положение верхней губы – ключ к планированию лечения пациентов с дистальной окклюзией / Л. В. Польша, В. М. Ломакина // Ортодонтия. – 2006. – №1. – С. 80.

References

1. Palov N. A., Gingold A. Z., Moskacheva K. A. *X-ray diagnostics*. Moscow, MED Press-inform Publ., 1999. 556 p. (in Russian).
2. Terekhova T. N., Timchuk Ya. I., Tokarevich, I. V., Gusakovskaya Zh. S. *Anthropometric and graphic methods in the diagnosis of dentoalveolar anomalies*. Minsk, Minsk State Medical Institute Publ., 1998. 36 p. (in Russian).

3. Rybakov A. I., Ivaschenko G. M., Lurie T. M. *Handbook of dentistry*. Moscow, Medicine Publ., 1986. 260 p. (in Russian).
4. Vasilyeva U. D. Digital modeling a head from photo of a face. *Vesti Instituta sovremennykh znaniy* [Proceedings of Institute of Modern Knowledge], 2011, no. 3, pp. 86–92 (in Russian).
5. Vasilyeva U. D. Reconstruction head modeling from photos. *Nauka i obrazovaniye v usloviyakh sotsial'no-ekonomicheskoy transformatsii obshchestva: materialy XVI mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii* [Science and Education in context of socio-economic transformation of society: materials of the 16th International Scientific and Practise Conference, Minsk, 5 December 2013]. Minsk, 2014, pp. 131–133 (in Russian).
6. Tokarevich I. V., Timchuk Ya. M., Korhova N. V., Denisov S. S. *Innovation in orthodontics*. Minsk, Belarusian State Medical University Publ., 2008. 44 p. (in Russian).
7. Polma L. V., Lomakina L. V. The position of the upper lip is the key to planning the treatment of patients with distal occlusion. *Ortodontiya = Orthodontics*, 2006, no. 1 (33), pp. 80–83 (in Russian).

Информация об авторе

Васильева Юлия Дмитриевна – кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики и информатики, Институт современных знаний имени А. М. Широкова (ул. Филимонова, 69, 220114, Минск, Республика Беларусь). E-mail: 043@tut.by

Information about the author

Yuliya D. Vasilyeva – Ph. D. (Engineering), Assistant Professor of Department of Higher Mathematics and Informatics, Institute of Modern Knowledge named after A. Shirokov (69, Filimonov Str., 220114, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: 043@tut.by